गणित

भाग 2

कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

[illegible]

भाग 2

कक्षा 12 के लिए पाठ्यपुस्तक

लेखक

अनूप राजपूत	पी.के. जैन
हुकुम सिंह	राम अवतार
ज्योती दास	रेनू गुप्ता
के.डी. नन्दा	एस.के. कौशिक
के.बी. सुब्रमनियम	एस.के.एस. गौतम
मोहन लाल	वी.पी. सिंह

संपादक

पी. के. जैन हुकुम सिंह

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प संस्करण
2003 : आषाढ़ 1925
द्रिण
री 2004 : फाल्गुन 1925
5T RA

ISBN : 81-7450-051-0 (भाग-1)
ISBN : 81-7450-127-4 (भाग-2)

एन.सी.ई.आर.टी. के प्रकाशन विभाग के कार्यालय

एन.सी.ई.आर.टी. कैंपस
श्री अरविंद मार्ग
नई दिल्ली 110 016

108, 100 फीट रोड
हेली एक्सटेंशन, होस्डेकेरे
बनाशंकरी III इस्टेज
बैंगलूर 560 085

नवजीवन ट्रस्ट भवन
डाकघर नवजीवन
अहमदाबाद 380 014

सी.डब्ल्यू.सी. कैंपस
निकट: धनकल बस स्टॉप
पनिहटी
कोलकाता 700 114

सी.डब्ल्यू.सी. कॉम्प्लैक्स
मालीगांव
गुवाहाटी 781021

प्रकाशन सहयोग

संपादन : रेखा अग्रवाल
उत्पादन : अतुल सक्सेना

रु 80.00

एन.सी.ई.आर.टी. वाटर मार्क 70 जी.एस.एम. पेपर पर मुद्रित।

ाशन विभाग में सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविंद मार्ग, नई दिल्ली 110 016 ारा प्रकाशित तथा बंगाल ऑफसेट वर्क्स, 335 खजूर रोड करोलबाग, नई दिल्ली 110 005 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) ने विद्यालयों में अध्यापन/अध्ययन की प्रक्रिया में समुचित गुणात्मक सुधार लाने हेतु *विद्यालयी शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा-2000* (एन.सी.एफ.एस.ई.-2000) का विकास किया जिसके अन्तर्गत मुख्य उद्देश्य का एक पक्ष लोगों की बदलती आवश्यकताओं और आकांक्षाओं तथा अन्य पक्ष राष्ट्रीय शिक्षा नीति 1986, भारत सरकार एवं संशोधित दस्तावेज-1992 में वर्णित मार्गदर्शक सिद्धांत के अनुसार शिक्षा प्रणाली में उत्पन्न नवीन आवश्यकताओं को, ध्यान में रखना है।

एन.सी.एफ.एस.ई.-2000 में सभी विद्यालयी विषयों के पाठ्यक्रमों में सुधार एवं इन्हें आधुनिक बनाने को प्रमुख महत्त्व दिया गया है ताकि मानव-संपदा की विभिन्न प्रकार की बढ़ती माँग की पूर्ति तथा उनका समुचित सहयोग राष्ट्रीय विकास में सक्रिय रूप से हो सके। एन.सी.एफ.एस.ई.-2000 में उच्चतर माध्यमिक अर्थात कक्षा 11, 12 के लिए गणित शिक्षण को ऐच्छिक स्वरूप दिए जाने का अनुमोदन किया है। कक्षा 11 एवं कक्षा 12 की गणित का संशोधित पाठ्यक्रम एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा 2001 में विकसित किया गया तथा ग्यारहवीं कक्षा की पुस्तक को 2002 में प्रकाशित किया गया है। वर्तमान पुस्तक उच्चतर माध्यमिक स्तर पर चतुर्थ सत्र हेतु है। सत्र को तीन भागों A, B और C में विभक्त किया गया है। भाग A सभी विद्यार्थियों के लिए अनिवार्य है तथापि भाग B एवं भाग C ऐच्छिक हैं। कक्षा 11 की तरह विद्यार्थी संचय A + B या A + C का चुनाव कर सकते हैं।

इस पाठ्यक्रम का प्रथम प्रारूप एक लेखन मंडल द्वारा तैयार किया गया, जिसके कुछ सदस्य परिषद् में कार्यरत है तथा अन्य बाह्य संस्थाओं से संबंधित है। इसके पश्चात् इस प्रारूप को मूल्यांकन एवं समीक्षा हेतु आयोजित कार्यशाला में अनेक अनुभवी विशेषज्ञों तथा कार्यरत अध्यापकों के समक्ष प्रस्तुत किया गया जिनके द्वारा प्राप्त सुझावों पर लेखन मंडल ने पुन: विचार किया तथा उचित सुझावों को प्रारूप में समायोजित किया गया। अन्तत: प्रकाशन से पूर्व पुस्तक की पांडुलिपि को विशेषज्ञों के एक समूह द्वारा संपादित किया गया।

लेखन मंडल ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर परिषद् द्वारा पूर्व प्रकाशित गणित की पुस्तकों को संदर्भ में लिया है तथा इन पुस्तकों का उपयोग करने वालों से प्राप्त सुझावों का समुचित उपयोग करने का भी प्रयास किया है। मैं लेखन मंडल के सभी सदस्यों, मूल्यांकन हेतु आयोजित कार्यशाला में सम्मिलित सभी अध्यापकों एवं विशेषज्ञों द्वारा महत्त्वपूर्ण योगदान तथा सुझावों के लिए धन्यवाद देता हूँ। विशेष रूप से मैं लेखन मंडल के अध्यक्ष महोदय के प्रति कृतज्ञ हूँ जिनके कुशल शैक्षिक मार्ग-दर्शन में यह कार्य सम्पन्न हुआ।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् इस पुस्तक में भावी संशोधन हेतु पाठकों के महत्वपूर्ण सुझावों तथा परामर्शों का स्वागत करती है।

जगमोहन सिंह राजपूत
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान
और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
फरवरी 2003

गांधी जी का जंतर

तुम्हें एक जंतर देता हूँ। जब भी तुम्हें संदेह हो या तुम्हारा अहम् तुम पर हावी होने लगे, तो यह कसौटी आज़माओ :

जो सबसे गरीब और कमज़ोर आदमी तुमने देखा हो, उसकी शक्ल याद करो और अपने दिल से पूछो कि जो कदम उठाने का तुम विचार कर रहे हो, वह उस आदमी के लिए कितना उपयोगी होगा। क्या उससे उसे कुछ लाभ पहुँचेगा? क्या उससे वह अपने ही जीवन और भाग्य पर कुछ काबू रख सकेगा? यानी क्या उससे उन करोड़ों लोगों को स्वराज्य मिल सकेगा, जिनके पेट भूखे हैं और आत्मा अतृप्त है?

तब तुम देखोगे कि तुम्हारा संदेह मिट रहा है और अहम् समाप्त होता जा रहा है।

प्रस्तावना

दो वर्ष पूर्व राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय से संबंधित नये दिशानिर्देश तथा पाठ्यक्रम 2001 के अनुरूप पाठ्यक्रम तैयार करने के उद्देश्य से एक लेखन मंडल का गठन किया। कक्षा 11 एवं कक्षा 12 की पुस्तकों के अध्याय तैयार करने के पूर्व एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा गठित गणित समूह के गहन चिंतन तथा व्यापक योजना के आधार पर एक विस्तृत रूपरेखा तैयार की गई। कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक प्रकाशित हो चुकी है तथा प्रयुक्त हो रही है जिसे दो भागों में विभक्त किया गया है।

एन.सी.ई.आर.टी. के गणित समूह तथा बाह्य संस्थाओं के विशेषज्ञों द्वारा इस परियोजना का प्रथम प्रारूप तैयार किया गया। तत्पश्चात् विभिन्न आयोजित कार्यशालाओं में लेखन मंडल द्वारा इस प्रारूप को संशोधित किया गया और इस संशोधित प्रारूप को एक राष्ट्रीय कार्यशाला में देश के विभिन्न भागों से आमंत्रित अनुभवी अध्यापकों एवं विशेषज्ञों के समक्ष समीक्षा एवं मूल्यांकन हेतु प्रस्तुत किया गया। इस कार्यशाला से उत्पन्न महत्त्वपूर्ण सुझावों एवं परामर्शों को इस परियोजना के द्वितीय प्रारूप में समायोजित किया गया है।

कक्षा 11 की पाठ्यपुस्तक की तरह इस पुस्तक की सर्वाधिक महत्त्वपूर्ण विशेषता जो मुख्य रूप से उल्लेखनीय है – वह यह है कि इस पुस्तक की सामग्री को हमने अनेक सरल उदाहरणों तथा अभ्यास प्रश्नों के माध्यम से सरल सुबोध बनाने का प्रयास किया है। गणित की अनेक संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं को छात्रोपयोगी बनाने की दिशा में हमने इन संकल्पनाओं तथा अवधारणाओं के व्यावहारिक प्रयोग प्रस्तुत किए हैं। यह प्रयास गणित की उपयोगिता को छात्रों के समक्ष प्रस्तुत करेगा और उनमें गणित के प्रति रुचि उत्पन्न करने में प्रेरणादायक होगा। इस पुस्तक में चयनित पाठ्य सामग्री छात्रों की विभिन्न क्षमताओं तथा अपेक्षाओं के अनुरूप सिद्ध होगी।

इस पुस्तक की कुछ महत्त्वपूर्ण विशेषताएँ निम्न हैं :

1. प्रत्येक अध्याय का आरंभ विषय के संक्षिप्त भूमिका से किया गया है जो छात्रों में विषय के प्रति रुचि जाग्रत करने में तथा उसका संवर्धन करने में सहायक है।
2. इस पुस्तक में लगभग 700 उदाहरण तथा लगभग 250 आकृतियाँ हैं जो सामान्यतः अन्य पुस्तक में दृष्टिगोचर नहीं होती है।
3. इस पुस्तक में लगभग 2000 अभ्यास प्रश्न दिए गए हैं जो सिद्धांत तथा अनुप्रयोग दोनों पक्षों पर समान रूप से बल देते हैं। इसके साथ ही प्रत्येक अध्याय के अंत में विविध प्रश्नावली शीर्षक के अन्तर्गत कुछ कठिन मिश्रित प्रश्न दिए गए हैं।
4. इस पुस्तक में अनुप्रयोगों से संबंधित अनेक प्रश्न भी दिए गए हैं।

5. अधिकांशतः सभी अध्याय ऐतिहासिक टिप्पणियों के साथ समाप्त होते हैं। ये टिप्पणियाँ पुस्तक को रुचिकर बनाने में तो सहायक हैं ही, प्रस्तुत विषय-सामग्री की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि तथा महत्त्व को भी रेखांकित करती हैं।

मैं विशेष रूप से राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के निदेशक का आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक के निर्माण हेतु लेखन मंडल का गठन किया तथा मुझे इस कार्य में लेखन मंडल का अध्यक्ष होने का निमंत्रण देकर गणित की शिक्षा पद्धति में संशोधन लाने का अवसर दिया। इस चुनौतीपूर्ण कार्य को संपन्न करने हेतु उनके द्वारा प्रदत्त स्वस्थ वातावरण तथा अनुकूल परिस्थितियों ने कार्य को सरल एवं आनंददायक बनाया।

मैं इस पुस्तक के लेखन मंडल के समस्त सदस्यों, रूपांतरणकर्ताओं के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ, जिन्होंने अपना मूल्यवान समय देकर पुस्तक तैयार की। उन शिक्षकों तथा विशेषज्ञों का भी मैं हृदय से आभारी हूँ जिनके सुझाव हमें समय-समय पर प्राप्त होते रहे हैं। मैं विशेष रूप से लेखन मंडल के समन्वयक के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ जिन्होंने इस ग्रंथ को प्रकाशन योग्य पांडुलिपि तैयार करने में अथक परिश्रम किए।

परिषद् के संयुक्त निदेशक तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के अध्यक्ष के प्रति मैं धन्यवाद व्यक्त करता हूँ जिनका अपेक्षित सहयोग हमें तथा लेखन मंडल के सदस्यों को मिलता रहा। मैं प्रकाशन विभागाध्यक्ष और उनके सहकर्मियों के प्रति आभार व्यक्त करता हूँ जिनके सहयोग के बिना पुस्तक का प्रस्तुत स्वरूप प्राप्त करना कठिन था।

मैं एन.सी.ई.आर.टी के तकनीकी, प्रशासनिक एवं अन्य विभागों से संबद्ध सहयोगियों का भी आभार मानता हूँ जिन्होंने हमारे प्रयास को सफल बनाने में महत्त्वपूर्ण सहयोग दिया।

इस पुस्तक में हम संशोधन-सुधार हेतु पाठकों के अमूल्य सुझावों का स्वागत करेंगे।

पवन कुमार जैन

अध्यक्ष

लेखन मंडल

लेखन मंडल

पी. के. जैन
प्रोफेसर, गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

ज्योती दास
प्रोफेसर, (अवकाश प्राप्त)
गणित विभाग, कलकत्ता विश्वविद्यालय
कोलकाता, पश्चिम बंगाल

रेनू गुप्ता
रीडर, गणित विभाग
भगत सिंह कालेज, शेख सराय-II,
नई दिल्ली

के.डी. नन्दा
रीडर, गणित विभाग
दयाल सिंह कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय,
दिल्ली

मोहन लाल
सचिव एवं सलाहकार
डी.ए.वी. कालेज मैनेजमेन्ट कमेटी
चित्रगुप्त रोड,
नई दिल्ली

एस. के. कौशिक
रीडर, गणित विभाग
किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
अनूप राजपूत, *लेक्चरर*
के.बी. सुब्रमनियम, *रीडर*
एस.के.एस. गौतम, *रीडर*
राम अवतार, *रीडर*
वी.पी.सिंह, *रीडर*
हुकुम सिंह, *प्रोफेसर* **(समन्वयक)**

हिंदी रूपांतर की समीक्षा कार्यगोष्ठी के सदस्य

सुमत कुमार जैन
लेक्चरर, गणित
के.एल. जैन इंटर कालेज, ससनी
महामाया नगर, उत्तर प्रदेश

पी.के. तिवारी
सहायक आयुक्त (अवकाश प्राप्त)
केन्द्रीय विद्यालय संगठन, नई दिल्ली

प्रभाकर मिश्र
सहायक आयुक्त (अवकाश प्राप्त)
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान
इलाहाबाद, उत्तर प्रदेश

आर.एस. चौहान
प्रोफेसर (अवकाश प्राप्त)
प्राधानाचार्य डाईट, राजगढ़, मध्यप्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर, गणित
कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
चिचोली, बेतुल, मध्यप्रदेश

अमरनाथ यादव
रीडर, गणित
समता पी.जी. कालेज
सादात गाजीपुर,
उत्तर प्रदेश

आर.एस.गर्ग
उपप्राचार्य, केन्द्रीय विद्यालय, बी.एच.ई.एल
हरिद्वार, उत्तरांचल

टी.एन.झा
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय नं. 1
गया, बिहार

वेद डुडेजा
उपप्राचार्य, राजकीय कन्या माध्यमिक विद्यालय
सैनिक बिहार, दिल्ली

सुशीला गर्ग
लेक्चरर, सर्वोदय विद्यालय
जोरबाग, नई दिल्ली

पवन कुमार जैन
प्रोफेसर, गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एस.के.कौशिक
रीडर, गणित विभाग
किरोड़ीमल कालेज, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग
हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*
राम अवतार, *रीडर*
वी.पी.सिंह, *रीडर* (**समन्वयक**)

हिंदी रूपांतर

सुमत कुमार जैन — पी.के. तिवारी
प्रभाकर मिश्र

हिंदी रूपांतर के संपादक

हुकुम सिंह — राम अवतार
वी.पी. सिंह

हिंदी संस्करण की पांडुलिपि के पुनरावलोकन हेतु कार्यशाला के सदस्य

सुमत कुमार जैन (अनुवादक)
लेक्चरर, गणित
के.एल. जैन इंटर कालेज, ससनी
महामाया नगर, उत्तर प्रदेश

पी.के. तिवारी (अनुवादक)
सहायक आयुक्त (अवकाश प्राप्त)
केन्द्रीय विद्यालय संगठन
460, जल वायु विहार
गुड़गाँव, हरियाणा

प्रभाकर मिश्र (अनुवादक)
बी. 18, गोविंदपुर कालोनी
इलाहाबाद, उत्तर प्रदेश

आर.एस. चौहान
प्रोफेसर (अवकाश प्राप्त)
ए.-35, कस्तूरबा नगर
भोपाल, मध्यप्रदेश

आर.पी. गिहारे
लेक्चरर, गणित
कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय
चिचोली, बेतुल
मध्यप्रदेश

अमरनाथ यादव
रीडर, गणित
समता पी.जी. कालेज
सादात गाजीपुर, उत्तर प्रदेश

आर.एस.गर्ग
उपप्राचार्य, केन्द्रीय विद्यालय, बी.एच.ई.एल
हरिद्वार, उत्तरांचल

टी.एन.झा
पी.जी.टी., केन्द्रीय विद्यालय न. 1
गया, बिहार

वेद डुडेजा
उपप्राचार्य, राजकीय कन्या माध्यमिक विद्यालय
सैनिक बिहार, दिल्ली

सुशीला गर्ग
लेक्चरर, सर्वोदय विद्यालय
जोरबाग, नई दिल्ली

पवन कुमार जैन
प्रोफेसर, गणित विभाग
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एस.के.कौशिक
रीडर, गणित विभाग
किरोड़ीमल कालेज
दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

एन.सी.ई.आर.टी. संकाय
विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग

हुकुम सिंह, *प्रोफेसर*
राम अवतार, *रीडर*
वी.पी.सिंह, *रीडर* **(समन्वयक)**

विषय-सूची

गणित (भाग 1)

भाग A (अध्याय 1-5)

सभी छात्रों के लिए अनिवार्य

भाग B (अध्याय 6-7)

ऐच्छिक - विज्ञान के छात्रों के लिए

भाग C (अध्याय 8-10)

ऐच्छिक - गैर-विज्ञान छात्रों के लिए

विषय-सूची

भाग A (अध्याय 11-14)
सभी छात्रों के लिए अनिवार्य

अवकलज के अनुप्रयोग (APPLICATIONS OF DERIVATIVES) 11

11.1 भूमिका (Introduction)

अभियांत्रिकी, विज्ञान, सामाजिक विज्ञान, जीवन विज्ञान, सूचना विज्ञान एवं अन्य क्षेत्रों में अवकलज के अनेकानेक अनुप्रयोग हैं। इस अध्याय में हम, राशियों के परिवर्तन की दर ज्ञात करने में अवकलज कैसे प्रयुक्त होता है, को सीखेंगे। हम एक वक्र के दिए बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता ज्ञात करने में भी अवकलज का प्रयोग करेंगे। हम यह भी देखेंगे कि फलनों के आलेख पर वर्तन बिंदु (turning point) ज्ञात करने में अवकलज का प्रयोग किया जा सकता है जो यह ज्ञात करने में सहायक होगा कि वक्र अपने उच्चतम या न्यूनतम बिंदु पर कब पहुँचता है। इसके अतिरिक्त, हम 'रोले का प्रमेय' तथा 'माध्यमान प्रमेय' का अध्ययन करेंगे और जाँचेंगे। निश्चित राशियों के मान का सन्निकट प्राप्त करने में भी अवकलज प्रयुक्त किया जा सकता है। अंत में अवकलज और उसके अनुप्रयोग की सहायता से निश्चित फलनों के आलेख खींचेंगे जो कि आगे अध्ययन के लिए महत्त्वपूर्ण हैं।

11.2 राशियों के परिवर्तन की दर (Rate of Change of Quantities)

पुनः स्मरण कीजिए कि अवकलज $\frac{ds}{dt}$ से हमारा अर्थ समय अंतराल t के सापेक्ष दूरी s के परिवर्तन की दर से है। व्यापक रूप से, यदि एक राशि y एक दूसरी राशि x के सापेक्ष किसी नियम $y = f(x)$, को संतुष्ट करते हुए परिवर्तन करे तो $\frac{dy}{dx}$ (या $f'(x)$), x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है और

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_0}$ (या $f'(x_0)$) $x = x_0$ पर x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इसके अतिरिक्त, यदि दो राशियाँ x और y, t के सापेक्ष परिवर्तित हो रही हों अर्थात् $x = f(t)$ और $y = g(t)$, तब शृंखला नियम से

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ यदि } \quad \frac{dx}{dt}\neq 0$$

इस प्रकार, x के सापेक्ष y के परिवर्तन की दर का परिकलन t के सापेक्ष y और x प्रत्येक के परिवर्तन की दर का प्रयोग करके किया जा सकता है।

टिप्पणी इस संपूर्ण पाठ में इस तथ्य के निरपेक्ष, कि परिवर्तन समय के सापेक्ष है अथवा नहीं, परिवर्तन समय के सापेक्ष हमारा अभिप्राय परिवर्तन की तात्कालिक दर से है।

उदाहरण 1 वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। त्रिज्या के सापेक्ष क्षेत्रफल में किस दर से परिवर्तन होता है जबकि त्रिज्या 3 सेमी है?

हल त्रिज्या r वाले वृत्त का क्षेत्रफल A, $A=\pi r^2$ से दिया जाता है। इसलिए, r के सापेक्ष A के परिवर्तन की दर

$$\frac{dA}{dr}=\frac{d}{dr}(\pi r^2)=2\pi r$$

से प्राप्त है। जब $r=3$ सेमी, क्षेत्रफल $(2\pi)\,3=6\pi$ सेमी^{2}/सेमी की दर से बदल रहा है।

उदाहरण 2 एक गेंद के आयतन में परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए। जब त्रिज्या 2 मीटर है, आयतन में त्रिज्या के सापेक्ष परिवर्तन किस दर से होता है?

हल r त्रिज्या की गेंद का आयतन $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ है। इसलिए, त्रिज्या r के सापेक्ष आयतन V के परिवर्तन की दर

$$\frac{dV}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)=4\pi r^2$$

से प्राप्त होता है। जब $r=2$ मीटर, तो आयतन में परिवर्तन की दर $=16\pi$ मी^{3}/मी है।

उदाहरण 3 एक वृत्त की त्रिज्या समान रूप से 4 सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है। वह दर ज्ञात कीजिए जिससे वृत्त का क्षेत्रफल बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 8 सेमी है।

हल समय t के सापेक्ष वृत्त की त्रिज्या r, 4 सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है अर्थात् $\frac{dr}{dt}=4$ सेमी / से।

अब, वृत्त का क्षेत्रफल $A = \pi r^2$ है। इसलिए, समय t के सापेक्ष वृत्त के क्षेत्रफल A के परिवर्तन की दर, जब $r = 8$ सेमी है,

$$\left.\frac{dA}{dt}\right]_{r=8 \text{ सेमी}} = \left[\frac{dA}{dr}\cdot\frac{dr}{dt}\right]_{r=8 \text{ सेमी}} \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= [(2\pi)8]\,4 = 64\pi \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

उदाहरण 4 एक घन का आयतन 7 घन सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रहा है। जब एक कोर की लंबाई 12 सेमी है, पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है?

हल मान लीजिए कि घन की एक कोर की लंबाई x सेमी है। घन का आयतन V तथा घन के पृष्ठ का क्षेत्रफल S हो तो, $V = x^3$ तथा $S = 6x^2$ जहाँ x, समय t का अस्पष्ट फलन है।

अब $$\frac{dV}{dt} = 7 \text{ सेमी}^3/\text{से} \qquad \text{(दिया है)}$$

इसलिए, $$7 = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(x^3) = \frac{d}{dx}(x^3)\frac{dx}{dt} \qquad \text{(शृंखला नियम से)}$$

$$= 3x^2 \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dx}{dt} = \frac{7}{3x^2} \qquad (1)$$

अब $$\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(6x^2\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(6x^2)\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= 12x\left(\frac{7}{3x^2}\right) = \frac{28}{x} \qquad \text{[(1) के प्रयोग से]}$$

अतः जब $x = 12$,

$$\frac{dS}{dt} = \frac{7}{3} \text{ सेमी}^2/\text{से}$$

णी चूंकि अवकलज द्वारा परिवर्तन की दर प्रदर्शित है, यदि एक राशि बढ़ रही है तो समय के सापेक्ष अवकलज धनात्मक होता है और यदि राशि घट रही है तो इसका समय के सापेक्ष अवकलज ऋणात्मक है।

रण 5 किसी आयत की लंबाई x, 2 सेमी/से की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 सेमी/से की बढ़ रही है। जब $x = 12$ सेमी और $y = 5$, आयत (a) के परिमाप तथा (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की त कीजिए।

चूंकि लंबाई x घट रही है और चौड़ाई y बढ़ रही है, हम पाते हैं

$$\frac{dx}{dt} = -2 \text{ सेमी/से} \quad \text{और} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \text{ सेमी/से}$$

ायत की परिमाप P,

$$P = 2(x + y)$$

त्त है।

$$\frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) = 2(-2 + 2) = 0 \text{ सेमी/से}$$

ायत का क्षेत्रफल A,

$$A = x \cdot y$$

त्त है।

$$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)y + x\left(\frac{dy}{dt}\right)$$

$$= -2(5) + 2(12) \qquad \text{(क्योंकि } x = 12 \text{ सेमी और } y = 5 \text{ सेमी)}$$

$$= 14 \text{ सेमी}^2\text{/से।}$$

प्रश्नावली 11.1

वृत्त के क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर इसकी त्रिज्या r के सापेक्ष ज्ञात कीजिए जबकि $r = 5$ सेमी।

क गेंद का आयतन इसकी त्रिज्या के सापेक्ष किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 3 मीटर है?

त्त की त्रिज्या समान रूप से 3 सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है। ज्ञात कीजिए कि वृत्त का क्षेत्रफल किस र से बढ़ रहा है जब त्रिज्या 10 सेमी है।

न का आयतन 9 घन सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रहा है। पृष्ठ का क्षेत्रफल किस दर से बढ़ रहा है जबकि क कोर की लंबाई 10 सेमी है?

5. एक आयत की लंबाई x, 3 सेमी / मिनट की दर से घट रही है और चौड़ाई y, 2 सेमी / मिनट की दर से बढ़ रही है। जब $x = 10$ सेमी और $y = 6$ सेमी, आयत के (a) परिमाप (b) क्षेत्रफल के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

6. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, एक पंप से 900 घन सेमी गैस प्रति सेकंड भरकर फुलाया जाता है। गुब्बारे की त्रिज्या के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 15 सेमी है।

7. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, की त्रिज्या परिवर्तनशील है। त्रिज्या के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए जबकि त्रिज्या 10 सेमी है।

8. 5 मीटर लंबी सीढ़ी दीवार के सहारे झुकी है। सीढ़ी का नीचे का सिरा, जमीन के सहारे, दीवार से दूर 2 सेमी/से की दर से खींचा जाता है। दीवार पर इसकी ऊँचाई किस दर से घट रही है जबकि सीढ़ी के नीचे का सिरा दीवार से 4 मीटर दूर है।

9. एक कण वक्र $6y = x^3 + 2$ के अनुगत गति कर रहा है। वक्र पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जबकि x-निर्देशांक की तुलना में y-निर्देशांक 8 गुना बदल रहा है।

10. एक परिवर्तनशील घन की कोर 3 सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है। घन का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि कोर 10 सेमी लंबी है?

11. एक वृत्त की त्रिज्या 0.7 सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है। इसकी परिधि की वृद्धि दर क्या है जबकि $r = 4.9$ सेमी है?

12. एक हवा के बुलबुले की त्रिज्या $\frac{1}{2}$ सेमी प्रति सेकंड की दर से बढ़ रही है। बुलबुले का आयतन किस दर से बढ़ रहा है जबकि त्रिज्या 1 सेमी है?

13. एक गुब्बारा, जो सदैव गोलाकार रहता है, का परिवर्तनशील व्यास $\frac{3}{2}(2x+1)$ है। x के सापेक्ष आयतन के परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

14. एक पाइप से बालू 12 सेमी^{3}/से की दर से गिर रही है। गिरती हुई बालू जमीन पर एक ऐसा शंकु बनाती है जिसकी ऊँचाई सदैव आधार की त्रिज्या का छठा भाग है। बालू के शंकु की ऊँचाई किस दर से बढ़ रही है जबकि ऊँचाई 4 सेमी है?

11.3 स्पर्श रेखाएँ और अभिलंब (Tangents and Normals)

इस अनुच्छेद में, हम अवकलन के प्रयोग से एक वक्र के एक दिए बिंदु पर स्पर्श रेखा और अभिलंब के समीकरण ज्ञात करेंगे।

पुनः स्मरण कीजिए कि एक दिए बिंदु (x_0, y_0) से जाने वाली तथा m प्रवणता की रेखा का समीकरण

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

प्त है।

$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (= f'(x_0))$, वक्र $y = f(x)$ के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का ढाल है, इससे अनुसरित है कि (x_0, y_0) पर वक्र $y = f(x)$ की स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

ाप्त है।

, चूंकि अभिलंब स्पर्श रेखा पर लंबवत होता है, $y = f(x)$ के (x_0, y_0) पर अभिलंब का ढाल $\frac{-1}{f'(x_0)}$ । इसलिए, वक्र $y = f(x)$ के बिंदु (x_0, y_0) पर अभिलंब का समीकरण है:

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0$$

स्मरण कीजिए कि यदि $y = f(x)$ की कोई स्पर्श रेखा x-अक्ष की धन दिशा से θ कोण बनाएँ, तब

$$\frac{dy}{dx} = \text{स्पर्शी का ढाल (प्रवणता)} = \tan\theta$$

ाष्ट परिस्थितियाँ (Particular cases)

यदि स्पर्श रेखा का ढाल शून्य है, तब $\tan\theta = 0$ और इस प्रकार $\theta = 0$ जिसका अर्थ है कि स्पर्श रेखा क्ष के समांतर है। इस स्थिति में, (x_0, y_0) पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = y_0$ होगा।

यदि स्पर्श रेखा का ढाल $\pm\infty$ की ओर अग्रसर है, तब $\tan\theta \to \pm\infty$ और इस प्रकार $\theta \to \pm\frac{\pi}{2}$ जिसका है कि स्पर्श रेखा x-अक्ष के लंबवत् है अर्थात् y-अक्ष के समांतर है। इस स्थिति में (x_0, y_0) पर स्पर्श का समीकरण $x = x_0$ होगा।

हारण 6 ढाल -1 वाली सभी सरल रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-1}$ को स्पर्श ती हैं।

हल दिए वक्र के बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता (ढाल)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2}$$

से प्रदत्त है। परंतु ढाल -1 दिया है।
इसलिए

$$\frac{-1}{(x-1)^2} = -1$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad x-1 = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, 2$$

अब $x = 0$ से $y = -1$ तथा $x = 2$ से $y = 1$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, दिए वक्र की -1 ढाल वाली दो स्पर्श रेखाएँ हैं जो क्रमशः बिंदुओं (0, -1) तथा (2, 1) से जाती हैं।

अतः (0, -1) से जाने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y - (-1) = -1\,(x - 0)$$

$$\Rightarrow \quad y + x + 1 = 0$$

होगा।

तथा (2, 1) से जाने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण है :

$$y - 1 = -1\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow \quad y + x - 3 = 0$$

होगा।

उदाहरण 7 वक्र $y = x^3 - x + 1$ के उस बिंदु पर स्पर्श रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए जिसका x-निर्देशांक 2 है।

हल (x, y) पर दिए वक्र की स्पर्श रेखा का ढाल

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$$

से प्रदत्त है जिससे अभीष्ट ढाल

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=2} = 3\left(2^2\right)-1=11$$

होगा।

उदाहरण 8 वक्र $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब का ढाल ज्ञात कीजिए।

हल दिए वक्र की स्पर्श रेखा का ढाल

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$$

$$= \frac{3a\sin^2\theta\ \cos\theta}{-3a\ \cos^2\theta\ \sin\theta} = \frac{-\sin\ \theta}{\cos\ \theta}$$

इसलिए, दिए वक्र के अभिलंब का ढाल

$$\frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-1}{-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta \text{ है।}$$

अतः, दिए वक्र के $\theta = \frac{\pi}{4}$ पर अभिलंब का ढाल $\cot\frac{\pi}{4}$ अर्थात् 1 है।

उदाहरण 9 वक्र $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्श रेखाएँ

(i) x-अक्ष के समांतर हों (ii) y-अक्ष के समांतर हों।

हल दिए वक्र के किसी बिंदु पर (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{dy}{dx}$ है। $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं

$$\frac{2x}{9} - \frac{2y}{16}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{16x}{9y}$$

(i) अब, स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है यदि स्पर्श रेखा की प्रवणता शून्य है जिससे $\frac{16x}{9y} = 0$ यह संभव है यदि $x = 0$ तब $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ से $x = 0$ पर $y^2 = -16$ अर्थात् $y = \pm 4i$ इस प्रकार, कोई वास्तविक बिंदु नहीं है जिस पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है।

(ii) स्पर्श रेखा y-अक्ष के समांतर है यदि स्पर्श रेखा की प्रवणता $\pm\infty$ है अर्थात् अभिलंब की प्रवणता शून्य है जिससे $\frac{-9y}{16x} = 0$ मिलता है अर्थात् $y = 0$, इस प्रकार, $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ से $y = 0$ पर $x = \pm 3$ मिलता है। अतः वह बिंदु $(3, 0)$ और $(-3, 0)$ हैं जहाँ पर स्पर्श रेखाएँ y-अक्ष के समांतर हैं।

उदाहरण 10 वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिंदु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

हम पाते हैं

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}.$$

तथा $(1, 1)$ पर स्पर्शी की प्रवणता $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,1)} = -1$ है जिससे $(1, 1)$ पर स्पर्शी का समीकरण

$$y - 1 = -1\,(x - 1)$$

$$\Rightarrow \qquad y + x - 2 = 0 \text{ है।}$$

तथा $(1, 1)$ पर अभिलंब की प्रवणता

$$\frac{-1}{(1, 1) \text{ पर स्पर्शी की प्रवणता}} = \frac{-1}{-1} = 1$$

से प्राप्त है। इसलिए, (1, 1) पर अभिलंब का समीकरण होगा :

$$y - 1 = 1\,(x - 1) \qquad \text{या} \qquad y - x = 0$$

उदाहरण 11 वक्र $y = x^2 - 2x + 7$ की स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(a) रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर है।

(b) रेखा $5y - 15x = 13$ के लंबवत है।

हल $y = x^2 - 2x + 7$ का x के सापेक्ष अवकलन करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 2 \qquad (1)$$

(a) दी रेखा $2x - y + 9 = 0$ की प्रवणता 2 है। चूंकि स्पर्श रेखा इस रेखा के समांतर है, स्पर्श रेखा की प्रवणता भी 2 हुई क्योंकि समांतर रेखाओं की प्रवणताएँ समान होती हैं। इसलिए (1) से, हम पाते हैं

$$2x - 2 = 2, \text{ अर्थात् } x = 2$$

तब, वक्र पर $x = 2$ के संगत बिंदु का y-निर्देशांक $y = (2)^2 - 2(2) + 7 = 7$ है। इसलिए, बिंदु (2, 7) है। अतएव, दिए वक्र की दी रेखा $2x - y + 9 = 0$ के समांतर रेखा का समीकरण

$$y - 7 = 2\,(x - 2)$$

$$\Rightarrow \qquad y - 2x - 3 = 0 \text{ है।}$$

(b) दी रेखा $5y - 15x = 13$ की प्रवणता 3 के बराबर है। इसलिए, दी रेखा के लंबवत स्पर्श रेखा की प्रवणता $= \frac{-1}{3}$, जिससे (1) से $2x - 2 = \frac{-1}{3}$, अर्थात् $x = \frac{5}{6}$ मिलता है। तब, $x = \frac{5}{6}$ के लिए वक्र पर y-निर्देशांक

$$y = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) + 7 = \frac{217}{36}$$

है।

इस प्रकार, $5y - 15x = 13$ के लंबवत $\left(\frac{5}{6}, \frac{217}{36}\right)$ से जाने वाली स्पर्श रेखा का समीकरण होगा :

$$y - \frac{217}{36} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{5}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad 36y - 217 = -12x + 10$$

प्रश्नावली 11.2

1. वक्र $y = x^3 - 3x + 2$ की स्पर्श रेखाओं के ढाल उस बिंदु पर ज्ञात कीजिए जिन पर x-निर्देशांक 3 है।

2. वक्र $x = 1 - a\sin\theta,\ y = b\cos^2\theta$ के $\theta = \frac{\pi}{2}$ पर अभिलंब का ढाल ज्ञात कीजिए।

3. ढाल 2 वाली सभी रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x-3}$ को स्पर्श करती हैं।

4. ढाल 0 वाली सभी रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो वक्र $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$ को स्पर्श करती हैं।

5. वक्र $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्शियाँ (i) x-अक्ष के समांतर हैं (ii) y-अक्ष के समांतर हैं।

6. दिए वक्रों के दिए बिंदुओं पर स्पर्शी और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए–

   (i) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, के $(0, 5)$ पर

   (ii) $y = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 10x + 5$, के $(1, 3)$ पर

   (iii) $y = x^3$ के $(1, 1)$ पर (iv) $y = x^3$ के $(2, 8)$ पर

   (v) $y = x^2$ के $(0, 0)$ पर (vi) $x = \cos t,\ y = \sin t$ के $t = \frac{\pi}{4}$ पर

   (vii) $16x^2 + 9y^2 = 144$ के (x, y) पर जहाँ $x_1 = 2$ और $y_1 > 0$ पर

   (viii) $y^2 = \frac{x^3}{4-x}$ के $(2, -2)$ पर

7. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के (x_1, y_1) पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए।

8. दिखाइए कि वक्र $y = 7x^3 + 11$ पर जहाँ $x = 2$ और $x = -2$ हैं, स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

9. वक्र $y = x^3$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्शी का ढाल बिंदु के y-निर्देशांक के बराबर है

10. वक्र $y = 4x^3 - 2x^5$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर स्पर्शियाँ मूल बिंदु से होकर जाती हैं

11. वक्र $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ के उन बिंदुओं पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ पर स्पर्शियाँ x-अक्ष के समांतर हैं।

12. वक्र $ay^2 = x^3$ के बिंदु (am^2, am^3) पर अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

13. वक्र $y = x^3 + 2x + 6$ के अभिलंबों का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x + 14y + 4 = 0$ के समांतर हैं।

14. परवलय $y^2 = 4ax$ के $(at^2, 2at)$ पर स्पर्शी और अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

15. सिद्ध कीजिए कि वक्र $x = y^2$ और $xy = k$ समकोण पर काटते हैं यदि $8k^2 = 1$

16. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिंदु (x_0, y_0) पर स्पर्शी तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. वक्र $y = \sqrt{3x-2}$ की स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x - 2y + 5 = 0$ के समांतर हैं।

11.4 वर्धमान (Increasing) और ह्रासमान (Decreasing) फलन

इस अनुच्छेद में, हम अवकलन का प्रयोग करके यह ज्ञात करेंगे कि फलन वर्धमान है या ह्रासमान है या कोई नहीं।

वर्धमान एवं ह्रासमान फलनों के सिद्धांत की व्याख्या के लिए आइए हम सारणी 11.1 पर विचार करें। यह सारणी पाँच कंपनियों (A, B, C, D और E) की वर्ष 2001 में कार की बिक्री का विवरण प्रस्तुत करती हैं।

सारणी 11.1 : वर्ष 2001 में विभिन्न कंपनियों की कारों की बिक्री को प्रदर्शित करने की सारणी

माह	विभिन्न कंपनियों की वर्ष 2001 में कारों की बिक्री (हजारों में)				
	A	B	C	D	E
जनवरी	1.00	0.75	1.70	1.00	1.25
फरवरी	1.20	1.00	1.65	0.95	1.50
मार्च	1.20	1.25	1.60	0.94	1.50
अप्रैल	1.60	1.50	1.50	0.92	1.25
मई	1.70	1.75	1.40	0.90	1.25
जून	1.70	2.00	1.40	0.88	1.60
जुलाई	1.80	2.20	1.40	0.87	1.65
अगस्त	1.80	2.30	1.30	0.86	1.15
सितंबर	1.90	2.40	1.30	0.85	1.18
अक्तूबर	2.00	2.50	1.20	0.80	1.28
नवंबर	2.25	2.60	1.20	0.75	1.32
दिसंबर	2.50	2.75	1.00	0.70	1.50

यहाँ प्रेक्षण करते हैं कि A और B कंपनियाँ की बिक्री वर्धमान क्रम दिखाती हैं जिससे इन दोनों कंपनियो की वर्ष 2001 में कारों की बिक्री प्रदर्शित करने वाले फलन वर्धमान फलन है तथा हम प्रेक्षण कर सकते हैं कि C और D की कारों की बिक्री ह्रासमान क्रम में है और इस प्रकार इन दोनों कंपनियों की वर्ष 2001 में, कारों की बिक्री प्रदर्शित करने वाला फलन ह्रासमान फलन हैं। तथापि, E कंपनी की कारों की बिक्री एक भिन्न प्रवृत्ति प्रदर्शित करती है। प्रथम तीन माह में यह वर्धमान प्रवृत्ति दर्शाती है और अगले दो माह में यह ह्रासमान प्रवृत्ति दर्शाती है इत्यादि। इसी कारण इस कंपनी की वर्ष 2001 में, कारों की बिक्री प्रदर्शित करने वाला फलन न तो वर्धमान ही है और न ह्रासमान ही।

इसके अतिरिक्त यह प्रेक्षण किया जा सकता है कि B की बिक्री संपूर्ण वर्ष एक निरंतर वर्धमान प्रवृत्ति (strictly increasing trend) दर्शाती है तथा D की बिक्री संपूर्ण वर्ष एक सुनिश्चित ह्रासमान प्रवृत्ति दर्शाती है। इन्हीं कारणों से वर्ष 2001 में B कंपनी की बिक्री का फलन निरंतर वर्धमान फलन के रूप में और D कंपनी की 2001 की बिक्री का फलन निरंतर ह्रासमान फलन के रूप में समझा जाता है।

हम अब इस प्रकार के फलनों को विधिवत परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 1 मान लीजिए अंतराल I पर परिभाषित फलन f है और अंतराल I में दो बिंदु x_1 और x_2 हैं तब f कहा जाता है :

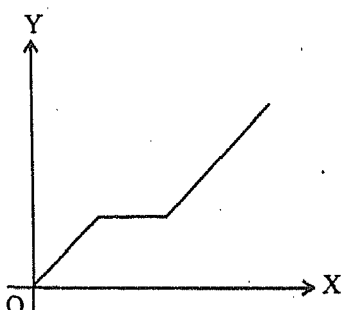
(I) अंतराल I में वर्धमान, यदि $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

(II) अंतराल I में निरंतर वर्धमान, यदि $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

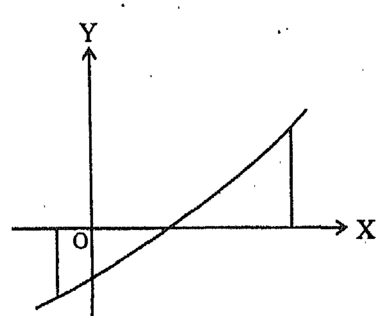
(III) अंतराल I में ह्रासमान, यदि $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

(IV) अंतराल I में निरंतर ह्रासमान, यदि $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

इस प्रकार के फलनों का आलेखीय प्रदर्शन (आकृति 11.1 और 11.2):

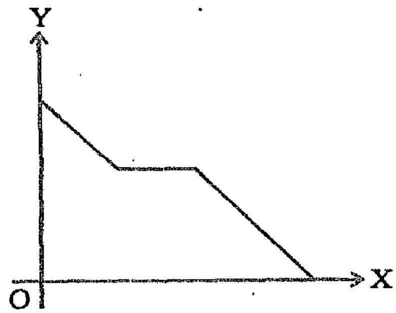


वर्धमान फलन
(i)

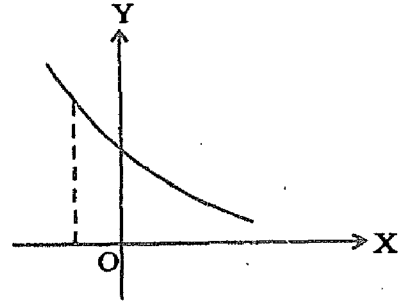


निरंतर वर्धमान फलन
(ii)

आकृति 11.1

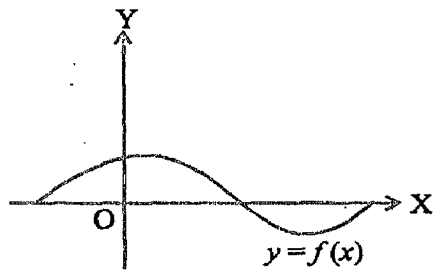


ह्रासमान फलन
(iii)



निरंतर ह्रासमान फलन
(iv)

आकृति 11.1



न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान फलन
आकृति 11.2

हम अब एक बिंदु पर वर्धमान अथवा ह्रासमान फलन को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा 2 मान लीजिए f एक फलन है जिसके प्रांत में एक विवृत अंतराल $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ में एक बिंदु x_0 है। तब,

(i) f, x_0 पर *वर्धमान* कहा जाता है यदि

(a) I में $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \le f(x)$

तथा (b) I में $x_0 > x \Rightarrow f(x_0) \ge f(x)$

(ii) f, x_0 पर *ह्रासमान* कहा जाता है यदि

(a) I में $x_0 < x \Rightarrow f(x_0) \ge f(x)$

तथा (b) I में $x_0 > x \Rightarrow f(x_0) \le f(x)$

उदाहरण 12 दिखाइए कि फलन **R** पर $f(x) = 2x + 3$ एक निरंतर वर्धमान फलन है।

हल मान लीजिए **R** में x_1 और x_2 कोई संख्याएँ हैं, तब

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2$$

$$\Rightarrow 2x_1 + 3 < 2x_2 + 3$$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

इस प्रकार, परिभाषा 1 (ii) से, यह अनुसरित होता है कि **R** पर f पर एक *निरंतर वर्धमान* फलन है।

उदाहरण 13 दिखाइए फलन $f(x) = x^2$

(a) $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान फलन है।

(b) $(-\infty, 0)$ में निरंतर ह्रासमान फलन है।

हल (a) मान लीजिए $(0, \infty)$ में x_1 और x_2 कोई दों संख्याएँ हैं। यदि $x_1 < x_2$, तब

$$x_1 . x_1 < x_1 . x_2 < x_2 . x_2$$

$$\Rightarrow \quad {x_1}^2 < x_1 . x_2 < {x_2}^2$$

$$\Rightarrow \quad {x_1}^2 < {x_2}^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2)$$

अतः $(0, \infty)$ पर f एक निरंतर वर्धमान फलन है।

(b) मान लीजिए $(-\infty, 0)$ में x_1 और x_2 कोई दो संख्याएँ हैं। यदि $x_1 < x_2$, तब

$$x_1 . x_1 > x_2 . x_1 \qquad (\text{चूंकि } x_1 < 0)$$

$$> x_2 . x_2 \qquad (\text{चूंकि } x_2 < 0)$$

$$\Rightarrow \quad {x_1}^2 > {x_2}^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x_1) > f(x_2)$$

इस प्रकार, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

अतः $(-\infty, 0)$ में f एक निरंतर ह्रासमान फलन है।

अब हम दर्शाएंगे कि वर्धमान और ह्रासमान फलनों का अध्ययन अवकलज की सहायता से करेंगे। हम वर्धमान और ह्रासमान फलनों के लिए नीचे *प्रथम अवकलज परीक्षण* प्रस्तुत करते हैं। हम उल्लेख करना चाहते हैं कि इस परीक्षण की उपपत्ति में माध्यमान प्रमेय (mean value theorem) का प्रयोग होगा जिसका अध्ययन इस अध्याय के बाद में किया जाएगा।

प्रमेय 1 मान लीजिए $[a, b]$ पर f संतत और विवृत्त अंतराल (a, b) पर अवकलनीय है। तब

(a) $[a, b]$ पर f वर्धमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$

(b) $[a, b]$ पर f ह्रासमान है यदि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) < 0$

उपपत्ति (a) दिया है कि प्रत्येक $x \in (a, b)$ के लिए, $f'(x) > 0$ मान लीजिए $x_1, x_2 \in (a, b)$ जिससे $x_1 < x_2$ तब माध्यमान प्रमेय (प्रमेय 7) से x_1 और x_2 के मध्य एक बिंदु c का अस्तित्व है जिससे

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) > 0 \qquad (\text{चूँकि } f'(c) > 0)$$

$$\Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

इस प्रकार, हम पाते हैं :

$[a, b]$ के सभी x_1, x_2 के लिए,

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

अतः, $[a, b]$ में f एक वर्धमान फलन है।

(b) (a) की भाँति यह अनुसरित होता है। पाठकों के लिए इसे अभ्यास हेतु छोड़ा जाता है।

उदाहरण 14 सिद्ध कीजिए कि **R** पर चर घातांकी फलन e^x निरंतर वर्धमान फलन है।

हल मान लीजिए $f(x) = e^x$ है तब $f'(x) = e^x$. चूंकि $x > 0$ के लिए, $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots > 1$

हम पाते हैं $x > 0$ के लिए $f'(x) = e^x > 0$.

तथा, यदि $x < 0$, तब

$$f'(x) = e^x = \frac{1}{e^{-x}} = \frac{1}{\text{एक धनराशि}} = \text{एक धनराशि}$$

इस प्रकार, सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए, $f'(x) > 0$

अतः **R** पर e^x एक निरंतर वर्धमान फलन है।

उदाहरण 15 सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \sin x$

(a) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

तथा (c) $(0, \pi)$ में न तो वर्धमान और न ही ह्रासमान है।

हल हम जानते हैं कि $f'(x) = \cos x$

(a) चूंकि प्रत्येक $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ के लिए, $\cos x > 0$, हम पाते हैं $f'(x) > 0$ और इस प्रकार $f, \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ में निरंतर वर्धमान है।

(b) चूंकि प्रत्येक $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\cos x < 0$, हम पाते हैं $f'(x) < 0$ और इस प्रकार, $f, \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ में निरंतर ह्रासमान है।

(c) उपर्युक्त (a) और (b) के परिप्रेक्ष्य में यह स्वयं अनुसरित होता है।

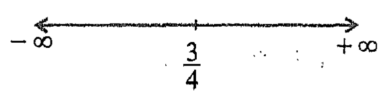
उदाहरण 16 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^2 - 3x$ से प्रदत्त फलन f, (a) निरंतर वर्धमान (b) निरंतर ह्रासमान है।

हल हम पाते हैं :

$$f(x) = 2x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 4x - 3$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से $x = \frac{3}{4}$ से प्राप्त होता है। बिंदु $x = \frac{3}{4}$ वास्तविक रेखा को दो असंयुक्त अंतरालों, नामतः $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ और $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$, में विभक्त करता है। अंतराल $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ में, $f'(x) = 4x - 3 < 0$ इसलिए, इस अंतराल में



आकृति 11.3

f निरंतर ह्रासमान है। तथा अंतराल में $\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$ में, $f'(x) > 0$ और इस प्रकार इस अंतराल में फलन f निरंतर वर्धमान है (आकृति 11.3)।

उदाहरण 17 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$ से प्रदत्त फलन f, (a) निरंतर वर्धमान (b) निरंतर ह्रासमान है।

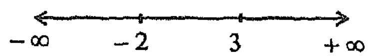
हल हम पाते हैं

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 7$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2 - 6x - 36$$

$$= 6(x^2 - x - 6) = 6(x - 3)(x + 2)$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से $x = 3, -2$ प्राप्त होता है। $x = -2$ और $x = 3$ वास्तविक रेखा को तीन असंयुक्त अंतरालों, नामत: $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ और $(3, \infty)$ (आकृति 11.4) में विभक्त करते हैं।



आकृति 11.4

अंतरालों $(-\infty, -2)$ और $(3, \infty)$ में $f'(x)$ धनात्मक है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में ऋणात्मक है। निष्कर्षत: फलन f अंतराल $(-\infty, 2)$ और $(3, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है जबकि अंतराल $(-2, 3)$ में फलन निरंतर ह्रासमान है। अत: f, **R** पर न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।

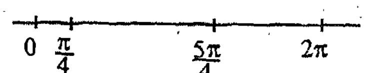
उदाहरण 18 अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें $f(x) = \sin x + \cos x$, $0 \le x \le 2\pi$ द्वारा प्रदत्त फलन f, वर्धमान या ह्रासमान है।

हल ज्ञात है कि

$$f(x) = \sin x + \cos x, \; 0 \le x \le 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \cos x - \sin x$$

अब, $f'(x) = 0$ से $\sin x = \cos x$ जिससे $x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ प्राप्त होते हैं (आकृति 11.5), जहाँ $0 \le x \le 2\pi$



आकृति 11.5

ध्यान दीजिए कि

$$f'(x) > 0, \text{ यदि } x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$$

$\Rightarrow$ f अंतरालों $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ और $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$ में वर्धमान है।

और $f'(x) < 0$, यदि $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow$ f अंतराल $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$ में ह्रासमान है।

प्रश्नावली 11.3

1. अवकलज का प्रयोग किए बिना दर्शाइए कि **R** पर फलन $f(x) = 7x - 3$ एक निरंतर वर्धमान फलन है।
2. अवकलज का बिना प्रयोग किए सिद्ध कीजिए कि x के सभी वास्तविक मांनों के लिए $f(x) = ax + b$ a और b अचर हैं तथा $a > 0$, एक निरंतर वर्धमान फलन है।
3. अवकलज का बिना प्रयोग किए दर्शाइए कि फलन $f(x) = |x|$

   (a) $(0, \infty)$ में निरंतर वर्धमान है। (b) $(-\infty, 0)$ में निरंतर ह्रासमान है।
4. दिखाइए कि **R** पर $f(x) = e^{2x}$ से प्रदत्त फलन निरंतर वर्धमान है।
5. दिखाइए कि $f(x) = \cos x$ से प्रदत्त फलन

   (a) $(-\pi, 0)$ में निरंतर वर्धमान है। (b) $(0, \pi)$ में निरंतर ह्रासमान है।

   तथा (c) $(-\pi, \pi)$ में न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान है।
6. अंतराल ज्ञात कीजिए जिनमें निम्नलिखित फलन निरंतर वर्धमान या ह्रासमान हैं :

   (a) $x^2 + 2x - 5$ (b) $10 - 6x - 2x^2$ (c) $-2x^3 - 9x^2 - 12x$

   (d) $6 - 9x - x^2$ (e) $(x+1)^3 (x-3)^3$
7. दिखाइए कि $x > -1$ के सभी मानों के लिए $y = \log(1+x) - \frac{2x}{2+x}$, x का एक वर्धमान फलन है।
8. x के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए $y = [x(x-2)]^2$ वर्धमान है।

9. सिद्ध कीजिए कि $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में $y = \frac{4\sin\theta}{(2+\cos\theta)} - \theta$, θ का एक वर्धमान फलन है।

10. सिद्ध कीजिए कि लघुगणकीय फलन, जहाँ कहीं भी परिभाषित है, एक निरंतर वर्धमान फलन है।

11. सिद्ध कीजिए कि **R** पर $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 100$ से प्रदत्त फलन f एक निरंतर वर्धमान फलन है।

12. सिद्ध कीजिए कि $(-1, 1)$ पर $f(x) = x^2 - x + 1$ से प्रदत्त फलन f न तो वर्धमान है और न ही ह्रासमान।

13. निम्नलिखित में कौन-से फलन $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर निरंतर ह्रासमान है?

    (a) $\cos x$ (b) $\cos 2x$ (c) $\cos 3x$ (d) $\tan x$

14. निम्नलिखित अंतरालों में से किस पर $f(x) = x^{100} + \sin x - 1$ से प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान है?

    (a) $(-1, 1)$ (b) $(0, 1)$ (c) $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ (d) $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

15. a का सबसे कम मान ज्ञात कीजिए जिससे $(1,2)$ पर $f(x) = x^2 + ax + 1$ से प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान है।

16. मान लीजिए $(-1, 1)$ से असंयुक्त एक अंतराल I हो तो सिद्ध कीजिए कि I पर $f(x) = x + \frac{1}{x}$ से प्रदत्त फलन f निरंतर वर्धमान है।

17. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \log \sin x$, $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ पर निरंतर वर्धमान और $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ पर निरंतर ह्रासमान है।

18. दिखाइए कि सभी x के लिए $f(x) = 10^x$ से प्रदत्त फलन f वर्धमान है।

11.5 उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ (Maxima and Minima)

इस अनुच्छेद में, हम फलनों के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान की गणना करने में अवकलन को प्रयोग में लाएंगे।

आइए हम निम्नलिखित तीन समस्याओं पर विचार करें जो व्यावहारिक परिस्थितियों में उत्पन्न होती हैं:

समस्या 1 एक कंपनी अनुभव करती है कि यदि उसका उत्पादन कम होता है तो उसका लाभ भी कम होता है। यदि वह अत्यधिक उत्पादन करती है तो वह सामान को बेचने में असमर्थ होती है और इसलिए कोई लाभ नहीं होता है। वह अधिकतम लाभ कमाना चाहती है। यह अनुभव करती है कि लाभ समीकरण $p(x) = 41 - 24x - 18x^2$ से प्रदत्त है जहाँ x उत्पाद की मात्रा है। अधिकतम लाभ क्या है जो कंपनी कमाना चाहती है? यह कितने माल का उत्पादन करे कि जिससे अधिकतम लाभ प्राप्त हो?

समस्या 2 शत्रु का एक जैट वक्र $y = x^2 + 2$ के अनु उड़ रहा है। बिंदु $(3, 2)$ पर खड़ा एक सैनिक इसे गिराना चाहता है जबकि यह उससे निकटतम हो। वह निकटतम दूरी क्या है?

समस्या 3 सूत्र $s = at - bt^2$, जहाँ a और b अचर हैं, के अंतर्गत ऊपर की ओर गतिमान गेंद द्वारा प्रा महत्तम ऊँचाई क्या है?

इन तीनों समस्याओं में कुछ सर्वसामान्य है। हम इनमें से प्रत्येक में दिए फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्नि मान ज्ञात करना चाहते हैं।

परिभाषा 3 मान लीजिए एक अंतराल I में एक फलन f परिभाषित है, तब

(a) I में f का *उच्चिष्ठ मान* कहा जाता है यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व है जिस $f(c) \geq f(x), \forall x \in \text{I}$

संख्या $f(c)$ को I में f का *उच्चिष्ठ मान* कहते हैं और बिंदु c, I में f का *उच्चिष्ठ मान वाला बि* कहा जाता है।

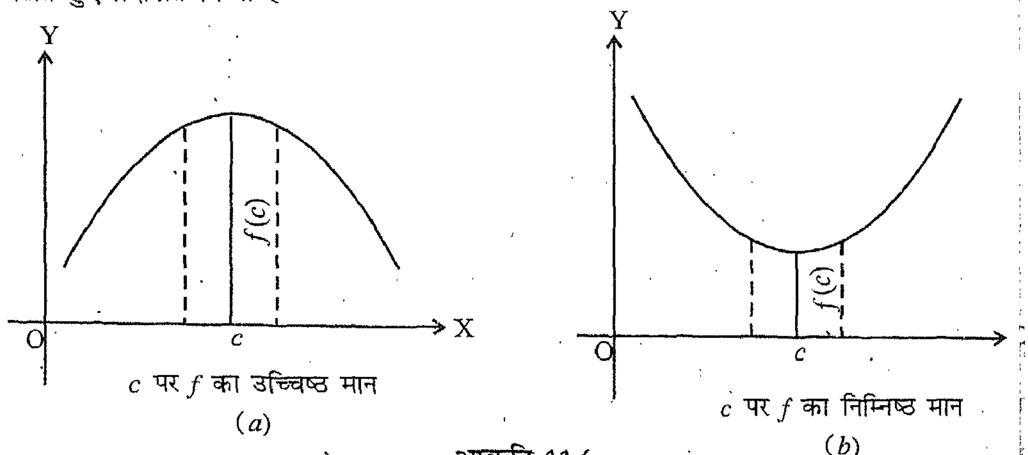
(b) I में f का *निम्निष्ठ मान* कहा जाता है यदि I में एक बिंदु c का अस्तित्व है जिस $f(c) \leq f(x), \forall x \in \text{I}$

संख्या $f(c)$ को I में f का *निम्निष्ठ मान* कहते हैं और बिंदु c, I में f का *निम्निष्ठ मान* वाला बि कहा जाता है।

(c) I में f एक *चरम मान* (extreme value) रखने वाला कहा जाता है यदि I में एक बिंदु c का अस्ति है जिससे I में $f(c)$, f का या तो उच्चिष्ठ मान अथवा निम्निष्ठ मान है।

इस स्थिति में संख्या $f(c)$, I में f का चरम मान कहलाता है और बिंदु c एक चरम बिंदु कहलाता

आकृति 11.6 (a) और (b), में हमने निश्चित विशिष्ट फलन को एक बिंदु पर उच्चिष्ठ मान तथा निम्नि मान रखते हुए प्रदर्शित किया है –



आकृति 11.6

कुछ फलनों की स्थिति में कलन का प्रयोग किए बिना फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात करना कठिन नहीं होता है जो निम्नलिखित उदाहरणों में देखा जा सकता है।

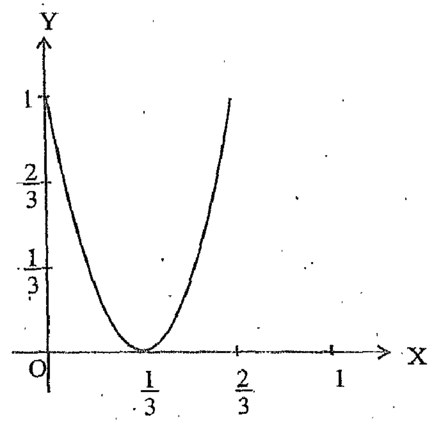
उदाहरण 19 $f(x) = 9x^2 - 6x + 1, x \in \mathbf{R}$ से प्रदत्त फलन f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान; यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिया हुआ फलन है :

$$f(x) = 9x^2 - 6x + 1, x \in \mathbf{R}$$

$$= (3x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$$

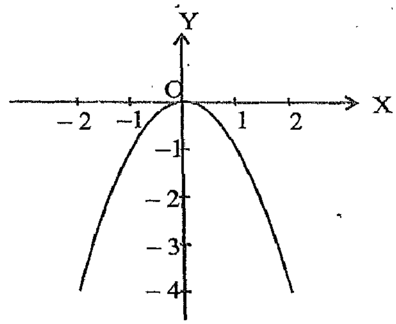
अतः, $f(x) = 0$ यदि $x = \frac{1}{3}$ है। इसलिए, f का निम्निष्ठ मान 0 है और f के निम्नतम मान वाला बिंदु $x = \frac{1}{3}$ है (आकृति 11.7)। इसके अतिरिक्त f का कोई उच्चिष्ठ मान नहीं है और इसलिए, $\mathbf{R}$ में f का कोई उच्चिष्ठ बिंदु नहीं है।



$y = 9x^2 - 6x + 1$
आकृति 11.7

उदाहरण 20 $f(x) = -x^2, x \in \mathbf{R}$ से प्रदत्त फलन f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान, यदि कोई हों तो, ज्ञात कीजिए।

हल सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए दिया फलन धनात्मक नहीं है। इसलिए, f का उच्चिष्ठ मान 0 है और $x = 0$, f का उच्चिष्ठ मान वाला बिंदु है (आकृति 11.8)। इसके अतिरिक्त, अंकित कीजिए कि R में f का कोई निम्निष्ठ मान नहीं है और इसलिए $\mathbf{R}$ में f के निम्निष्ठ मान वाला कोई बिंदु नहीं है।

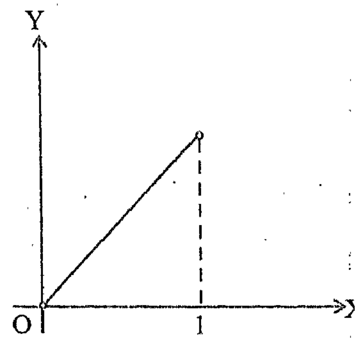


$y = -x^2$
आकृति 11.8

उदाहरण 21 $f(x) = x, x \in (0,1)$ से प्रदत्त फलन f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान, यदि कोई हो तो, ज्ञात कीजिए।

हल दिए अंतराल (0, 1) में दिया फलन एक वर्धमान फलन है। इसलिए फलन का निम्निष्ठ मान 0 के दाईं ओर निकटतम बिंदु पर तथा उच्चिष्ठ मान 1 के बाईं ओर निकटतम बिंदु पर होना चाहिए। क्या ऐसे बिंदु उपलब्ध हैं? वास्तव में नहीं। ऐसे बिंदुओं को अंकित करना संभव नहीं है (आकृति 11.9)। इसलिए, अंतराल (0, 1) में फलन का न तो कोई उच्चिष्ठ मान है और न निम्निष्ठ मान ही।

टिप्पणी पाठकगण प्रेक्षण कर सकते हैं कि यदि उदाहरण 21 में f का क्षेत्र बढ़ाकर [0, 1] कर दिया जाए तो फलन का निम्निष्ठ मान $x = 0$ पर 0 तथा उच्चिष्ठ मान $x = 1$ पर 1 है अर्थात् हम विवृत्त अंतराल (0, 1) के स्थान पर संवृत्त अंतराल [0, 1] लें। हम वास्तव में निम्नलिखित परिणाम पाते हैं :



y = x, (0, 1) में

आकृति 11.9

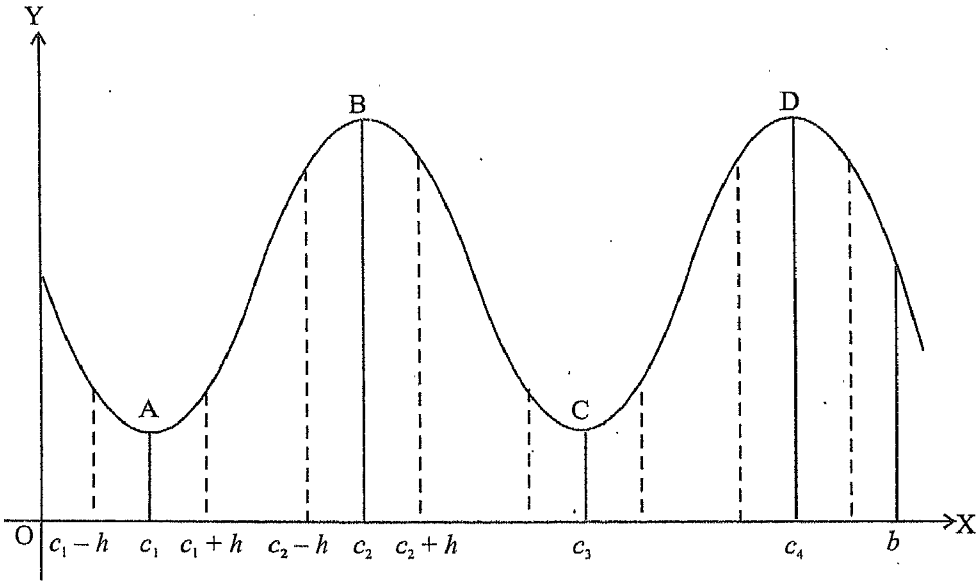
"*प्रत्येक एकदिष्ट (monotonic) फलन में, फलन की परिभाषा के प्रांत के अन्य बिंदुओं पर उच्चिष्ठ / निम्निष्ठ की संकल्पना की जाती है।*"

अधिक व्यापक रूप से,- "*संवृत्त अंतराल पर प्रत्येक संतत फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान होते हैं।*"

इस परिणाम की उपपत्ति वर्तमान पाठ्यक्रम के क्षेत्र में नहीं है।

इस अनुच्छेद में एक संवृत्त पर परिभाषित फलन के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मानों के बारे में अतिरिक्त विचार बाद में किया जाएगा।

आइए अब आकृति 11.10 में दर्शाए फलन ϕ के आलेख का परीक्षण करें। प्रेक्षण कीजिए कि फलन ϕ बिंदुओं A, B, C और D पर वर्धमान से ह्रासमान या विलोमतः अपनी प्रकृति बदलता है। ये बिंदु फलन ϕ के *वर्तन बिंदु (turning points)* कहलाते हैं।



आकृति 11.10

आइए हम $x = c_1$ के संगत बिंदु A पर विचार करें। विवृत्त अंतराल $(c_1 - h, c_1 + h)$ $(h > 0)$ में अंतर्विष्ट c_1 पर विचार करें। यदि हम ϕ के प्रांत को अंतराल $(c_1 - h, c_1 + h) \subset (0, c_2)$, $(h > 0)$, तक सीमित करें तो $\phi(c_1)$, ϕ का निम्निष्ठ मान है और c_1 इस अंतराल में निम्निष्ठ मान वाला बिंदु है।

इसी प्रकार, $x = c_2$ के संगत बिंदु B के लिए, आइए हम विवृत्त अंतराल $(c_2 - h, c_2 + h) \subset (c_1, c_3)$, $(h > 0)$, में अंतर्विष्ट c_2 पर विचार करें। पुनः यदि हम फलन ϕ के प्रांत को $(c_2 - h, c_2 + h)$ तक सीमित करें तो हम पाते हैं कि ϕ का उच्चिष्ठ मान $\phi(c_2)$ है और c_2 इस अंतराल में ϕ के उच्चिष्ठ मान वाला बिंदु है।

इसी तरह, आकृति 11.10 में आलेख से प्रेक्षण किया जा सकता है कि $x = c_3$ के संगत बिंदु C के अंतराल $(c_3 - h, c_3 + h) \subset (c_2, c_4)$, $(h > 0)$, में ϕ के निम्निष्ठ मान वाला बिंदु है जिस पर निम्निष्ठ मान $\phi(c_3)$ है और $x = c_4$ के संगत बिंदु D अंतराल $(c_4 - h, c_4 + h) \subset (c_3, b)$, $(h > 0)$ में ϕ के महत्तम मान वाला बिंदु है जिस पर महत्तम मान $\phi(c_4)$ है।

फलन f के A और C सदृश बिंदु, '*स्थानीय निम्निष्ठ मान*' (*local minimum value*) वाले बिंदु हैं जबकि B और D सदृश बिंदु '*स्थानीय उच्चिष्ठ मान*' (*local maximum value*) वाले बिंदु समझे जा सकते हैं। इन मानों को क्रमशः '*स्थानीय निम्निष्ठ*' और '*स्थानीय उच्चिष्ठ*' उल्लेखित किया जाता है। हम अंकित कर सकते हैं कि स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ वाले बिंदु एक अंतराल के अन्त्य बिंदु नहीं हो सकते हैं अपितु अभ्यंतर बिंदु है। चूंकि एक बिंदु C, को स्थानीय निम्निष्ठ अथवा स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदु सुनिश्चित करने के लिए हमें विवृत्त पर्याप्त (छोटा) अंतराल $(c - h, c + h)$ $(h > 0)$ में आलेख के व्यवहार को देखने की आवश्यकता होती है।

स्थूल रूप से, $f(c)$, c पर f का स्थानीय उच्चिष्ठ मान है यदि f के आलेख में बिंदु c के आस-पास *थोड़ी पहाड़ी* जैसा हो। इसी प्रकार, $f(c)$, c पर f का स्थानीय निम्निष्ठ मान है। आकृति 11.10 में ध्यान दीजिए कि आलेख में A और C के पास थोड़ी घाटी जैसा देखा जा सकता है तथा B और D के पास थोड़ी पहाड़ी जैसा देखा जा सकता है।

परिभाषा 4 मान लीजिए f एक वास्तविक मानीय फ़लन है और c_0, f के क्षेत्र में एक अभ्यंतर बिंदु है। तब

(a) c_0 *स्थानीय उच्चिष्ठ* का बिंदु कहा जाता है यदि ऐसा $h > 0$ संभव है जिससे

$(c_0 - h, c_0 + h)$ में सभी x के लिए, $f(c_0) \geq f(x)$

मान $f(c_0)$, f का *स्थानीय उच्चिष्ठ मान* कहलाता है।

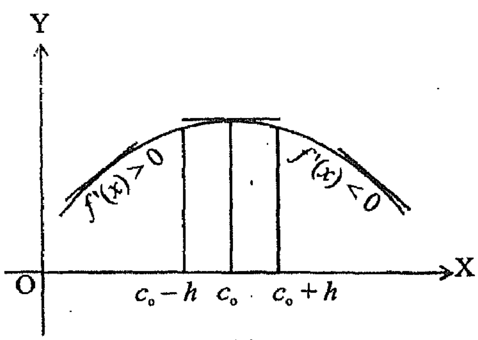
(b) c_0 *स्थानीय निम्निष्ठ* का बिंदु कहा जाता है यदि ऐसा $h > 0$ संभव है जिससे

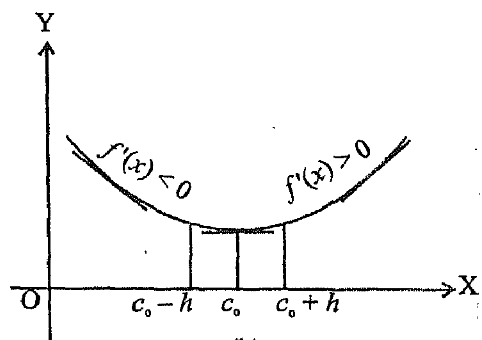
$(c_0 - h, c_0 + h)$ में सभी x के लिए, $f(c_0) \leq f(x)$

मान $f(c_0)$, f का *स्थानीय निम्निष्ठ मान* कहलाता है।

ज्यामितीय दृष्टिकोण से, उपर्युक्त परिभाषा बताती है कि c_0, f के स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है, तो c_0 के आसपास का आलेख आकृति 11.11 (a) में दिखाए गए जैसा होगा। ध्यान दीजिए कि अंतराल $(c_0 - h, c_0)$ में फलन f वर्धमान (अर्थात्, $f'(x) > 0$) और अंतराल $(c_0, c_0 + h)$ में फलन ह्रासमान (अर्थात्, $f'(x) < 0$) है। यह प्रस्तावित करता है कि $f'(c_0)$ शून्य होना चाहिए।

इसी प्रकार, यदि c_0, f के स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है तो c_0 के आसपास का आलेख आकृति 11.11 (b) में दिखाए जैसा होगा। यहाँ अंतराल $(c_0 - h, c_0)$ में f ह्रासमान (अर्थात्, $f'(x) < 0$) और अंतराल $(c_0, c_0 + h)$ में f वर्धमान (अर्थात्, $f'(x) > 0$) है। यह पुनः प्रस्तावित करता है कि $f'(c_0)$ शून्य होना चाहिए।





आकृति 11.11

उपर्युक्त विवेचना के परिप्रेक्ष्य में, हम स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित परिणाम (बिना उपपत्ति) के प्रस्तुत करते हैं –

प्रमेय 2 (प्रथम अवकलज परीक्षण) : मान लीजिए एक अंतराल I पर f एक अवकलनीय फलन परिभाषित है और मान लीजिए $x_0 \in \text{I}$ जिससे $f'(x_0) = 0$। तब

(i) जब x, x_0 से बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न धन से ऋण में परिवर्तित होता है अर्थात् x_0 के बाईं ओर और पर्याप्त रूप से निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तथा x_0 के दाईं ओर और पर्याप्त रूप से निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तब x_0 स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है।

(ii) जब x, x_0 से बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है अर्थात् x_0 के बाईं ओर और पर्याप्त रूप से निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) < 0$ तथा x_0 के दाईं ओर और पर्याप्त रूप से निकट प्रत्येक बिंदु पर यदि $f'(x) > 0$ तब x_0 स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है।

(iii) जब x, x_0 से बढ़ता है तब $f'(x)$ का चिह्न परिवर्तित नहीं होता है, तब x_0 न तो स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है और न ही स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु। वास्तव में, ऐसा बिंदु एक *नति परिवर्तन* (inflexion) बिंदु है।

टिप्पणी यदि x_0, f के स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है तब $f(x_0)$, f का स्थानीय उच्चिष्ठ मान है। इसी प्रकार, यदि x_0, f के स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है, तब $f(x_0)$, f का स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

उदाहरण 22 $f(x) = x^3 - 12x$ से प्रदत्त फलन f के लिए स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$f(x) = x^3 - 12x$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$$

$\Rightarrow \quad x = 2$ और $x = -2$ पर $f'(x) = 0$

इसी प्रकार, $x = \pm 2$ केवल वे बिंदु हैं जो f के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदु संभव हो सकते हैं। अब हम बिंदुओं $x = \pm 2$ का स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु होने के लिए परीक्षण करेंगे। प्रथमत: हम $x = 2$ पर परीक्षण करते हैं। हम अंकित करते हैं कि $x > 2$ के लिए $f'(x) > 0$ तथा $x \in (-2, 2)$ के लिए $f'(x) < 0$। इसलिए, प्रथम अवकलज परीक्षण के परिप्रेक्ष्य में $x = 2$ स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है तथा $f(2) = (2)^3 - (12) \times 2 = -16$ स्थानीय निम्निष्ठ मान है।

$x = -2$ पर परीक्षण के क्रम में आइए हम अंकित करें कि $x < -2$ के लिए $f'(x) > 0$, चूँकि $x \in (-2, 2)$ के लिए $f'(x) < 0$। इससे अनुसरित होता है कि प्रथम अवकलज परीक्षण से $x = -2$ स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है और स्थानीय उच्चिष्ठ मान $f(-2) = (-2)^3 - (12)(-2) = -8 + 24 = 16$ से प्रदत्त है।

उदाहरण 23 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ से प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

$\Rightarrow \quad x = 2$ पर $f'(x) = 0$

इस प्रकार $x = 2$ ही वह बिंदु है जिसे स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ के संभावित बिंदु के लिए

परीक्षण किया जाना है। प्रेक्षण कीजिए कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $f'(x) > 0$ और विशेषकर 2 के लगभग या 2 के अंतर्विष्ट किसी भी अंतराल में $f'(x) > 0$। इसलिए, प्रथम अवकलज परीक्षण के दृष्टिकोण से, बिंदु $x = 2$ न तो स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु और न ही स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है। अतः $x = 2$ एक नति परिवर्तन (inflexion) बिंदु है और f में स्थानीय चरम सीमा (extreme) का कोई बिंदु नहीं है।

प्रथम अवकलज परीक्षण स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के सभी संभव बिंदुओं को ज्ञात करने में हमारी सहायता करता है। परंतु जब $f'(x) = 0$ से प्राप्त बिंदुओं से x के गुजरने पर $f'(x)$ के चिह्न परिवर्तन का सत्यापन किया जाता है प्रक्रिया समय लेती है।

एक बिंदु $x = x_0$ पर विचार कीजिए जिससे $f'(x_0) = 0$ और $f''(x_0) < 0$ (यह कल्पना की गई है कि x_0 पर f के द्वितीय अवकलज का अस्तित्व है)। यह संकेत करता है कि x_0 पर f' निरंतर ह्रासमान है चूंकि इसका अवकलज ऋणात्मक है। इसी प्रकार x_0 के इधर-उधर छोटे अंतराल में, x_0 के बाईं ओर $f'(x)$ धनात्मक है और x_0 के दाईं ओर $f'(x)$ ऋणात्मक है। परिणामतः इसका अर्थ है कि इस अंतराल में 'f' निरंतर वर्धमान है जब x, x_0 तक बढ़ता है तथा निरंतर ह्रासमान है जब x, x_0 से आगे बढ़ता है। इसलिए x_0 स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है।

इस प्रकार, यदि $f'(x) = 0$ और $f''(x_0) < 0$, तब x_0, स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है।

इस प्रकार, यदि $f'(x_0) = 0$ और $f''(x_0) > 0$, तब x_0, स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है।

इस विवेचना के परिप्रेक्ष्य में एक दूसरा परीक्षण है जो द्वितीय अवकलज परीक्षण जाना जाता है जिससे स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदुओं को ज्ञात किया जा सकता है।

प्रमेय 3 (द्वितीय अवकलज परीक्षण) मान लीजिए एक अंतराल I पर f एक अवकलनीय फलन है और $x_0 \in I$ मान लीजिए x_0 पर $f''(x)$ संतत है। तब

(i) यदि $f'(x_0) = 0$ और $f''(x_0) < 0$, तब x_0 स्थानीय उच्चिष्ठ का एक बिंदु है।

(ii) यदि $f'(x_0) = 0$ और $f''(x_0) > 0$, तब x_0 स्थानीय निम्निष्ठ का एक बिंदु है।

(iii) यदि $f'(x_0) = 0$ और $f''(x_0) = 0$ तब परीक्षण असफल है।

इस स्थिति में हमें वापस पीछे प्रथम अवकलज परीक्षण की ओर यह ज्ञात करने के लिए होता है कि x_0 उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ या नति परिवर्तन का बिंदु है।

उदाहरण 24 $f(x) = x^3 - 27x + 3$ से प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चिष्ठ अथवा स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए। साथ ही f के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ मान भी ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$f(x) = x^3 - 27x + 3$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 - 27 = 3(x-3)(x+3)$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 0 \text{ यदि } x = 3 \text{ और } -3$$

तब $\qquad f''(x) = 6x$ और इस प्रकार

$$f''(3) = 18 > 0 \text{ तथा } f''(-3) = -18 < 0$$

इसलिए, द्वितीय अवकलज परीक्षण की दृष्टि से, $x = 3$ स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है और $x = -3$ स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है।

इसके अतिरिक्त f के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ मान क्रमशः $f(-3) = 57$ और $f(3) = -51$ है।

उदाहरण 25 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ से प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ के सभी बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल हम पाते हैं

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\Rightarrow \qquad f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

$$f''(x) = 6(x-2)$$

अब $f'(x) = 0$ से $x = 2$ प्राप्त होता है तथा $f''(2) = 6(2-2) = 0$ इसलिए, द्वितीय अवकलज परीक्षण यहाँ असफल है। अत: हम प्रथम अवकलज परीक्षण की ओर वापस जाएंगे।

उदाहरण 22 में हमने पहले ही देखा है कि प्रथम अवकलज परीक्षण की दृष्टि से, $x = 2$ न तो स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है और न ही स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु अपितु यह नति परिवर्तन बिंदु है।

उदाहरण 26 बिंदु $(0, c)$ से परवलय $y = x^2$ की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ $0 \le c \le 5$ है।

हल मान लीजिए परवलय $y = x^2$ पर (h, k) कोई बिंदु है। मान लीजिए (h, k) और $(0, c)$ के मध्य वांछित दूरी D है। तब

$$D = \sqrt{(h-0)^2 + (k-c)^2} = \sqrt{h^2 + (k-c)^2} \qquad (1)$$

चूंकि (h, k) परवलय $y = x^2$ स्थित है, हम पाते हैं $k = h^2$। इसलिए (1) से

$$D = D(k) = \sqrt{k + (k-c)^2}$$

$$\Rightarrow \qquad D'(k) = \frac{1 + 2(k-c)}{2\sqrt{k + (k-c)^2}}$$

$D(k)$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ होने के लिए, $D'(k) = 0$। इसलिए

$$1 + 2(k-c) = 0, \text{ अर्थात् } k = \frac{2c-1}{2}$$

अब प्रेक्षण कीजिए कि जब $k < \frac{2c-1}{2}$, तब $2(k-c)+1 < 0$, अर्थात् $D'(k) < 0$। तथा जब $k > \frac{2c-1}{2}$, तब $2(k-c)+1 > 0$, अर्थात् $D'(k) > 0$, इस प्रकार $D'(k)$ का चिह्न ऋण से धन में परिवर्तित होता है। अतः प्रथम अवकलज परीक्षण से, $k = \frac{2c-1}{2}$ पर k निम्निष्ठ है। अतः वांछित न्यूनतम दूरी

$$D\left(\frac{2c-1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2c-1}{2} + \left(\frac{2c-1}{2} - c\right)^2} = \sqrt{\frac{4c-1}{4}} = \frac{\sqrt{4c-1}}{2}$$

से प्रदत्त है।

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि उपर्युक्त उदाहरण में हमने द्वितीय अवकलज परीक्षण के स्थान पर प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग किया है क्योंकि इससे यह सरल एवं छोटा हो गया है।

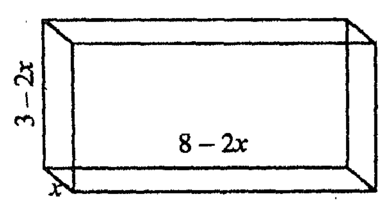
उदाहरण 27 8 मीटर × 3 मीटर की ऐल्यूमीनियम की आयताकार चादर के प्रत्येक कोने से समान वर्ग काटकर तथा भुजाएँ मोड़कर छत रहित एक बाक्स बनाया जाता है। ऐसे बाक्स का अधिकतम आयतन ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि अलग किए वर्ग की भुजा की लंबाई x मीटर है, तब बाक्स की ऊँचाई x, लंबाई $8 - 2x$ और चौड़ाई $3 - 2x$ हुई (आकृति 11.12)। यदि बक्से का आयतन $V(x)$ है तब

$$V(x) = x(3-2x)(8-2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} V'(x) = 12x^2 - 44x + 24 = 4(x-3)(3x-2) \\ V''(x) = 24x - 44 \end{cases}$$

अब $\qquad V'(x) = 0$ से $x = \frac{2}{3}$ और $x = 3$ प्राप्त होता है।



आकृति 11.12

अब $$V''\left(\frac{2}{3}\right) = (24)\ \frac{2}{3} - 44 = -28 < 0$$

इसलिए, $x=\frac{2}{3}$ उच्चिष्ठ का बिंदु है। अतः सबसे बड़े बक्से का आयतन

$$V\left(\frac{2}{3}\right) = 4\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 22\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 24\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{200}{27} \text{ मी}^3$$

उदाहरण 28 सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अंतर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लंब वृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है।

हल मान लीजिए शंकु के आधार की त्रिज्या $r = OC$ और ऊँचाई $h = OA$ है। मान लीजिए कि दिए हुए शंकु के अंतर्गत बेलन के आधार वृत्त की त्रिज्या $OE = x$ है। माना कि बेलन की ऊँचाई QE है (आकृति 11.13)।

तब $$\frac{QE}{OA} = \frac{EC}{OC} \quad (\text{चूँकि } \Delta QEC \sim \Delta AOC)$$

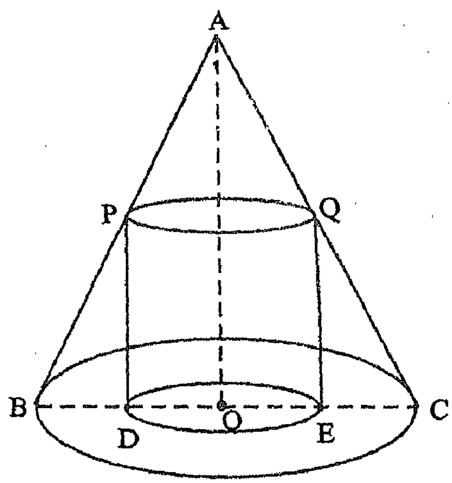
$$\Rightarrow \quad \frac{QE}{h} = \frac{r-x}{r}$$

$$\Rightarrow \quad QE = \frac{h(r-x)}{r}$$

मान लीजिए बेलन का वक्रपृष्ठ $S = S(x)$ है। तब

$$S(x) = \frac{2\pi h}{r}\left(rx - x^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} S'(x) = \dfrac{2\pi h}{r}(r-2x) \\ S''(x) = \dfrac{-4\pi h}{r} \end{cases}$$



आकृति 11.13

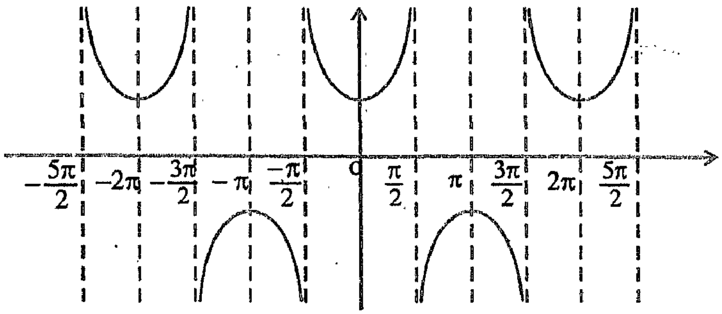
अब $S'(x)=0$ से $x=\frac{r}{2}$ प्राप्त होता है। चूंकि सभी x के लिए और विशेषकर $x=\frac{r}{2}$ के लिए $S''(x)<0$। इससे अनुसरित होता है कि $x=\frac{r}{2}$, S के उच्चिष्ठ का बिंदु है। अतः दिए शंकु के अंतर्गत

उदाहरण 29 $f(x) = \sec x$ से प्रदत्त फलन f के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ बिंदु ज्ञात कीजिए। साथ ही f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान भी ज्ञात कीजिए।

हल $\sec x$ के आलेख (आकृति 11.14) पर विचार कीजिए।

हम निम्नलिखित प्रेक्षण करते हैं :

(a) f के स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु O है क्योंकि जब x, $\frac{-\pi}{2}$ से शून्य की ओर बढ़ता है $f(x)$, ∞ से



$\sec x$ का आलेख

आकृति 11.14

1 की ओर घटता जाता है तथा जब x, 0 से $\frac{\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है, $f(x)$, 1 से ∞ की ओर बढ़ता जाता है।

(b) f के स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु π है क्योंकि जब x, $\frac{\pi}{2}$ से π की ओर बढ़ता है $f(x)$, $-\infty$ से -1 की ओर बढ़ता जाता है तथा जब x, π से $\frac{3\pi}{2}$ की ओर बढ़ता है, $f(x), -1$ से $-\infty$ की ओर घटता जाता है।

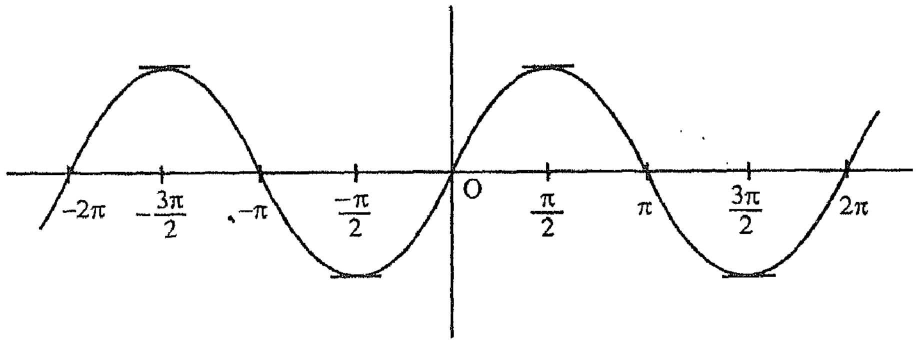
इसी प्रकार निरंतर, प्रक्रिया अगणित बार दोहराई जा सकती है चूंकि $\sec x$ आवर्त्त 2π का एक आवर्त्ती फलन है, इसी प्रकार के परिवर्तन होते रहेंगे। इस प्रकार, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ और $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \cdots$ पर स्थानीय निम्निष्ठ होगा। इसके अतिरिक्त, $\sec x$ का मान उच्चिष्ठ मान -1 और निम्निष्ठ मान $+1$ है।

टिप्पणी एक फलन का स्थानीय निम्निष्ठ मान, फलन के स्थानीय उच्चिष्ठ मान से अधिक हो सकता है।

उदाहरण 30 $f(x) = \sin x$ से प्रदत्त फलन f के स्थानीय निम्निष्ठ और स्थानीय उच्चिष्ठ बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

हल $\sin x$ के आलेख (आकृति 11.15) पर विचार कीजिए।

उदाहरण 29 की भाँति बिंदुओं $x = \frac{\pi}{2}, \frac{-3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{-7\pi}{2}, \ldots$ पर f, स्थानीय उच्चिष्ठ है तथा बिंदुओं



$\sin x$ का आलेख

आकृति 11.15

$x = \frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{2}, \ldots$ पर f स्थानीय निम्निष्ठ है।

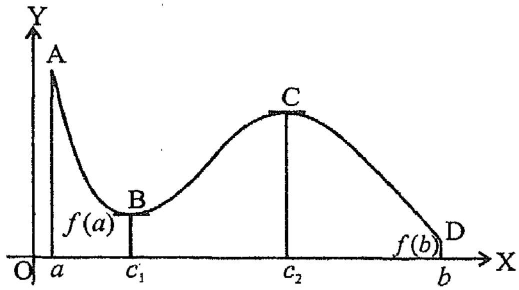
टिप्पणी एक संगत फलन के स्थानीय उच्चिष्ठ और स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदु सदैव एकांतरतः (बारी-बारी से) होते हैं। (उदाहरण 30) तथापि कुछ स्थितियों में यही तथा असंतत फलनों (उदाहरण 29) में भी सत्य हो सकता है।

एक संवृत अंतराल में उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान

पुनः स्मरण कीजिए कि उदाहरण 20 में $x \in (0,1)$ पर फलन $f(x) = x$, का न तो उच्चिष्ठ मान ही है और न निम्निष्ठ मान ही। तथापि, यदि हम विवृत्त अंतराल (0, 1) को संवृत्त अंतराल [0, 1] से बदल दें तब फलन का उच्चिष्ठ मान $1 = f(1)$ तथा निम्निष्ठ मान $0 = f(0)$ हो जाता है। इससे वह अंतराल महत्त्वपूर्ण हो जाता है जिस पर दिया फलन परिभाषित होता हैं इसके अतिरिक्त हम अंकित कर सकते हैं कि अंतराल (0, 1) में न तो f के स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है और न f के स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु ही तथा इस प्रकार f का न तो स्थानीय उच्चिष्ठ मान है और न स्थानीय निम्निष्ठ मान ही भले f के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान का अस्तित्व है।

$x = 1$ पर f का उच्चिष्ठ मान 1, [0, 1] पर f का *निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान* (*महत्तम मान*) (*absolute minimum value*) तथा $x = 0$ पर f का निम्निष्ठ मान 0 (*न्यूनतम मान*), निरपेक्ष न्यूनतम मान (*Absolute minimum value*) कहलाता है।

टिप्पणी दिए अंतराल में f के निरपेक्ष उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान को सार्वत्रिक अधिकतम तथा न्यूनतम [*global maximum* (*minimum*)] मान भी कहा जाता है।



आकृति 11.16

उदाहरण 31 एक संवृत्त अंतराल $[a, b]$ में परिभाषित फलन f के आकृति 11.16 में दिए आलेख से, f के सभी स्थानीय उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ) मान और निरपेक्ष उच्चिष्ठ (या निम्निष्ठ) मान ज्ञात कीजिए।

हल स्पष्ट रूप से, अंतराल $[a, b]$ में $x = c_1$ के संगत बिंदु B, f के स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु है तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान $f(c_1)$ है। इसी प्रकार अंतराल $[a, b]$ में $x = c_2$ के संगत बिंदु C, f के स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है तथा स्थानीय निम्निष्ठ मान $f(c_2)$ है। तथा f के आलेख की दृष्टि से निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान $f(a)$ है और निरपेक्ष निम्निष्ठ मान $f(b)$ है।

टिप्पणी उदाहरण 31 में, हम अंकित कर सकते हैं कि निरपेक्ष उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ) मान, स्थानीय उच्चिष्ठ (निम्निष्ठ) मान से भिन्न है।

अब हम निम्नलिखित प्रमेय (बिना उपपत्ति) बताएंगे जिससे अंतराल I पर एक फलन के निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में सहायता मिलती है।

प्रमेय 4 मान लीजिए $I = [a, b]$ पर f एक संतत फलन है तब f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान होता है और अंतराल I में कम से कम एक बार f यह प्राप्त करता है तथा f का निरपेक्ष निम्निष्ठ मान होता है और अंतराल I में कम से कम एक बार f यह प्राप्त करता है।

प्रमेय 5 मान लीजिए I पर f एक अवकलनीय फलन है और मान लीजिए अंतराल I का x_0 कोई आंतरिक बिंदु है। तब

(a) यदि x_0 पर f निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान प्राप्त करता है तो $f'(x_0) = 0$

(b) यदि x_0 पर f निरपेक्ष निम्निष्ठ मान प्राप्त करता है तो $f'(x_0) = 0$

उपर्युक्त प्रमेयों की दृष्टि से एक दिए अंतराल में एक फलन के निरपेक्ष, उच्चिष्ठ मान और निरपेक्ष निम्निष्ठ मान ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित नियम उद्धृत करते हैं :

सोपान 1 : जहाँ f' का मान शून्य होता है, उन सभी बिंदुओं को ज्ञात कीजिए।

सोपान 2 : अंतराल के अन्त्य मान लीजिए।

सोपान 3 : इन सभी बिंदुओं पर f के मान की गणना कीजिए।

सोपान 4 : सोपान 3 में गणना से प्राप्त f के मानों में से उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मानों को लीजिए। यही निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निरपेक्ष निम्निष्ठ मान होंगे।

उदाहरण 32 अंतराल $[0, 1]$ पर $x^{50} - x^{20}$ के निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निरपेक्ष निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $f(x) = x^{50} - x^{20}$, तब

$$f'(x) = 50x^{49} - 20x^{19} = 10x^{19}(5x^{30} - 2)$$

अब $f'(x) = 0$ से $x = 0, \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{30}}$ प्राप्त होता है। इन दो बिंदुओं के साथ दिए अंतराल $[0, 1]$ के दो अन्य बिंदुओं 0 और 1 को हम लेते हैं। इस प्रकार हमको केवल तीन बिंदु, नामतः 0, 1 और $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{30}}$ प्राप्त होते हैं जिन पर f के मान का परिकलन करते हैं। हम पाते हैं

$$f(0) = 0, f(1) = 0 \text{ और}$$

$$f\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{30}}\right] = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{50}{30}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{20}{30}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}} < 0 \left[\text{चूँकि } \frac{2}{5} < 1 \text{ तथा } \frac{5}{3} > \frac{2}{3}\right]$$

अतः अंतराल $[0, 1]$ पर फलन f के लिए, हम निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान 0 तथा निरपेक्ष निम्निष्ठ मान $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ पाते हैं।

उदाहरण 33 शत्रु का एक जैट वक्र $y = x^2 + 2$ के अनु उड़ रहा है। एक सैनिक बिंदु $(3, 2)$ पर स्थित है। सैनिक एवं जैट के मध्य निकटतम दूरी क्या है?

हल x के प्रत्येक मान के लिए जैट की स्थिति बिंदु $(x, x^2 + 2)$ है। इसलिए, $(3, 2)$ पर स्थित सैनिक और जैट के मध्य दूरी $\sqrt{(x-3)^2 + (x^2+2-2)^2}$, अर्थात् $\sqrt{(x-3)^2 + x^4}$ है।

मान लीजिए $f(x) = (x-3)^2 + x^4$, तब

$$f'(x) = 2(x-3) + 4x^3$$
$$= 2(x-1)(2x^2 + 2x + 3)$$

इसलिए, $f'(x) = 0$ से $x = 1$ या $2x^2 + 2x + 3 = 0$ जिसका कोई वास्तविक मूल नहीं है, प्राप्त होता है। तथा अंतराल के कोई अन्त्य बिंदु भी नहीं हैं जिन्हें उस समुच्चय में जोड़ा जाए जिनके लिए f' का मान शून्य है अर्थात् केवल एक बिंदु, नामतः $x = 1$ है। इस बिंदु पर f का मान निम्न है :

$$f(1) = (1-3)^2 + (1)^4 = 5$$

इस प्रकार, सैनिक एवं जैट के बीच की दूरी $\sqrt{f(x)} = \sqrt{5}$ है।

ध्यान दीजिए कि $\sqrt{5}$ या तो उच्चिष्ठ मान या निम्निष्ठ मान है।

चूंकि $$\sqrt{f(0)} = \sqrt{(0-3)^2 + (0)^4} = 3 > \sqrt{5},$$

$\sqrt{5}$, $\sqrt{f(x)}$ का निम्निष्ठ मान है। अतः सैनिक एवं जैट के बीच की न्यूनतम दूरी $\sqrt{5}$ है।

प्रश्नावली 11.4

1. बिना अवकलज का प्रयोग किए निम्नलिखित फलनों के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान, यदि कोई हों, ज्ञात कीजिए :

(i) $(2x-1)^2 + 3$ (ii) $-(x-1)^2 + 10$ (iii) $9x^2 + 12x + 2$

(iv) $x^3 + 1$ (v) $|x+2| = 1$ (vi) $-|x+1| + 3$

(vii) $\sin 2x + 5$ (viii) $|\sin 4x + 3|$ (ix) $\sin \sin x$

(x) $9x^2 - 12x + 4$ (xi) $4x^2 + 28x + 49$ (xii) $x + 1, x \in (-1, 1)$

2. केवल प्रथम अवकलज परीक्षण का प्रयोग करके निम्नलिखित फलनों के स्थानीय उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ, यदि कोई हों, ज्ञात कीजिए तथा स्थानीय उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान, जैसी स्थिति हो, भी ज्ञात कीजिए :

(i) अचर फलन α (ii) x^2

(iii) $x^3 - 3x$ (iv) $\cos x, 0 < x < \pi$

(v) $\sin 2x, 0 < x < \pi$ (vi) $\sin x + \cos x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

(vii) $\sin x - \cos x, 0 < x < 2\pi$ (viii) $x^3 - 6x^2 + 9x + 15$

(ix) $(x-1)(x+2)^2$

(x) $\frac{x}{2}+\frac{2}{x},\ x>0$

(xi) $\frac{1}{x^2+2}$

(xii) $x\sqrt{1-x},\ x>0$

(xiii) $\sin^4 x+\cos^4 x,\ 0<x<\frac{\pi}{2}$

(xiv) $\sin 2x - x,\ -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$

(xv) $(x-3)^4$

(xvi) $x^3(x-1)^2$

(xvii) $x^3(2x-1)^3$

(xviii) $-(x-1)^3(x+1)^2$

3. उपर्युक्त प्रश्न 2 में दिए फलनों के द्वितीय अवकलज परीक्षण के प्रयोग से स्थानीय उच्चिष्ठ या स्थानीय निम्निष्ठ, यदि कोई हैं, तो ज्ञात कीजिए। यदि द्वितीय अवकलज परीक्षण असफल होता है तो इंगित कीजिए।

4. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित फलनों का उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ नहीं होता है :

(i) e^x (ii) $\log x$ (iii) $x+2$ (iv) x^3+x^2+x+1

5. दिए अंतरालों में निम्नलिखित फलनों के निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान और निरपेक्ष निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए :

(i) $[-2, 2]$ में $f(x)=x^3$

(ii) $[-3, 1]$ में $f(x)=(x-1)^2+3$

(iii) $[-2, 2.5]$ में $f(x)=\left(\frac{1}{2}-x\right)^2+x^3$

(iv) $[0, \pi]$ में $f(x)=\sin x+\cos x$

(v) $[-2, 4.5]$ में $f(x)=4x-\frac{1}{2}x^2$

6. यदि लाभ फलन $p(x)=41-24x-18x^2$ से प्रदत्त है तो कंपनी द्वारा अर्जित उच्चिष्ठ लाभ ज्ञात कीजिए।

7. अंतराल $[0, 3]$ पर $3x^4-8x^3+12x^2-48x+25$ के उच्चिष्ठ मान और निम्निष्ठ मान दोनों ज्ञात कीजिए।

8. अंतराल $[1, 4]$ पर $3x^4-8x^3+12x^2-48x+1$ के उच्चिष्ठ मान और निम्निष्ठ मान दोनों ज्ञात कीजिए।

9. अंतराल $[0, 2\pi]$ के किन बिंदुओं पर फलन $\sin 2x$ अपना उच्चिष्ठ मान प्राप्त करता है?

10. फलन $\sin x+\cos x$ का उच्चिष्ठ मान क्या है?

11. अंतराल $[1, 3]$ में $2x^3-24x+107$ का महत्तम मान ज्ञात कीजिए। इसी फलन का अंतराल $[-3, -1]$ में भी महत्तम मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि दिया है कि अंतराल $[0, 2]$ के $x=1$ पर फलन x^4-62x^2+ax+9 उच्चिष्ठ मान प्राप्त करता है, a का मान ज्ञात कीजिए।

13. $[0, 2\pi]$ पर $x + \sin 2x$ का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

14. ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 24 है और जिनका गुणनफल उच्चिष्ठ हो।

15. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिससे $x + y = 60$ और xy^3 उच्चिष्ठ है।

16. ऐसी दो धन संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए जिससे उनका योग 35 हो और गुणनफल x^2y^5 उच्चिष्ठ हो।

17. ऐसी दो धन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 16 है और जिनके घनों का योग निम्निष्ठ हो।

18. 18 सेमी भुजा के टिन के एक वर्गाकार टुकड़े से प्रत्येक कोने पर एक वर्ग काटकर तथा इस प्रकार कटी भुजाओं को मोड़कर छत रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चिष्ठ संभव हो?

19. 45 सेमी × 24 सेमी की टिन की आयताकार चादर से कोनों पर वर्ग काटकर तथा इस प्रकार कटी भुजाओं को मोड़कर छत रहित एक संदूक बनाना है। काटे जाने वाले वर्ग की भुजा कितनी होगी जिससे संदूक का आयतन उच्चिष्ठ संभव न हो।

20. दिखाइए कि एक दिए वृत्त के अंतर्गत सभी आयतों में वर्ग का क्षेत्रफल उच्चिष्ठ होता है।

21. दिखाइए कि दिए पृष्ठ एवं महत्तम आयतन के बेलन की ऊँचाई, आधार के व्यास के बराबर होती है।

22. 100 घन सेमी आयतन वाली सभी बंद बेलनाकार (लंब वृत्तीय) बाल्टियों में से किसका पृष्ठ न्यूनतम है?

23. एक 28 सेमी लंबे तार को दो टुकड़ों में विभक्त किया गया है। एक टुकड़े से वर्ग तथा दूसरे टुकड़े से वृत्त बनाया गया है। दो टुकड़ों की लंबाई कितनी होनी चाहिए जिससे वर्ग एवं वृत्त का सम्मिलित क्षेत्रफल न्यूनतम हो।

24. सिद्ध कीजिए कि R त्रिज्या के अंतर्गत विशालतम शंकु का आयतन गोले के आयतन का $\frac{8}{27}$ है।

25. दिखाइए कि न्यूनतम पृष्ठ और दिए आयतन के लंब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई, आधार की त्रिज्या $\sqrt{2}$ दुगुनी होती है।

26. दिखाइए कि दी हुई तिर्य ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है।

27. दिखाइए कि दिए हुए पृष्ठ और महत्तम आयतन वाले लंब वृत्तीय शंकु का अर्द्ध शीर्ष कोण $\sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ होता है।

28. r त्रिज्या के अर्द्धवृत्त के अंतर्गत एक आयत है जिसकी एक भुजा अर्द्धवृत्त के व्यास पर है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए जिससे इसका क्षेत्रफल महत्तम हो। क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

29. वक्र $y^2 = 4x$ पर बिंदु ज्ञात कीजिए जिनकी बिंदु $(2, -8)$ से दूरी न्यूनतम हो।

11.6 रोले का प्रमेय (Rolle's Theorem)

आइए कुछ फलनों के अग्रलिखित वर्णन पर विचार करें :

$$\text{I}\quad \begin{cases} f(x) = \sin x, x \in [0, \pi] \\ f'(x) = \cos x \text{ और इस प्रकार } x = \dfrac{\pi}{2} \text{ पर } f'(x) = 0 \\ f(0) = 0 = f(\pi) \end{cases}$$

$$\text{II}\quad \begin{cases} f(x) = 3 + 4x - x^2,\ x \in [1, 3] \\ f'(x) = 4 - 2x \text{ और इस प्रकार } x = 2 \text{ पर } f'(x) = 0 \\ f(1) = 6 = f(3) \end{cases}$$

$$\text{III}\quad \begin{cases} f(x) = \sin x - \cos x,\ x \in [-\pi, \pi] \\ f'(x) = \cos x + \sin x \text{ और इस प्रकार } x = \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4} \text{ पर } f'(x) = 0 \\ f(-\pi) = 1 = f(\pi) \end{cases}$$

$$\text{IV}\quad \begin{cases} f(x) = \begin{cases} x, \text{ यदि } 0 < x \leq 1 \\ 1, \text{ यदि } x = 0 \end{cases} \\ f'(x) = 1 (\neq 0), \forall 0 < x \leq 1 \\ f(0) = 1 = f(1) \end{cases}$$

अब I से III तक प्रेक्षण कीजिए कि ऐसे दो बिंदुओं, जिन पर f का मान समान है, के मध्य f के क्षेत्र में (अन्त्य बिंदुओं को छोड़कर) एक बिंदु है जिस पर अवकलज शून्य है। तथापि IV में, ऐसा कोई बिंदु नहीं है। (क्यों?)

इन प्रेक्षणों से प्रश्न उठता है कि:

"f पर क्या प्रतिबंध लगाए जाएँ जिससे उन दो बिंदुओं, जिन पर f के मान समान हैं, के मध्य कम से कम एक बिंदु अवश्य हो जिस पर f' शून्य हो जाता है?"

इस दिशा में हम निम्नलिखित प्रमेय (बिना उपपत्ति) प्रस्तुत करते हैं :

प्रमेय 6 (रोले का प्रमेय) मान लीजिए संवृत्त अंतराल $[a, b]$ में एक वास्तविक फलन f परिभाषित है जहाँ

(i) संवृत्त अंतराल $[a, b]$ में f संतत है।

(ii) विवृत्त अंतराल $[a, b]$ में f अवकलनीय है।

(iii) $f(a) = f(b)$

तब विवृत्त अंतराल $[a, b]$ में कम से कम एक ऐसा बिंदु c है जिससे $f'(c) = 0$

टिप्पणी

1. एक बिंदु $c \in (a, b)$ से अधिक बिंदु हो सकते हैं जिससे $f'(c) = 0$ है। वास्तव में, यदि $f(x) = \sin x, x \in [0, 2\pi]$, तब $[0, 2\pi]$ पर f संतत है, $(0, 2\pi)$ पर f अवकलनीय है और $f(0) = 0 = f(2\pi)$ हैं। ध्यान दीजिए $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, इससे सत्यापित होता है कि अंतराल $(0, 2\pi)$ में दो बिंदु, नामतः $x = \frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{3\pi}{2}$, हैं जिन पर $f'(x)$ शून्य है।

2. $[a, b]$ पर f के सांतत्य का प्रतिबंध आवश्यक है और इसमें कोई ढील नहीं दी जा सकती है। वास्तव में उपर्युक्त IV में फलन f अंतराल $[0, 1]$ के बिंदु 0 पर असंतत है तथा अंतराल $[0, 1]$ में कोई भी बिंदु ऐसा नहीं है जिस पर f का अवकलज शून्य हो जाता हो। इस प्रकार, रोले के प्रमेय का निष्कर्ष अमान्य हो जाता है।

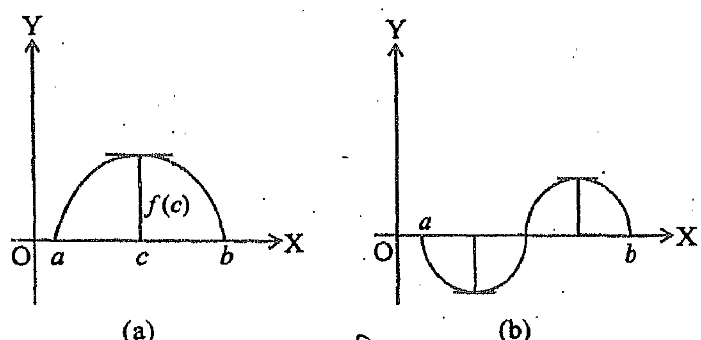
3. (a, b) पर f के अवकलनीय होने का प्रतिबंध भी आवश्यक है और इसे भी शिथिल नहीं किया जा सकता है, वास्तव में, अंतराल $[0, 1]$ पर

$$f(x) = |x|, x \in [-1, 1]$$

से परिभाषित फलन f संतत है तथा $x = 0$ के अतिरिक्त $[-1, 1]$ पर अवकलनीय है और रोले के प्रमेय का निष्कर्ष अमान्य हो जाता है।

रोले के प्रमेय का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Rolle's Theorem)

ज्यामितीय रूप से, रोले के प्रमेय से प्रकट होता है कि f के आलेख पर समान कोटियों $f(a)$ और $f(b)$ दो बिंदुओं a और b के मध्य, कम से कम एक बिंदु c का अस्तित्व है जिससे $(c, f(c))$ पर स्पर्श रेखा x-अक्ष के समांतर है [आकृति 11.17 (a) और (b)]।



आकृति 11.17

टिप्पणी $f'(c)=0$ से अभिप्राय है कि f के आलेख में $(c, f(c))$ पर स्पर्शी x-अक्ष के समांतर है।

उदाहरण 34 $f(x)=\sin x-1, \quad x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ से प्रदत्त फलन f के लिए रोले के प्रमेय की सत्यता सत्यापित कीजिए।

हल $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ पर फलन f अवकलनीय है (क्यों?) और इसलिए $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ पर संतत है। तथा

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-1=0 \text{ और } f\left(\frac{5\pi}{2}\right)=1-1=0$$

इसलिए, रोले के प्रमेय के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। निष्कर्ष को सत्यापित करने के क्रम में, हमें एक बिंदु $c\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ ज्ञात होना चाहिए जिस पर $f'(c)=0$ हो। ध्यान दीजिए कि $f'(x)=0$ का अर्थ है, $\cos x=0$ जिससे $x=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$ प्राप्त होता है।

इन बिंदुओं में से, $\frac{3\pi}{2}\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$ तथा इस प्रकार $c=\frac{3\pi}{2}$ है। अतः रोले के प्रमेय का निष्कर्ष सत्यापित होता है।

उदाहरण 35 मान लीजिए $f(x)=x(x-1)(x-2), x\in[0, 2]$ । सिद्ध कीजिए कि f रोले के प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है और $(0, 2)$ में एक से अधिक c है जिससे $f'(c)=0$ है।

हल $[0, 2]$ पर फलन f अवकलनीय है और इस प्रकार $[0, 2]$ पर यह संतत है तथा $f(0)=0=f(2)$ है। इसलिए, रोले के प्रमेय के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। इसके अतिरिक्त हम पाते हैं

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-6x+2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{6}=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त दोनों बिंदु अंतराल $(0, 2)$ में है। इस प्रकार, अंतराल $(0, 2)$ में दो बिंदु $c=1\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ हैं जिस पर $f'(c)=0$

उदाहरण 36 निम्नलिखित फलनों के लिए रोले के प्रमेय की उपयुक्तता पर विचार कीजिए।

(a) $f(x) = |x-1|, x \in [0,2]$

(b) $f(x) = \tan x, x \in [0, \pi]$

(c) $f(x) = x, x \in [1,2]$

हल (a) दिया फलन

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, \text{ यदि } x \geq 1 \\ 1-x, \text{ यदि } x < 1 \end{cases} \text{ है।}$$

पाठक सत्यापित कर सकते हैं कि संवृत्त अंतराल [0, 2] में फलन संतत है परंतु विवृत्त अंतराल [0, 2] में अवकलनीय नहीं है। इसलिए यहाँ रोले का प्रमेय उपयुक्त नहीं है।

(b) बिंदु $x = \frac{\pi}{2}$ पर दिया फलन $f(x) = \tan x$ संतत नहीं है और इस प्रकार, यह संवृत्त अंतराल $[0, \pi]$ पर संतत नहीं है। इसलिए, यहाँ रोले का प्रमेय उपयुक्त नहीं है।

(c) दिया फलन $f(x) = x$ है और इस प्रकार $f(1) = 1$ तथा $f(2) = 2$ अर्थात् $f(1) \neq f(2)$। इसलिए, इस फलन के लिए रोले का प्रमेय उपयुक्त नहीं है।

उदाहरण 37 यह दिया है कि

$$f(x) = x^3 + bx^2 + ax, \quad x \in [1,3]$$

से प्रदत्त फलन f पर $c = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ के साथ रोले का प्रमेय लागू होता है। a तथा b के मान ज्ञात कीजिए।

हल रोले के प्रमेय के प्रतिबंध से $f'(c) = 0$ प्राप्त होता है। परंतु $f'(c) = 3c^2 + 2bc + a$ है। इसलिए,

$$3c^2 + 2bc + a = 0$$

$$\Rightarrow \qquad c = \frac{-b}{3} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 3a}}{3}$$

परंतु $\qquad c = 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ (दिया है)

इसलिए $\qquad 2 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-b}{3} + \frac{\sqrt{b^2 - 3a}}{3}$

तुलना करने पर, हम पाते हैं

$$2 = \frac{-b}{3} \text{ तथा } \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{b^2 - 3a}}{3},$$

जिससे $b = -6$ तथा $b^2 - 3a = 3$ या $a = 11$

उदाहरण 38 वक्र $y = x^2, x \in [-2, 2]$ पर बिंदु ज्ञात कीजिए जिन पर वक्र की स्पर्शी x-अक्ष के समांतर है।

हल $[-2, 2]$ पर फलन $f(x) = x^2, x \in [-2, 2]$ संतत तथा $[-2, 2]$ पर अवकलनीय है, और $f(-2) = 4 = f(2)$। इसलिए, रोले का प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं और इसलिए एक बिंदु $c \in (-2, 2)$ का अस्तित्व होना चाहिए जिस पर $f'(c) = 0$। परंतु $f'(c) = 0$, अतः $c = 0$, इससे $f(c) = f(0) = 0$ प्राप्त होता है। रोले के प्रमेय की ज्यामितीय व्याख्या की दृष्टि से, बिंदु $(c, f(c))$ पर वक्र की स्पर्शी x-अक्ष के समांतर है जो इस स्थिति में $(0, 0)$ आता है।

प्रश्नावली 11.5

निम्नलिखित फलनों के लिए रोले के प्रमेय की सत्यता सत्यापित कीजिए :

1. $f(x) = \sin 3x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

2. $f(x) = \frac{8x^2}{3} - 2x, \quad x \in \left[0, \frac{3}{4}\right]$

3. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{3} + 2x, \quad x \in [0, 3]$

निम्नलिखित फलनों के लिए रोले के प्रमेय की उपयुक्तता पर विचार कीजिए :

4. $f(x) = x^2 - 1$, $[-1, 1]$ पर

5. $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$, $[-1, 2]$ पर

6. $f(x) = \frac{x(x-2)}{x-1}$, $[0, 2]$ पर

7. $f(x) = 4\sin x$, $[0, \pi]$ पर

8. $f(x) = \sin x - \sin 2x$, $[0, \pi]$ पर

9. $f(x) = \sin x + \cos x - 1$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर

10. $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ पर

11. $f(x) = \log(x^2 + 2) - \log 3$, $[-1, 1]$ पर

12. $f(x)=e^{1-x^2}$, $[-1,1]$पर 13. $f(x)=x\ (x+3)\,e^{-\frac{x}{2}}$, $[-3,\ 0]$ पर

14. निम्नलिखित वक्रों के किन बिंदुओं पर स्पर्शी x-अक्ष के समांतर है?

(a) $y=x^2$, $[-2,2]$ पर (b) $y=\cos x-1$ $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$, पर

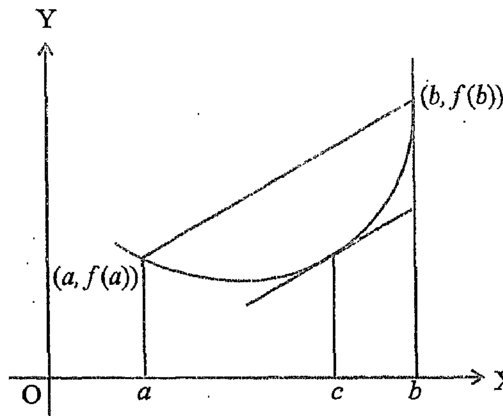
11.7 माध्यमान प्रमेय (The Mean Value Theorem)

रोले के प्रमेय में, हमने प्रेक्षित किया कि आलेख पर कहीं भी, स्पर्शी x-अक्ष के समांतर हैं।

अब हम इस परिणाम का परिष्कार यह कहते हुए करते हैं कि यहाँ x-अक्ष महत्त्वपूर्ण नहीं है। हम कहते हैं कि आलेख के अन्त्य बिंदु एक रेखा पर है, तब आलेख पर एक ऐसा बिंदु है जहाँ स्पर्शी उस रेखा के समांतर है। दूसरे शब्दों में, सदैव आलेख पर एक बिंदु है कि जिस पर स्पर्शी आलेख के अन्त्य बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा के समांतर है।

मान लीजिए कि वक्र के किन्हीं दो बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा को हम वक्र की जीवा कहें तब हमारा परिष्कृत परिणाम इस प्रकार पढ़ा जाता है।

"f के आलेख की कोई जीवा दी हुई है, आलेख पर एक बिंदु है जहाँ इस जीवा के समांतर स्पर्शी है" (आकृति 11.18)।



आकृति 11.18

टिप्पणी पाठक ध्यान दें कि f की $(c, f(c))$ पर स्पर्शी का ढाल $f'(c)$ से दिया जाता है तथा बिंदुओं $(a, f(a))$ तथा $(b, f(b))$ को मिलाने वाली जीवा का ढाल $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ है। चूंकि दोनों रेखाएँ समांतर हैं, हम पाते हैं :

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

अब हम माध्यमान प्रमेय (बिना उपपत्ति) प्रस्तुत करते हैं।

प्रमेय 7 (माध्यमान प्रमेय) मान लीजिए संवृत्त अंतराल $[a, b]$ में f एक वास्तविक फलन इस प्रकार परिभाषित है कि

(i) $[a, b]$ पर f संतत है तथा

(ii) विवृत्त अंतराल (a, b) में f अवकलनीय है, तब विवृत्त अंतराल (a, b) में एक बिंदु c ऐसा है कि

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

टिप्पणी

1. शब्द 'माध्य' से तात्पर्य औसत से है। यहाँ हम औसत मान $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ पर विचार कर रहे हैं और इसी कारण से हम इस प्रमेय का 'माध्य मान प्रमेय' कहते हैं।

2. विशिष्ट स्थिति में जब $f(a) = f(b)$, व्यंजक $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ शून्य हो जाता है और इससे किसी $c \in (a, b)$ के लिए $f'(c) = 0$ और इससे यह रोले के प्रमेय के निष्कर्ष में बदल जाता है।

3. $[a, b]$ पर f के सांतत्य तथा (a, b) पर f के अवकलनीय होने के प्रतिबंध आवश्यक हैं। (रोले के प्रमेय की संगत टिप्पणी के उदाहरण का अवलोकन कीजिए।)

माध्यमान प्रमेय का भौतिक अर्थ (Physical Meaning of the Mean Value Theorem)

कल्पना कीजिए कि एक कार सीधी सड़क पर जा रही है। समय a पर मान लीजिए इसकी स्थिति $f(a)$ पर है और बाद में समय b पर इसकी स्थिति $f(b)$ पर है। इस प्रकार तय की दूरी $f(b) - f(a)$ तथा लिया समय $(b - a)$ है और इस प्रकार कार की माध्य (औसत) चाल $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ है। अब कार के चाल मापी पर ध्यान दीजिए जो किसी क्षण कार की चाल बताता है। वास्तव में चालमापक का पाठ्यांक उस समय f' का मान बताता है। इस स्थिति में, माध्यमान प्रमेय बताती है कि a और b के मध्य के समय में किसी बिंदु पर, चालमापक का पाठ्यांक तथा कार की औसत चाल संपाती होने चाहिए।

उपर्युक्त बिंदु को स्पष्ट करने के लिए, कल्पना कीजिए कि कार ने 2 घंटे में 80 किमी दूरी तय की है और इस प्रकार कार की औसत चाल 40 किमी/घं हुई। मध्यमान प्रमेय के अनुसार, समय के किसी क्षण बिंदु पर कार की चाल ठीक 40 किमी/घं होनी चाहिए। ऐसा है क्योंकि

(i) यदि सदैव कार की चाल 40 किमी/घं से कम होगी तब औसत चाल भी 40 किमी/घं से कम होगी और औसत चाल ठीक 40 किमी/घं प्राप्त करने के लिए चालमापक के संकेतक को 40 किमी के चिह्न को पार करना पड़ेगा।

(ii) इसी प्रकार, यदि सदैव कार की चाल 40 किमी/घंटा से अधिक है तब औसत चाल भी 40 किमी/घंटा से अधिक होगी। इस प्रकार औसत चाल ठीक 40 किमी/घंटा प्राप्त करने के लिए चालमापक के संकेतक को 40 किमी के चिह्न से पहले आना पड़ेगा।

उदाहरण 39 फलन

$$f(x) = x^2 - 1, \quad x \in [2,3]$$

के लिए माध्यमान प्रमेय की सत्यता सत्यापित कीजिए।

हल दिया फलन [2, 3] पर सतत एवं (2, 3) पर अवकलनीय है। इसलिए, माध्यमान प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं। निष्कर्ष को सत्यापित करने के क्रम में, हमें एक बिंदु $c \in (2,3)$ ज्ञात करना चाहिए जिससे $f'(c) = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = 5$ है। अब $f'(c) = 5$ से $2c = 5$ प्राप्त होता है और इस प्रकार $c = \frac{5}{2}$, जो (2, 3) में है। इससे माध्यमान प्रमेय का निष्कर्ष सत्यापित होता है।

उदाहरण 40 परवलय $f(x) = (x-3)^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्शी, बिंदुओं (3, 0) और (4, 1) को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

हल किसी बिंदु $(x, f(x))$ पर दिए वक्र की स्पर्शी का ढाल $f'(x) = 2(x-3)$ से प्राप्त होता है तथा (3, 0) और (4, 1) को मिलाने वाली जीवा का ढाल $\frac{1-0}{4-3}$, अर्थात् 1 है।

माध्यमान प्रमेय से, जीवा किसी बिंदु c पर स्पर्शी के समांतर है। इसलिए

$$f'(c) = 1$$

$$\Rightarrow \quad 2(c-3) = 1$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{7}{2} \qquad \text{(यहाँ ध्यान दीजिए कि } \frac{7}{2} \in (3, 4)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad f(c) = (c-3)^2 = \left(\frac{7}{2} - 3\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

अतः वह बिंदु $\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{4}\right)$ है, जहाँ परवलय की स्पर्शी दी हुई जीवा के समांतर है।

प्रश्नावली 11.6

निम्नलिखित प्रदत्त फलनों के लिए, माध्यमान प्रमेय के प्रतिबंध सत्यापित कीजिए और प्रत्येक स्थिति में माध्यमान प्रमेय के अनुसार बताए गए अंतराल में एक बिंदु c ज्ञात कीजिए :

1. [2, 3] पर $f(x) = 3x^2 - 2$
2. [0,1] पर $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$

3. $[0,\pi]$ पर $f(x)=\sin x-\sin 2x$

4. $[1,2]$ पर $f(x)=\log x$

5. $[0, 1]$ पर $f(x)=ax^2+bx^2+cx+d$

6. $[a,b]$ पर $f(x)=x$

7. $[1, 2]$ पर $f(x)=(x-1)^{2/3}$

8. $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ पर $f(x)=x(x-1)(x-2)$

9. $[1, 3]$ पर $f(x)=x+\frac{1}{x}$

10. $[1, 4]$ पर $f(x)=\frac{1}{4x-1}$

11. परवलय $y=(x+3)^2$ पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्शी $(-3, 0)$ और $(-4, 1)$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

12. $y=x^3$ के आलेख पर एक बिंदु ज्ञात कीजिए जिस पर स्पर्शी $(1, 1)$ और $(3, 27)$ को मिलाने वाली ज़ीवा के समांतर हो।

13. उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिस पर $f(x)=x^2-6x+1$ से प्रदत्त फलन की स्पर्शी, बिंदुओं $(1,-4)$ और $(3,-8)$ को मिलाने वाली जीवा के समांतर हो।

14. अंतराल $[-1, 2]$ में वक्र $y=12(x+1)(x-2)$ पर बिंदु ज्ञात कीजिए जहाँ स्पर्शी x-अक्ष के समांतर हो।

11.8 अवकलों द्वारा सन्निकटन (Approximations by Differentials)

इस अनुच्छेद में, कुछ राशियों के सन्निकट मान ज्ञात करने में हम अवकलन का प्रयोग करेंगे।

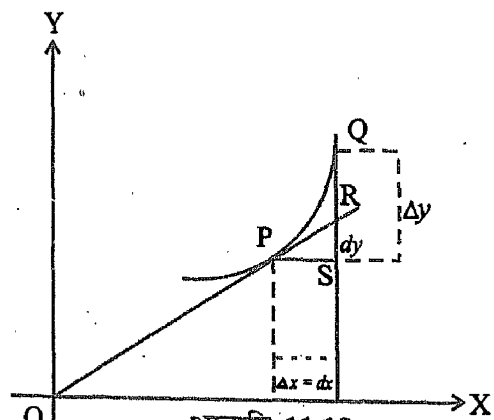
मान लीजिए $f: D\to \mathbf{R}$, जहाँ $D\subset \mathbf{R}$ एक प्रदत्त फलन है जिसे हम $y=f(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं। मान लीजिए Δx, x में छोटी वृद्धि निरूपित करती है ताकि x में वृद्धि के संगत y में वृद्धि $f(x+\Delta x)-f(x)$ से प्रदत्त है और Δy से निरूपित है।

हम जानते हैं कि

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=f'(x)$$

हम बिंदु x पर, y के अवकल को वृद्धि Δx के संगत $f'(x)\Delta x$ से परिभाषित करते हैं और 'dy' से निरूपित करते हैं।

[Δx, Δy, dx और dy के ज्यामिति अर्थ के लिए आकृति 11.19 देखिए।]



आकृति 11.19

अनेक परिस्थितियों में dy की गणना सरल होती है परंतु Δy की नहीं। dx को x का अवकल और dy को y का अवकल कहते हैं।

उदाहरण 41 $\sqrt{25.3}$ का सन्निकटन करने के लिए अवकल का प्रयोग कीजिए।

हल $y = \sqrt{x}$ लीजिए जहाँ $x = 25$ और $\Delta x = 0.3$

तब $$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x} = \sqrt{25.3} - \sqrt{25} = \sqrt{25.3} - 5$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{25.3} = 5 + \Delta y$$

ध्यान दीजिए कि Δy सन्निकटतया dy के बराबर है और

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}(0.3) \qquad (\text{चूँकि } y = \sqrt{x})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{25}}(0.3) = 0.03$$ से प्रदत्त है।

इस प्रकार, $\sqrt{25.3}$ का सन्निकट मान $5 + dy = 5 + 0.03 = 5.03$ है।

उदाहरण 42 28 के घनमूल का सन्निकट करने के लिए अवकल का प्रयोग कीजिए।

हल मान लीजिए $y = x^{1/3}$, जहाँ $x = 27$ और $\Delta x = 1$ लीजिए। इससे $x + dx = 28$ है तब,

$$(28)^{\frac{1}{3}} = (x + dx)^{\frac{1}{3}} = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}}$$

अब $$\Delta y = (x + \Delta x)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} = (28)^{\frac{1}{3}} - (27)^{\frac{1}{3}} = (28)^{\frac{1}{3}} - 3$$

$$\Rightarrow \quad (28)^{\frac{1}{3}} = 3 + \Delta y$$

ध्यान दीजिए कि Δy सन्निकटतया dy के बराबर है और

$$dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)\Delta x = \left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)\Delta x \qquad (\text{चूँकि } y = x^{1/3})$$

$$=\left[\frac{1}{3}(27)^{\frac{-2}{3}}\right]\Delta x \;=\left[\frac{1}{3}(3)^{-2}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3^2}\right]=\frac{1}{27}$$

इसलिए, $(28)^{\frac{1}{3}}$ का सन्निकट मान $3+\frac{1}{27}$, अर्थात् $\frac{82}{27}$ है।

प्रश्नावली 11.7

अवकल का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का सन्निकट मान दशमलव के तीन स्थानों तक ज्ञात कीजिए :

1. $(0.009)^{\frac{1}{3}}$ 2. $(25.2)^{\frac{1}{2}}$ 3. $(15)^{\frac{1}{4}}$ 4. $(26)^{\frac{1}{3}}$

5. $(255)^{\frac{1}{4}}$ 6. $(0.999)^{\frac{1}{10}}$ 7. $(31.9)^{\frac{1}{5}}$ 8. $(82)^{\frac{1}{4}}$

9. $\sqrt{401}$ 10. $\sqrt{0.0037}$ 11. $\sqrt{0.037}$

12. यदि $y = x^4 - 10$ और यदि x, 2 से परिवर्तित होकर 1.99 हो जाए, y में संगत सन्निकट परिवर्तन क्या होगा?

13. यदि $y = \sin x$ और x, $\frac{22}{14}$ से परिवर्तित होकर $\frac{\pi}{2}$ हो जाए, y में संगत सन्निकट परिवर्तन क्या होगा?

14. गर्म करने पर धातु की बनी एक गोल प्लेट इस प्रकार फैलती है कि उसकी त्रिज्या में 2% की वृद्धि होती है। यदि गर्म करने होने से पहले प्लेट की त्रिज्या 10 सेमी हो तो प्लेट के क्षेत्रफल में हुई सन्निकट वृद्धि ज्ञात कीजिए।

11.9 वक्र अनुरेखण (Curve Sketching)

इस अनुच्छेद में, हम कुछ वक्रों का अनुरेखण करने में अवकलन और इसके अनुप्रयोगों का प्रयोग करेंगे जिन वक्रों का अनुरेखण अन्यथा कठिन है। वास्तव में हम

(a) उस अंतराल को जिसमें वक्र वर्धमान है,

(b) उस अंतराल को जिसमें वक्र ह्रासमान है,

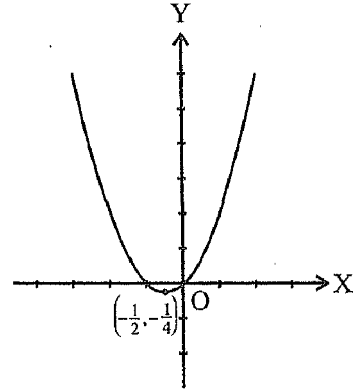
(c) उन बिंदुओं को जिन पर वक्र में घुमाव ले रहा है,

को ज्ञात करने में अवकलन का प्रयोग करेंगे और सममित तथा अन्य प्रेक्षणों को ध्यान में रखकर वक्र के अनुरेखण में इन सभी का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 43 वक्र $y = x^2 + x$ का अनुरेखण कीजिए।

हल वक्र एक बहुपदीय फलन है, अत: **R** पर संतत है।

$x = 0$ पर $y = 0$ है, इससे वक्र पर बिंदु $(0, 0)$ है। यदि $y = 0$, तब $x^2 + x = 0$ अर्थात् $x(x+1) = 0$। इससे $x = 0$ और $x = -1$ प्राप्त होता है। इसलिए $(-1, 0)$ भी वक्र पर है। इस प्रकार बिंदुओं $(0, 0)$ तथा $(-1, 0)$ पर वक्र x-अक्ष से मिलता है।



$y = x^2 + x$ का आलेख

आकृति 11.20

अब $\quad \frac{dy}{dx} = 2x + 1$

इसलिए $\quad \frac{dy}{dx} > 0$ यदि $2x + 1 > 0$ अर्थात् $x > \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \quad x > \frac{-1}{2}$ के लिए वक्र वर्धमान है।

तथा $\quad \frac{dy}{dx} < 0$ यदि $x < \frac{-1}{2}$

$\Rightarrow \quad x < \frac{-1}{2}$ के लिए वक्र ह्रासमान है।

इसके अतिरिक्त $\frac{d^2y}{dx^2} = 2$ और इससे $x = \frac{-1}{2}$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, इसका अर्थ है कि $x = \frac{-1}{2}$ पर y, स्थानीय निम्निष्ठ है। वास्तव में, $x = \frac{-1}{2}$ पर वक्र घुमाव लेता है।

कुछ और बिंदु प्राप्त करने के लिए हम निम्नलिखित सारणी बताते हैं :

x	1	2	–2	3	–3
y	2	6	2	12	6

इन तथ्यों के साथ हम आकृति 11.20 में दिखाए अनुसार वक्र का अनुरेखण करते हैं:

उदाहरण 44 वक्र $y = x^3 - 4x$ का अनुरेखण कीजिए।

हल $x = 0$ रखने पर $y = 0$, इससे $(0, 0)$ वक्र पर बिंदु है। यदि $y = 0$, तब $x(x^2 - 4) = 0$, इससे $x = 0$, $x = \pm 2$ प्राप्त होता है। इसलिए बिंदु

(2, 0), (–2, 0) भी वक्र पर हैं। अब

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$$

इससे $\frac{dy}{dx} > 0$ यदि $3x^2 - 4 > 0$ अर्थात् यदि $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ या $x < \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ $x > \frac{2}{\sqrt{3}}$ और $x < \frac{-2}{\sqrt{3}}$ के लिए वक्र वर्धमान है।

तथा $\frac{dy}{dx} < 0$ यदि $3x^2 - 4 > 0$ अर्थात् यदि $x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ या $x > \frac{-2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ $\frac{-2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$ के लिए वक्र ह्रासमान है। इस प्रकार, हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ तक वक्र वर्धमान है, इसके बाद $\frac{2}{\sqrt{3}}$ तक ह्रासमान है और पुनः वर्धमान है। अग्रतः, हम पाते हैं

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

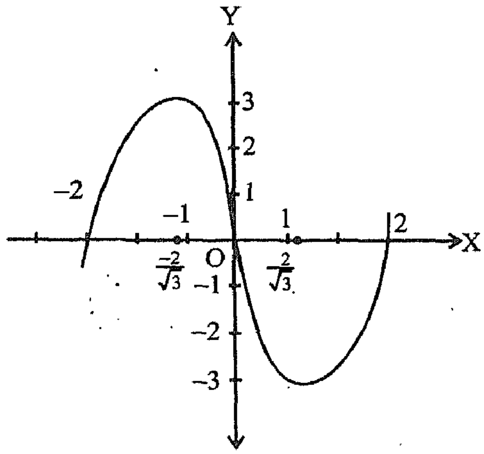
$$\Rightarrow \quad \left.\frac{d^2y}{dx}\right]_{x=\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{12}{\sqrt{3}} > 0 \text{ और } \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{x=\frac{-2}{\sqrt{3}}} = \frac{-12}{\sqrt{3}} < 0$$

इस प्रकार, $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ स्थानीय निम्निष्ठ का बिंदु तथा $x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ स्थानीय उच्चिष्ठ का बिंदु है।

वक्र पर कुछ और बिंदु ज्ञात करने के लिए हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं :

x	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{-2}{\sqrt{3}}$	1	–1
y	$\frac{-16}{3\sqrt{3}}$	$\frac{16}{3\sqrt{3}}$	–3	3

इन तथ्यों के आधार पर, हम आकृति 11.21 में दर्शाए वक्र का अनुरेखण करते हैं।



$y = x^2 - 4x$ का आलेख

आकृति 11.21

उदाहरण 45 (a) $y = \sin 2x$ (b) $y = 2 \sin 2x$

वक्रों का अनुरेखण कीजिए।

हल (a) $x = 0$ रखने पर $y = 0$ इससे $(0, 0)$ बिंदु वक्र पर है। अब $y = 0$ रखने पर $\sin 2x = 0$। इससे $x = 0, \ \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \ldots$ या $x = \frac{n\pi}{2}$, जहाँ n एक पूर्णांक है। इस प्रकार $\left(\frac{n\pi}{2}, 0\right)$ वक्र पर बिंदु है जहाँ n पूर्णांक है। तदनंतर प्रेक्षण कीजिए कि $\sin 2x$ एक विषम फलन है चूंकि $\sin(-2x) = -\sin(2x)$ अर्थात् ज्यों ही (x, y) वक्र पर एक बिंदु है, $(-x, -y)$ भी वक्र पर एक बिंदु है। इसलिए वक्र मूलबिंदु के सापेक्ष सममित है।

तथा $$y = \sin 2x$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{dy}{dx} = 2\cos 2x \text{ और } \frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin 2x$$

अब, $\frac{dy}{dx} = 0$ का अर्थ है $\cos 2x = 0$ जिससे $x = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}, \pm\frac{5\pi}{4}, \ldots$ प्राप्त होता है।

इस प्रकार $$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ यदि } x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \ldots \text{ और } x = \frac{-\pi}{4}, \frac{-5\pi}{4}, \ldots$$

और $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$, यदि $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{9\pi}{4}, \ldots$ और $x = \dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{-7\pi}{4}, \ldots$

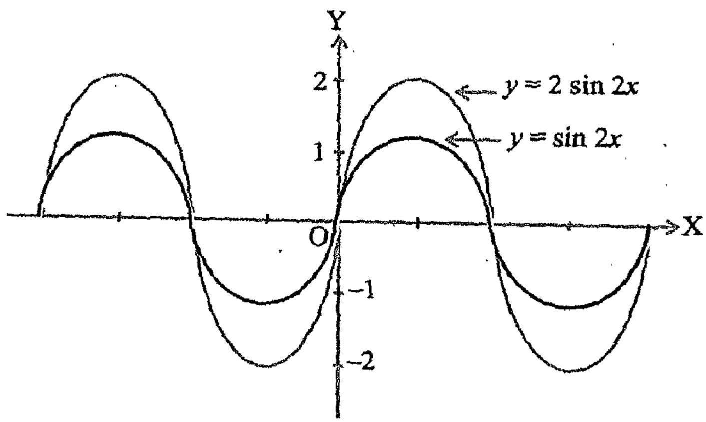
इसलिए, $x = \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}, \ldots$ तथा $x = \dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{-5\pi}{4}, \ldots$ स्थानीय निम्निष्ठ के बिंदु है। और इन सभी बिंदुओं पर स्थानीय निम्निष्ठ मान −1 है। तथा $x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \ldots$ और $x = \dfrac{-3\pi}{4}, \dfrac{-7\pi}{4}, \ldots$ स्थानीय उच्चिष्ठ के बिंदु हैं और इन सभी बिंदुओं पर स्थानीय उच्चिष्ठ मान 1 है।

अंत में, हम देखते हैं कि

$$\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi), \forall x$$

इससे अभिप्राय है कि फलन की आवर्तता π है दूसरे शब्दों में, π अंतराल पर वक्र के प्रतिरूप की पुनरावृत्ति होती है।

इन तथ्यों के आधार पर हम आकृति 11.22 जैसे वक्र का अनुरेखण करते हैं :



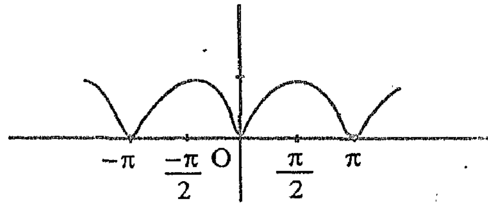
आकृति 11.22

(b) पाठक सत्यापित कर सकते हैं कि दिए वक्र के अनुरेखण के लिए वांछित विवरण वही है जो भाग (a) के लिए प्राप्त किया गया है केवल स्थानीय उच्चिष्ठ मान और स्थानीय निम्निष्ठ मान छोड़कर, जो क्रमशः 2 और −2 हैं। वक्र का अनुरेखण आकृति 11.22 जैसा है।

उदाहरण 46 वक्र $y = \sin^2 x$ का अनुरेखण कीजिए।

हल हम $y = \sin x$ के आलेख से परिचित हैं। इसकी आवर्तता 2π है इसके उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान क्रमशः 1 और −1 हैं।

आइए अब हम वक्र $y = \sin^2 x$ पर विचार करें। ध्यान दीजिए कि यह x-अक्ष को उन्हीं बिंदुओं पर मिलता है जहाँ $y = \sin x$, x-अक्ष को मिलता है तथा $\sin^2 x \geq 0, \forall x$, इसके अतिरिक्त, $\sin^2 x$ का महत्तम मान 1 और $\sin^2 x$ का न्यूनतम मान 0 (शून्य) है। इन तथ्यों को विचारते हुए, हम वक्र $y = \sin^2 x$ का अनुरेखण आकृति 11.23 की भाँति करते हैं:



$\sin^2 x$ का आलेख
आकृति 11.23

प्रश्नावली 11.8

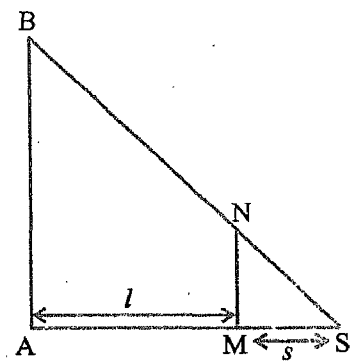
निम्नलिखित वक्रों का अनुरेखण कीजिए :

1. $y = 2\cos x$
2. $y = -\sin 2x$
3. $y = x^3 + 1$
4. $y = \sqrt{9 - x^2}$
5. $y = x^2 - 1$
6. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$
7. $y = x^4 - 1$
8. $y = \sin^3 x$
9. $y = 4 - (x-2)^2,\ 0 \leq x \leq 4$
10. अंतराल [1, 5] में $y = \sqrt{x-1}$
11. जब x, 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक परिवर्तित होता है वक्रों $y = \sin x$ और $y = \cos x$ का आलेख खींचिए।

विविध उदाहरण (MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 47 2 मीटर ऊँचाई का व्यक्ति 6 मीटर ऊँचे बिजली के खंभे से 5 किमी/घं. की समान चाल से चलता है। उसकी छाया की लंबाई की वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हल आकृति 11.24 में, मान लीजिए AB एक बिजली का खंभा है। B बिंदु पर बल्ब है और मान लीजिए MN व्यक्ति एक विशेष समय t पर खड़ा है। मान लीजिए AM = l मीटर और व्यक्ति की छाया MS है।



आकृति 11.24

पहले हम छाया की लंबाई MS को लंबाई AM के पदों में व्यक्त करते हैं। चूंकि ΔASB और ΔMSN समरूप हैं, हम पाते हैं :

$$\frac{MS}{AS} = \frac{MN}{AB} \qquad (1)$$

परंतु MN = 2 और AB = 6 है। मान लीजिए MS = s मीटर। तब

(1) $AS = 3s$ प्राप्त होता है और इससे $AM = 3s - s = 2s$

परंतु $AM = l$ इससे $l = 2s$ इसलिए

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2ds}{dt}$$

चूंकि $\frac{dl}{dt} = 5$ किमी/घं. (दिया है), इससे अनुसरित होता है कि

$$\frac{ds}{dt} = \frac{5}{2} \text{ किमी/घं.}$$

अतः, छाया की लंबाई में वृद्धि $\frac{5}{2}$ किमी/घं. की दर से होती है।

उदाहरण 48 वक्र $y = (x^3 - 1)(x - 2)$ के उन बिंदुओं पर स्पर्शी का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ वक्र x-अक्ष को काटता है।

हल चूंकि वक्र x-अक्ष को काटता है अतः $y = 0$ अर्थात् उन बिंदुओं पर

$$(x^3 - 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad (x - 1)(x^2 + x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x = 1, x = 2 \text{ और } x^2 + x + 1 = 0$$

परंतु, $x^2 + x + 1 = 0$ से कोई वास्तविक मूल प्राप्त नहीं होता है। इसलिए वक्र के x-अक्ष से प्रतिच्छेदन बिंदु $(1, 0)$ और $(2, 0)$ हैं।

अब किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्शी का ढाल

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 1)1 + 3x^2(x - 2) = 4x^3 - 6x^2 - 1 \text{ से प्रदत्त है।}$$

इस प्रकार, $(1, 0)$ पर स्पर्शी का ढाल $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(1,0)} = -3$

और $(2, 0)$ पर स्पर्शी का ढाल $= \left.\frac{dy}{dx}\right]_{(2,0)} = 7$

अत: (1, 0) और (2, 0) पर स्पर्शियों के समीकरण क्रमश:

$$y - 0 = -3(x - 1) \text{ या } y + 3x = 3$$

तथा $$y - 0 = 7(x - 2) \text{ या } y - 7x + 14 = 0$$

उदाहरण 49 वक्र $9y^2 = x^3$ पर उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जहाँ पर वक्र का अभिलंब अक्षों से समान अंतखंड काटता है।

हल मान लीजिए निर्देशांक अक्षों से अभिलंब के समान अंत:खंडों की लंबाई a है, तब अभिलंब x-अक्ष को बिंदुओं $(a, 0)$ या $(-a, 0)$ पर और y-अक्ष को बिंदु $(0, a)$ पर मिलता है। इससे अभिलंब का ढाल या तो 1 या –1 है। परंतु अभिलंब का ढाल

$$\frac{1}{\text{स्पर्शी की ढाल}} = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = -\frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{dx}{dy} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \mp 1 \text{ से प्रदत्त है।}$$

अब $9y^2 = x^3$ को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हम पाते हैं,

$$18y\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{18y} = \frac{x^2}{6y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{6y} = \pm 1 \quad \left(\text{क्योंकि } \frac{dy}{dx} = \pm 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \pm 6y, \text{ अर्थात् } x^4 = 36y^2$$

$$\Rightarrow \quad x^4 = 36\left(\frac{x^3}{9}\right) \quad \left(\text{क्योंकि } y^2 = \frac{x^3}{9}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x^3(x - 4) = 0$$

$\Rightarrow \qquad x = 0,4$

परंतु $x \neq 0$ (क्यों?) इससे $x = 4$

चूंकि $9y^2 = x^3, y^2 = \frac{64}{9}$, अर्थात् $y = \pm\frac{8}{3}$

इस प्रकार, अभीष्ट बिंदु $\left(4, \frac{8}{3}\right)$ और $\left(4, \frac{-8}{3}\right)$ है।

उदाहरण 50 वक्र $y = ax^3 + bx^2 + cx + 5$, x को बिंदु $(-2, 0)$ पर स्पर्श करता है और y-अक्ष को उस बिंदु पर काटता है जहाँ इसकी प्रवणता 3 है। a, b और c ज्ञात कीजिए।

हल चूंकि $(-2, 0)$ वक्र पर स्थित है, हम पाते हैं

$$-8a + 4b - 2c + 5 = 0 \qquad (1)$$

मान लीजिए y-अक्ष पर कोई बिंदु $Q(0, y)$ है।

अब किसी बिंदु (x, y) पर वक्र की प्रवणता

= किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्शी की प्रवणता

$$= \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$

इसलिए $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(0,y)} = c$ परंतु $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(0,y)} = 3$ (दिया है)

इससे $c = 3$, तब (1) से

$$-8a + 4b - 1 = 0$$

प्राप्त होता है। (2)

और चूंकि $(-2, 0)$ पर वक्र x-अक्ष को स्पर्श करता है, अर्थात् x-अक्ष $(-2, 0)$ पर स्पर्शी है और ढाल 0 है, इससे

$$\left.\frac{dy}{dx}\right]_{(-2,0)} = 0$$

$\Rightarrow \qquad 12a - 4b + c = 0$

$\Rightarrow \qquad 12a - 4b + 3 = 0 \qquad$ (क्योंकि $c = 3$) (3)

(2) और (3) को हल करने पर, हम $a = -\frac{1}{2}$ और $b = -\frac{3}{4}$ पाते हैं।

उदाहरण 51 दिखाइए कि

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x),\ x > 0$$

से प्रदत्त फलन f, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में सदैव वर्धमान फलन है।

हल हम पाते हैं,

$$f(x) = \tan^{-1}(\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x + \cos x)^2}\ (\cos x - \sin x)$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{1+(\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x)}$$

$$= \frac{\cos x - \sin x}{2 + \sin 2x} \qquad (\text{क्योंकि } \sin 2x = 2\sin x \cos x)$$

अब, दिए अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में, $2 + \sin 2x$ सदैव 0 से बड़ा है और इससे हम पाते हैं :

$$f'(x) > 0 \text{ यदि } \cos x - \sin x > 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) > 0 \text{ यदि } \cos x > \sin x \text{ or } \cot x > 1$$

अब $\cot x > 1$ यदि $\tan x < 1$, अर्थात्, यदि $0 < x < \frac{\pi}{4}$

इससे अंतराल $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में $f'(x) > 0$

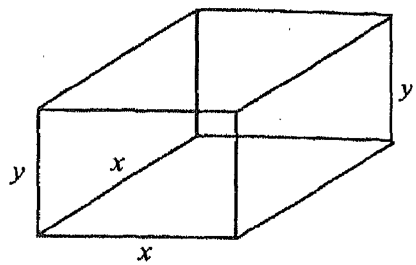
अतः, $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ में f एक वर्धमान फलन है।

उदाहरण 52 c^2 वर्ग इकाई क्षेत्रफल के दिए कार्डबोर्ड के टुकड़े से वर्गाकार आधार का एक खुला संदूक बनाना है। दिखाइए कि संदूक का महत्तम आयतन $\frac{c^2}{6\sqrt{3}}$ घन इकाई है।

हल मान लीजिए संदूक के वर्गाकार आधार की भुजा x और संदूक की ऊँचाई y है। तब खुले संदूक का पृष्ठीय क्षेत्रफल $4xy + x^2$ से प्रदत्त है (आकृति 11.25)। इसलिए, हम पाते हैं

$$4xy + x^2 = c^2$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{c^2 - x^2}{4x}$$



आकृति 11.25

यदि संदूक का आयतन V है, तब

$$V = x^2 y = \frac{x}{4}\left(c^2 - x^2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{\left(c^2 - x^2\right)}{4} \\ \dfrac{d^2V}{dx^2} = -x - \dfrac{x}{2} = \dfrac{-3}{2}x \end{cases}$$

अब $\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \frac{c^2 - x^2}{4}$, अर्थात् $3x^2 = c^2$ जिससे $x = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$ प्राप्त होता है।

चूंकि $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right]_{x=\frac{c}{\sqrt{3}}} = \frac{-3c}{2\sqrt{3}} < 0$, इससे अनुसरित होता है कि $x = \frac{c}{\sqrt{3}}$ उच्चिष्ठता का बिंदु है और इससे संदूक का उच्चिष्ठ आयतन

$$V]_{x=\frac{c}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{4} \quad \frac{c}{\sqrt{3}} \left(c^2 - \frac{c^2}{3}\right) = \frac{c^3}{6\sqrt{3}}$$

से प्रदत्त है।

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 11)

1. किसी निश्चित आधार b के एक समद्विबाहु त्रिभुज की भुजाएँ 3 सेमी/से की दर से ह्रासमान है। किस तीव्रता से इसका क्षेत्रफल घट रहा है, जब दोनों समान भुजाएँ आधार के बराबर हैं?
2. वक्र $x^2 = 4y$ के अभिलंब का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिंदु $(1, 2)$ से होकर जाता है।
3. दिखाइए कि वक्र

$$x = a\cos\theta + a\theta\sin\theta, y = a\sin\theta - a\theta\cos\theta$$

के किसी बिंदु θ पर अभिलंब मूलबिंदु से अचर दूरी पर है।

4. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर

$$f(x) = \frac{4\sin x - 2x - x\cos x}{2 + \cos x}$$

से प्रदत्त फलन f(i) वर्धमान (ii) ह्रासमान है।

5. अंतराल ज्ञात कीजिए जिन पर

$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$ से प्रदत्त फलन f(i) वर्धमान (ii) ह्रासमान है।

6. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अंतर्गत उस समद्विबाहु त्रिभुज का उच्चिष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका शीर्ष दीर्घ अक्ष का एक सिरा है।

7. अद्‌र्धवृत्ताकार आच्छादित आयताकार, खुली खिड़की है। खिड़की की संपूर्ण परिमाप 10 मीटर है। पूर्णतया खुली खिड़की से अधिकतम प्रकाश आने के लिए खिड़की की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

8. त्रिभुज की भुजाओं से a और b दूरी पर त्रिभुज के कर्ण पर स्थित एक बिंदु है। दिखाइए कि कर्ण की अधिकतम लंबाई $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ है।

9. उन बिंदुओं को ज्ञात कीजिए जिन पर $f(x) = (x-2)^4 (x+1)^3$ से प्रदत्त फलन f, (i) स्थानीय उच्चिष्ठ (ii) स्थानीय निम्निष्ठ (iii) नत परिवर्तन बिंदु रखता है।

10. $f(x) = \cos^2 x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$ से प्रदत्त फलन f का निरपेक्ष उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

11. मान लीजिए [0, 1] पर f और g अवकलनीय है जिससे $f(0) = 2, g(0) = 0, f(1) = 6$ और $g(1) = 2$, दिखाइए कि एक बिंदु $c \in (0, 1)$ का अस्तित्व है जिससे $f'(c) = 2g'(c)$

12. माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हेतु दिखाइए कि $x > 0$ के लिए

$$\sin x < x$$

13. मान लीजिए [0, 1] पर परिभाषित f दो बार अवकलनीय फलन है जिससे सभी

$x \in [0, 1]$ के लिए $|f''(x)| \leq 1$

यदि $f(0) = f(1)$, तब दिखाइए कि

सभी $x \in [0, 1]$ के लिए $|f'(x)| < 1$

14. मान लीजिए $[a, b]$ पर एक फलन परिभाषित है जिससे सभी $x \in (a, b)$ के लिए $f'(x) > 0$, तब सिद्ध कीजिए कि (a, b) पर f एक वर्धमान फलन है।

15. माध्यमान प्रमेय का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए

$$\text{सभी } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ के लिए } \tan x > x$$

16. $f(x) = \log_e x,\ x \in [1, 2]$ से प्रदत्त फलन f के लिए माध्यमान प्रमेय की सत्यता सत्यापित कीजिए।

17. दिखाइए R त्रिज्या के गोले के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ है। अधिकतम आयतन भी ज्ञात कीजिए।

18. दिखाइए कि α अद्र्धशीर्ष कोण तथा ऊँचाई h के लंब वृत्तीय शंकु के अंतर्गत अधिकतम आयतन के बेलन की ऊँचाई शंकु की एक तिहाई है और बेलन का अधिकतम आयतन $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2\alpha$ है।

अनिश्चित समाकलन
(INDEFINITE INTEGRALS) 12

12.1 भूमिका (Introduction)

अध्याय 5 में व्याख्या की जा चुकी है, कि एक अंतराल I के प्रत्येक बिंदु पर दिए फलन f के संगत हम f' प्राप्त कर सकते हैं। यदि इसके अतिरिक्त I के प्रत्येक बिंदु पर f' ज्ञात हो तो क्या हम फलन f ज्ञात कर सकते हैं? फलनों के ऐसे समुच्चय जिसमें प्रत्येक सदस्य का अवकलज दिया गया फलन है, को दिए फलन का प्रति अवकलज (Antiderivative) कहते हैं। अग्रत: वह सूत्र जो इन प्रति अवकलजों (Antiderivatives) को प्रकट करता है, को उस फलन का अनिश्चित समाकलन कहते हैं। इसे प्राप्त करने की प्रविधि को समाकलन करना कहते हैं। इस प्रकार की समस्या अनेक व्यावहारिक परिस्थितियों में आती है। उदाहरणत: यदि हमें किसी वस्तु की किसी क्षण की तत्क्षणित वेग ज्ञात हो, तो स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है, कि क्या हम दिए समय पर उसकी स्थिति ज्ञात कर सकते हैं? इस प्रकार की अनेक व्यावहारिक और सैद्धांतिक परिस्थितियाँ आती हैं, जहाँ समाकलन की संक्रिया निहित होती है। समाकलन-गणित का विकास निम्नलिखित प्रकार की समस्याओं के हल करने के प्रयासों का प्रतिफल है,

(a) यदि फलन का अवकलज ज्ञात हो, तो उस फलन के ज्ञात करने की समस्या,

(b) एक फलन के लेख-चित्र द्वारा सीमित, दिए प्रतिबंध के अंतर्गत घिरे क्षेत्रफल को ज्ञात करने की समस्या।

उपर्युक्त दोनों समस्याएँ दो प्रकार के समाकलन की ओर इंगित करती हैं। इन्हें क्रमश: अनिश्चित समाकलन और निश्चित समाकलन कहते हैं। इन दोनों का सम्मिलित रूप समाकलन-गणित है।

इस अध्याय में हम अनिश्चित समाकलनों का अध्ययन करेंगे, साथ ही साथ समाकलन करने की कुछ विधियों को सीखेंगे।

12.2 अनिश्चित समाकलन को अवकलज के व्युत्क्रम संक्रिया के रूप में (Indefinite Integrals as Antiderivatives)

हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \tag{1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = x^2 \tag{2}$$

और $$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \tag{3}$$

हम देखते हैं, कि (1) में फलन $\cos x$, फलन $\sin x$ का अवकलज है। इसे हम इस प्रकार भी कहते हैं कि $\cos x$ का प्रति-अवकलज या समाकलन $\sin x$ है। इसी प्रकार (2) और (3) से x^2 और e^x के प्रति अवकलज या समाकलन क्रमशः $\frac{x^3}{3}$ और e^x हैं।

फिर हम देखते हैं, कि किसी अचर C का अवकलज शून्य है, अतः हम (1), (2) और (3) को पुनः लिख सकते हैं कि,

$$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + C\right) = x^2$$

और $$\frac{d}{dx}\left(e^x + C\right) = e^x$$

इस प्रकार हम देखते हैं, कि उपर्युक्त फलनों के समाकलन अद्‌वितीय नहीं हैं। वस्तुतः इन फलनों में से प्रत्येक के अंततः अनेक प्रति अवकलज हैं, जिन्हें हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय से स्वेच्छ अचर C को कोई मान प्रदान करके प्राप्त कर सकते हैं। यही कारण है कि C को प्रथानुसार 'स्वेच्छ अचर' कहते हैं। वस्तुतः C 'प्राचल' है, जिसके मान को परिवर्तित करके हम दिए फलन के प्रति अवकलजों या समाकलनों के विभिन्न सदस्यों को प्राप्त करते हैं।

व्यापकतः यदि फलन F ऐसा है, कि $\frac{d}{dx}F(x) = f(x), \forall x \in I$, तो प्रत्येक स्वेच्छ अचर C के लिए,

$$\frac{d}{dx}[F(x)+C] = f(x),\ x \in I$$

इस प्रकार $\{F(x) + C, C \in R\}$, $f(x)$ के प्रति अवकलजों के 'कुल' को व्यक्त करता है, जहाँ C समाकलन का स्वेच्छ अचर या प्राचल है।

नीचे हम सिद्ध करते हैं, कि दो फलन, जिनके अवकलज समान हों, में एक अचर का अंतर होता है। मान लीजिए कि g और h दो फलन इस प्रकार के हैं, कि जिनके अंतराल I में अवकलज समान हैं। यदि

$$f(x) = g(x) - h(x),\ x \in \text{I}$$

तो $\frac{df}{dx} = f'(x) = g'(x) - h'(x) = 0$, (परिकल्पना से अर्थात् f के x के सापेक्ष परिवर्तन की दर प्रत्येक स्थान पर शून्य है, अतः f एक अचर है।

उपर्युक्त परिणाम के अनुसार यह निष्कर्ष निकालना न्याय संगत है, कि 'कुल' $\{\text{F}(x) + \text{C}, \text{C} \in \text{R}\}$, $f(x)$ के सभी संभव प्रति अवकलजों को प्रकट करता है।

हम एक नए प्रतीक से परिचित होते हैं, जो प्रति अवकलजों के समूचे समूह को निरूपित करेगा। यह प्रतीक $\int f(x)\,dx$ है, जो $f(x)$ *का x के सापेक्ष अनिश्चित समाकलन के रूप में पढ़ा जाता है*। प्रतीकतः हम

$$\int f(x)\,dx = \text{F}(x) + \text{C} \qquad (4)$$

लिखते हैं।

C को समाकलन का अचर कहते हैं। $\{\text{F}(x) + \text{C}\}$ फलनों के उस समुच्चय को निरूपित करता है, जिसका प्रत्येक सदस्य $f(x)$ का प्रति अवकलज या संक्षेपतः समाकलन कहलाता है।

संकेतन: यदि $\frac{dy}{dx} = f(x)$ तो हम

$$y = \int f(x)\,dx$$

लिखते हैं।

सुविधा के लिए हम एक सारणी के रूप में निम्नलिखित प्रतीकों / रूपों / वाक्यांशों को उनके अर्थों सहित उल्लिखित करते हैं।

सारणी 12.1

प्रतीक/पद/शब्द समूह		अर्थ
$\int f(x)\,dx$	:	$f(x)$ का x के सापेक्ष समाकलन
$\int f(x)dx$ में $f(x)$	:	समाकल्य
$\int f(x)\,dx$ में x	:	समाकलन का चर
$f(x)$ का समाकलन	:	F एक फलन जिसके लिए $\text{F}'(x) = f(x)$
स्वेच्छ अचर	:	कोई एक वास्तविक संख्या C जिसे अचर के रूप में समझ सकते हैं।

हम बहुत से प्रमुख फलनों के अवकलजों के सूत्र जानते हैं। इन सूत्रों के संगत हम समाकलन के प्रमाणिक सूत्रों को तुरंत लिख सकते हैं। इन प्रमाणिक सूत्रों की सूची निम्नलिखित है, जिसका हम समाकलनों के निकालने में प्रयोग करेंगे।

अवकलज (Derivatives)	संगत समाकलन (प्रति अवकलज) (Integrals (Antiderivatives))
(i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$;	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, प्रत्येक परिमेय संख्या $n \neq -1$ के लिए।

विशिष्ट रूप में हम देखते हैं, कि

(i) $\frac{d}{dx}(x) = 1$;	$\int dx = x + C$
(ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$;	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$
(iii) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$;	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$
(iv) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$;	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$
(v) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$;	$\int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$
(vi) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$;	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$
(vii) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x$;	$\int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + C$
(viii) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C$
(ix) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$
(x) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$;	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + C$

(xi) $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{\left(1+x^2\right)}$; $\int \frac{dx}{1+x^2} = -\cot^{-1} x + C$

(xii) $\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$; $\int e^x\, dx = e^x + C$

(xiii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$; $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a} + C$

(xiv) $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x + C$

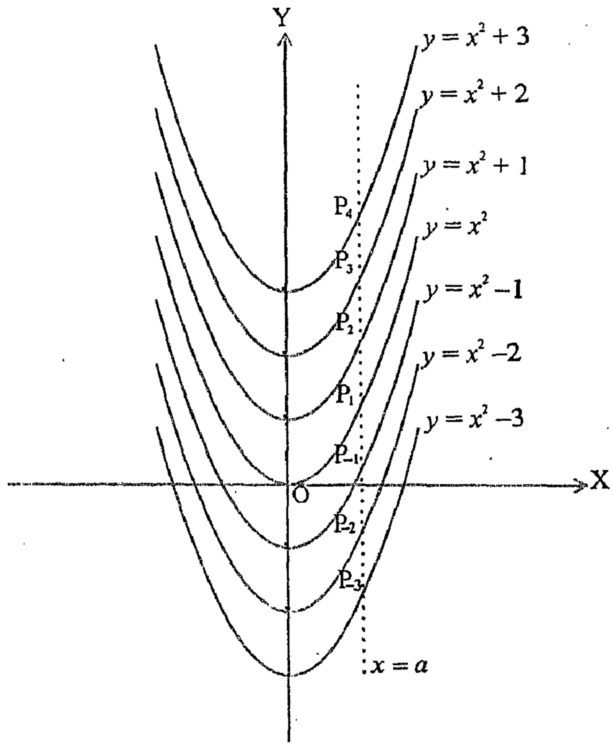
(xv) $\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$; $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\operatorname{cosec}^{-1} x + C$

टिप्पणी प्रयोग में हम प्राय: उस अंतराल का जिक्र नहीं करते, जिसमें विभिन्न फलन परिभाषित हैं। तथापि किसी भी विशिष्ट प्रश्न के संदर्भ में इसको भी ध्यान में रखना चाहिए।

12.2.1 *अनिश्चित समाकलन का ज्यामितीय निरूपण* (*Geometrical interpretation of indefinite integral*)

मान लीजिए कि $f(x) = 2x$, तो $\int f(x)\, dx = x^2 + C$

C के विभिन्न मानों के संगत हम विभिन्न समाकलन पाते हैं। ज्यामिती दृष्टि से सभी समाकलन अत्यंत रूप में समान हैं। इस प्रकार $y = x^2 + C$, जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है, एक समाकलनों के 'कुल' को निरूपित करता है, C को विभिन्न मान प्रदान करके हम कुल के विभिन्न सदस्यों को प्राप्त करते हैं। इस सभी का सम्मिलन अनिश्चित समाकलन है। स्पष्टत: प्रत्येक समाकंलन एक परवलय को निरूपित करता है, जिसका अक्ष y-अक्ष के अनु है।



आकृति 12.1

$C=0$ के संगत हम $y=x^2$ पाते हैं, जो एक परवलय है, जिसका शीर्ष मूल-बिंदु है। $C=1$ के संगत वक्र $y=x^2+1$, परवलय $y=x^2$ को एक मात्रक y-अक्ष के अनु ऊपर की ओर धनात्मक दशा में स्थानान्तरित करने पर प्राप्त होता है। $C=-1$ के संगत वक्र $y=x^2-1$, परवलय $y=x^2$ को एक मात्रक y-अक्ष के अनुदिश ऋणात्मक दिशा में स्थानांतरित करके प्राप्त होता है। इस प्रकार C के प्रत्येक धनात्मक मान के संगत $y=x^2+C$ द्वारा निरूपित परवलय अपना शीर्ष y-अक्ष पर धनात्मक दिशा की ओर, और C के ऋणात्मक मान के संगत $y=x^2+C$ द्वारा निरूपित परवलय अपना शीर्ष y-अक्ष पर ऋणात्मक दिशा की ओर रखता है। इन परवलयों में से कुछ को आकृति 12.1 में दर्शाया गया है।

अब हम इन परवलयों के रेखा $x=a$ जो y-अक्ष के समांतर है, द्वारा प्रतिछेदन पर विचार करते हैं, आकृति में हमने $a>0$ लिया है। निम्नलिखित निष्कर्ष $a<0$ के लिए भी समानतः लागू है। यदि रेखा $x=a$, परवलयों $y=x^2, y=x^2+1, y=x^2+2, y=x^2-1, y=x^2-2$ को क्रमशः P_1, P_2, P_3, P_{-1}, P_{-2} इत्यादि बिंदुओं पर काटती है तो इन सभी बिंदुओं पर $\frac{dy}{dx}$ का मान $2a$ है। यह निर्देशित करता है, कि इन सभी बिंदुओं पर स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं। इस प्रकार $\int 2x\,dx = x^2 + C = FC(x), C \in R$ का अर्थ है, कि इन वक्रों के रेखा $x=a$ के प्रतिच्छेदन बिंदुओं पर वक्रों की स्पर्शियाँ समांतर हैं जहाँ $a \in R$ है।

अग्रतः, निम्नांकित कथन

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C = y\ (\text{माना}),$$

जहाँ C प्राचल है, वक्रों के एक कुल को निरूपित करता है। C के विभिन्न मानों के संगत हमें इस कुल के विभिन्न सदस्य प्राप्त होते हैं। इन सदस्यों को हम किसी एक सदस्य को y-अक्ष के अनु स्थानांतरित करके प्राप्त कर सकते हैं। निश्चित समाकलन का ज्यामितीय निरूपण यही है।

12.2.2 *अनिश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म* (*Some properties of the indefinite integral*)

(i) निम्नलिखित परिणामों के अनुसार

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$$

और $$\int f'(x)\,dx = f(x) + C, \text{ जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है,}$$

अवकलन और समाकलन की संक्रियाएँ परस्पर प्रतिलोम संक्रियाएँ हैं।

उपपत्ति मान लीजिए कि $F(x), f(x)$ का एक प्रति अवकलज है, अर्थात्

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

तो $$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

इसलिए $\frac{d}{dx}\int f(x)\ dx = \frac{d}{dx}\ (F(x) + C)$

$$= \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

इसी प्रकार हम पाते हैं, कि

$$f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$$

अतः $\int f'(x)\ dx = f(x) + C$, जहाँ C समाकलन अचर है।

(ii) दो अनिश्चित समाकलन, जिनके अवकलज समान हैं एक ही कुल की वक्रों को निरूपित करते हैं और इस प्रकार समतुल्य हैं।

उपपत्ति मान लीजिए कि $\frac{d}{dx}\int f(x)\ dx = \frac{d}{dx}\int g(x)\ dx$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx - \int g(x)dx\right] = 0$$

अतः $\int f(x)dx - \int g(x)dx = C$, जहाँ $C \in R$

या $\int f(x)dx = \int g(x)dx + C$

इस प्रकार वक्रों के कुल $\left\{\int f(x)dx + C_1, C_1 \in R\right\}$

और $\left\{\int g(x)dx + C_2\ ;\ C_2 \in R\right\}$ समतुल्य हैं।

इस प्रकार, $\int f(x)dx$ और $\int g(x)dx$ समतुल्य हैं।

टिप्पणी दो कुलों $\left\{\int f(x)dx + C_1, C_1 \in R\right\}$ और $\left\{\int f(x)dx + C_2, C_2 \in R\right\}$ के समतुल्यता को प्रथानुसार $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ लिखकर व्यक्त करते हैं। इसमें प्राचल का वर्णन नहीं है।

(iii) $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

उपपत्ति प्रगुण (i) से

$$\frac{d}{dx}\left[\int (f(x)+g(x))dx\right] = f(x)+g(x) \qquad (1)$$

तथा

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx+\int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx+\frac{d}{dx}\int g(x)dx$$

$$= f(x) + g(x) \qquad (2)$$

प्रगुण (ii) के अनुसार दो समाकलन जिनके अवकलज समान हों, समतुल्य होते हैं, अतः (1) और (2) से निष्कर्ष यह है,

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

(iv) किसी वास्तविक संख्या k के लिए $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

उपपत्ति प्रगुण (i) द्वारा $\frac{d}{dx}\int kf(x)\,dx = kf(x)$

और $$\frac{d}{dx}\left[k\int f(x)dx\right] = k\frac{d}{dx}\int f(x)dx = kf(x)$$

अतः प्रगुण (ii) के प्रयोग द्वारा हम पाते हैं, कि

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

(v) प्रगुणों (iii) और (iv) को सीमित संख्या के फलनों $f_1, f_2, ..., f_n$ और संगत वास्तविक संख्याओं $k_1, k_2, ..., k_n$ के लिए भी व्यापकीकरण किया जा सकता है जैसा कि निम्नलिखित है

$$\int [k_1f_1(x)+k_2f_2(x)+...+k_nf_n(x)]dx = k_1\int f_1(x)\,dx+k_2\int f_2(x)\,dx+...+k_n\int f_n(x)\,dx$$

निम्नलिखित में, दिए गए फलन के प्रति अवकलज ज्ञात करने में हम सहजतापूर्वक ऐसे फलन की खोज करते हैं, जिसका अवकलज दिया गया फलन हो। अभीष्ट फलन की इस प्रकार की खोज, जो दिए फलन के प्रति अवकलज ज्ञात करने के लिए की जाती है, को प्रेक्षण द्वारा समाकलन कहते हैं।

उदाहरण 1 प्रेक्षण विधि का प्रयोग करके निम्नांकित फलनों का प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

(i) $\sin 2x$ (ii) $(4e^{3x} + 1)$ (iii) $\frac{1}{x}, x \neq 0$

हल (i) हम ऐसे फलन की खोज करते हैं, जिसका अवकलज $\sin 2x$ है। हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\cos 2x = -2\sin 2x$$

और $$\sin 2x = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(\cos 2x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)$$

अत: $\sin 2x$ का एक प्रति अवकलज $-\frac{1}{2}\cos 2x$ है।

(ii) हम ऐसे फलन की खोज करते हैं, जिसका अवकलज $4e^{3x} + 1$ है।

ध्यान दीजिए कि $\frac{d}{dx}\left(e^{3x}\right) = 3e^{3x}$ और $\frac{d}{dx}(x) = 1$

इसलिए $$\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}e^{3x} + x\right) = 4e^{3x} + 1$$

इसलिए $4e^{3x} + 1$ का एक प्रति अवकलज $\frac{4}{3}e^{3x} + x$ है।

(iii) हम जानते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}, x > 0 \text{ और } \frac{d}{dx}(\log(-x)) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}, x < 0$$

इन दोनों को मिलाने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(\log|x|) = \frac{1}{x}, x \neq 0$$

इस प्रकार $\int \frac{1}{x}dx = \log|x|$, $\frac{1}{x}$ के प्रति अवकलजों में से एक है।

उदाहरण 2 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int\left(2x^2+e^x\right)dx$ (ii) $\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$ (iii) $\int\left(x^{\frac{2}{3}}+2e^x-\frac{1}{x}\right)dx$

हल (i) हम पाते हैं

$$\int\left(2x^2+e^x\right)dx=\int 2x^2dx+\int e^x dx \qquad \text{[प्रगुण (v) द्वारा]}$$

$$=\left(2\frac{x^{2+1}}{2+1}+C_1\right)+\left(e^x+C_2\right); \qquad C_1, C_2 \text{ समाकलन अचर हैं।}$$

$$=\frac{2}{3}x^3+e^x+C_1+C_2$$

$$=\frac{2}{3}x^3+e^x+C, \text{ जहाँ } C=C_1+C_2 \text{ समाकलन अचर हैं।}$$

(ii) हम पाते हैं

$$\int\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx=\int\left(x-2+\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\int x\,dx-2\int dx+\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-2x+\log|x|+C$$

(iii) हम पाते हैं

$$\int\left(x^{\frac{2}{3}}+2e^x-\frac{1}{x}\right)dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx+\int 2e^x dx-\int\frac{1}{x}dx$$

$$=\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}+2e^x-\log|x|+C$$

$$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+2e^x-\log|x|+C$$

उदाहरण 3 निम्नांकित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \left(2x - 3\cos x + e^x\right) dx$ (ii) $\int \left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right) dx$

(iii) $\int \sec x(\sec x + \tan x) dx$

हल (i) हम पाते हैं

$$\int \left(2x - 3\cos x + e^x\right) dx = \int 2x dx - \int 3\cos x\, dx + \int e^x dx$$

$$= 2\int x dx - 3\int \cos x\, dx + \int e^x dx$$

$$= 2\frac{x^2}{2} - 3\sin x + e^x + C = x^2 - 3\sin x + e^x + C$$

(ii) $$\int \left(2x^2 - 3\sin x + 5\sqrt{x}\right) dx = 2\int x^2 dx - 3\int \sin x\, dx + 5\int \sqrt{x}\, dx$$

$$= 2\frac{x^3}{3} + 3\cos x + 5\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^3 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(iii) $$\int \sec x(\sec x + \tan x)\, dx = \int \sec^2 x\, dx + \int \sec x \tan x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

उदाहरण 4 यदि $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ और $f(2) = 0$ तो $f(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है कि $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$

इसलिए $f(x) = \int \left(4x^3 - \frac{3}{x^4}\right) dx$

$$= 4\int x^3 dx - 3\int x^{-4} dx$$

$$= 4\frac{x^4}{4} - 3\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = x^4 + \frac{1}{x^3} + C$$, जहाँ C समाकलन अचर है।

प्राचल C का मान इस तथ्य के आधार पर ज्ञात किया जाता है, कि $f(2) = 0$

चूंकि $$f(2) = 16 + \frac{1}{8} + C$$

अर्थात् $$0 = \frac{129}{8} + C$$

या $$C = \frac{-129}{8}$$

इस प्रकार $f(x) = x^4 + \frac{1}{x^3} - \frac{129}{8}$

टिप्पणी

(1) यदि समाकलन का चर x के अतिरिक्त अन्य कोई है, तो समाकलन के सूत्र तदनुसार अनुकूलित कर लिए जाते हैं। उदाहरणत:

$$\int y^5 dy = \frac{1}{5+1} y^{5+1} + C = \frac{1}{6} y^6 + C$$

प्राप्त निश्चित समाकलन की शुद्धता की जाँच के लिए हम समाकलन का अवकलज ज्ञात करते हैं। यदि यह अवकलज समाकल्य के बराबर हो तो समाकलन शुद्ध है, अन्यथा नहीं। उदाहरण के लिए उदाहरण 3(i) में हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 - 3\sin x + e^x + C\right) = 2x - 3\cos x + e^x$$

जो दिए समाकल्य के समान है। अत: उदाहरण 3(i) में प्राप्त अनिश्चित समाकलन शुद्ध है।

(2) जब कभी $\int f(x)dx$ अनिश्चित समाकलन का मान $F(x)$ प्राप्त होता है, तो हम प्रथानुसार $\int f(x)dx = F(x) + C$, जहाँ C समाकलन अचर अथवा प्राचल है लिखते हैं। सामान्यत: हम

$\int f(x)dx = F(x) + C$ लिखते हैं, जहाँ C समाकलन अचर (प्राचल) है, जिसकी व्याख्या नहीं करते हैं।

12.2.3 *अवकलज और समाकलन संक्रियाओं की तुलना (Comparison between differentiation and integration)*

1. दोनों फलनों पर संक्रियाएँ हैं।

2. दोनों रैखिक हैं। इसके निम्नलिखित कारण हैं।

(i) $$\frac{d}{dx}\left[f_1(x)+f_2(x)\right] = \frac{d}{dx}f_1(x)+\frac{d}{dx}f_2(x)$$

और $$\int\left[f_1(x)+f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx$$

(ii) अचर को अवकलन या समाकलन चिह्न के बाहर लिया जा सकता है; जैसे

$$\frac{d}{dx}(kf(x)) = k\frac{d}{dx}f(x)$$

और $$\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$$

3. हम पहले से ही जानते हैं कि सभी फलन अवकलनीय नहीं होते हैं। ठीक इसी प्रकार सभी फलन समाकलनीय भी नहीं होते हैं। हम अनावकलनीय और अनसमाकलनीय फलनों के विषय में उच्च कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

4. यदि किसी फलन के अवकलज का अस्तित्व हो तो वह अद्‌वितीय होता है। परंतु किसी फलन का समाकलन के साथ ऐसा नहीं है। तथापि वह मात्र एक अचर से अंतर रखता है। किसी फलन के दो समाकलनों में एक अचर का अंतर रहता है।

5. यदि कोई बहुपद फलन P का अवकलन किया जाता है, तो परिणाम भी एक बहुपद मिलता है, जिसका घात P के घात से एक कम होता है। जब कोई बहुपद फलन का समाकलन किया जाता है, तो परिणामी बहुपद का घात पूर्व बहुपद के घात से एक अधिक होता है।

6. दिए फलन के एक बिंदु पर अवकलज हम जानते हैं। हम कभी दिए फलन के दिए बिंदु पर समाकलन की चर्चा नहीं करते हैं। हम दिए गए फलन के दिए अंतराल पर समाकलन की चर्चा करते हैं, जिस पर फलन परिभाषित करते हैं।

7. एक फलन के अवकलज का ज्यामितीय अर्थ भी होता है, जैसे दिए वक्र के दिए बिंदु पर स्पर्शी की प्रवणता, उस बिंदु पर फलन के अवकलज का मान होता है। ठीक उसी प्रकार दिए फलन का

अनिश्चित समाकलन, वक्रों के एक कुल (Family) को निरूपित करता है। ज्यामितीय दृष्टि से ये सभी वक्र सामान्तरत: स्थित होते हैं, जिनका समाकलन के चर को निरूपित करने वाले अक्ष के अनुलंब रेखा के साथ सभी वक्रों के प्रतिच्छेदन बिंदुओं पर स्पर्शियाँ समांतर होती हैं।

8. यदि किसी समय t में चली गई दूरी ज्ञात हो तो अवकलज दिए समय बाद वेग ज्ञात करने में सहायक होता है। ठीक उसी प्रकार वेग किसी समय पर ज्ञात होने पर समाकलन दिए समय में चलित दूरी ज्ञात करने में सहायक होता है।

9. अवकलज एक प्रविधि है, जिसमें सीमा का भाव समाहित है, ठीक उसी प्रकार का भाव समाकलन में भी समाहित है, जिसके विषय में हम अगले अध्याय में अध्ययन करेंगे।

10. अवकलन और समाकलन की संक्रियाएँ एक दूसरे की व्युत्क्रम है, जैसा कि 12.2.2 (i) में व्याख्या की जा चुकी है।

प्रश्नावली 12.1

निम्नांकित फलनों के प्रति अवकलज या समाकलन को प्रेक्षण विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

1. $\cos 2x$
2. $\cos 3x$
3. e^{2x}
4. $(ax+b)^2$
5. $\sin 2x - 4e^{3x}$

निम्नांकित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

6. $\int x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$
7. $\int \frac{x^3-1}{x^2}dx$
8. $\int \left(ax^2+bx+c\right) dx$
9. $\int \left(x^{\frac{2}{3}}+1\right) dx$
10. $\int \frac{x^3+5x^2-4}{x^2} dx$
11. $\int \frac{x^2+3x+4}{\sqrt{x}} dx$
12. $\int \frac{x^3-x^2+x-1}{x-1}dx$
13. $\int (1-x)\sqrt{x}\, dx$
14. $\int \sqrt{x}\left(3x^2+2x+3\right) dx$
15. $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}}+5x^4\right)dx$
16. $\int (\sin x+\cos x)dx$
17. $\int \operatorname{cosec} x\,(\operatorname{cosec} x+\cot x)dx$
18. $\int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

19. $\int \frac{\sec^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x} dx$ 20. $\int \frac{2-3\sin x}{\cos^2 x} dx$

12.3 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

पिछले अनुच्छेद में हम ऐसे फलनों के समाकलन की व्याख्या कर चुके हैं, जो कुछ फलनों के अवकलजों से सरलतापूर्वक प्राप्त थे। यह प्रेक्षण पर आधारित विधि थी, इसमें ऐसे फलन F की खोज की जाती है, जिसका अवकलज f है, जिससे f के समाकलन की प्राप्ति होती है। तथापि यह विधि प्रेक्षण पर आधारित थी और अनेक फलनों के स्थिति में बहुत उचित नहीं है। अतः हमको कोई और विधि को ढूंढना है जिसके प्रयोग से समाकलन प्रमाणिक रूपों में परिवर्तित हो जाते हैं। इनमें प्रमुख विधियाँ निम्नलिखित पर आधारित हैं :

1. प्रतिस्थापन
2. आंशिक भिन्नों में वियोजन
3. खंडशः समाकलन द्वारा

इस अनुच्छेद में हम प्रतिस्थापन विधि द्वारा समाकलन पर विचार करते हैं।

दिए समाकलन $\int f(x)dx$ को अन्य रूप में परिवर्तित करने के लिए $x = g(t)$ प्रतिस्थापन करते हैं, जिससे स्वतंत्र चर x, t में परिवर्तित हो जाता है। विचार कीजिए,

$$I = \int f(x)dx \tag{1}$$

$x = g(t)$ प्रतिस्थापन कीजिए ताकि $\frac{dx}{dt} = g'(t)$

हम $dx = g'(t)\, dt$ लिखते हैं।

(इसका वर्णन अध्याय 14 में दिया जाएगा।)

इस प्रकार $$I = \int f(x)\, dx = \int f\left(g(t)\right)g'(t)\, dt$$

चर परिवर्त का यह सूत्र प्रमुख साधनों में एक है, जो प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन के नाम से जाना जाता है। "उपयोगी प्रतिस्थापन क्या होगा" यह ज्ञात करना प्रमुख अनुमान होगा। सामान्यतः हम ऐसे फलन को नया चर मानते हैं, जिसका अवकलज समाकल्य में सम्मिलित हो, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 5 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{2x}{1+x^2} dx$ (ii) $\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ (iii) $\int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx$

हल (i) $(1 + x^2)$ का अवकलन $2x$ है। अत: अब हम

$1+ x^2 = t$ प्रतिस्थापन का प्रयोग कीजिए।

तब $2x\, dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log |t| + C = \log (1+x^2) + C$$

(ii) $\sin^{-1} x$ का अवकलन $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ है, अत: हम

$\sin^{-1} x = t$ के प्रतिस्थापन का प्रयोग करते हैं।

तब $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = dt$$

इसलिए $$\int \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int t\, dt$$

$$= \frac{1}{2} t^2 + C = \frac{1}{2}\left(\sin^{-1} x\right)^2 + C$$

(iii) $1 + \log x = t$ प्रतिस्थापन कीजिए। तब $\frac{1}{x} dx = dt$

अत: $$\int \frac{(1+\log x)^2}{x} dx = \int t^2\, dt$$

$$= \frac{1}{3} t^3 + C = \frac{1}{3}(1+\log x)^3 + C$$

अब हम त्रिकोणमितीय फलनों के कुछ समाकलनों पर विचार करते हैं, तथा उनके मानों को प्रतिस्थापन विधि से ज्ञात करते हैं। आगे हम इनका प्रयोग बिना किसी संदर्भ के करेंगे।

(i) $\int \tan x \; dx = \log|\sec x| + C$

हम पाते हैं कि

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx$$

$\cos x = t$ प्रतिस्थापन कीजिए। तब $\sin x \, dx = -\, dt$

अतः $$\int \tan x \; dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log\;|t| + C = -\log\;|\cos x| + C$$

या $$\int \tan x \; dx = \log|\sec x| + C$$

(ii) $\int \cot x \; dx = \log\;|\sin x| + C$

हम पाते हैं कि

$$\int \cot x \; dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \; dx$$

$\sin x = t$ प्रतिस्थापन कीजिए। तब $\cos x \; dx = dt$

अतः $$\int \cot x \; dx = \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log\;|t| + C = \log\;|\sin x| + C$$

(iii) $\int \sec x \, dx = \log\left|\sec x + \tan x\right| + C$

हम पाते हैं कि

$$\int \sec x \; dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx$$

$\sec x + \tan x = t$ प्रतिस्थापन कीजिए। तब $\sec x \; (\tan x + \sec x) \; dx = dt$

अतः

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{dt}{t} = \log|\sec x + \tan x| + C$$

(iv) $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \log\left|\operatorname{cosec} x - \cot x\right| + C$

हम पाते हैं कि

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = \int \frac{\operatorname{cosec} x(\operatorname{cosec} x + \cot x)}{\operatorname{cosec} x + \cot x} dx$$

$\operatorname{cosec} x + \cot x = t$ रखिए

$\Rightarrow$ $(-\operatorname{cosec} x \cot x - \operatorname{cosec}^2 x) \, dx = dt,$

$\Rightarrow$ $-\operatorname{cosec} x (\cot x + \operatorname{cosec} x) \, dx = dt$

इसलिए

$$\int \operatorname{cosec} x \, dx = -\int \frac{dt}{t} = -\log|t| + C$$

$$= -\log|\operatorname{cosec} x + \cot x| + C$$

$$= \log\left|\frac{1}{\operatorname{cosec} x + \cot x}\right| + C$$

$$= \log\left|\frac{\operatorname{cosec} x - \cot x}{\operatorname{cosec}^2 x - \cot^2 x}\right| + C$$

$$= \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$$

उदाहरण 6 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx$ (ii) $\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx$ (iii) $\int \frac{1}{1+\tan x} dx$

हल हम पाते हैं कि

(i) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \, (\sin x) dx$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \cos^2 x (\sin x)\, dx$$

$t = \cos x$ प्रतिस्थापित कीजिए ताकि $dt = -\sin x\, dx$

इसलिए $$\int \sin^2 x \cos^2 x\ (\sin x)\, dx = -\int \left(1 - t^2\right) t^2\, dt$$

$$= -\int \left(t^2 - t^4\right) dt = -\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

(ii) $x + a = t$ रखिए।

तब $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx = \int \frac{\sin(t-a)}{\sin t} dt$$

$$= \int \frac{(\sin t \cos a - \cos t \sin a)}{\sin t} dt$$

$$= \cos a \int dt - \sin a \int \cot t\, dt$$

$$= (\cos a) t - (\sin a) \left[\log|\sin t| + C_1\right]$$

$$= (\cos a)(x + a) - (\sin a) \left[\log|\sin(x + a)| + C_1\right]$$

$$= x \cos a + a \cos a - (\sin a) \log|\sin(x + a)| - C_1 \sin a$$

इसलिए $$\int \frac{\sin x}{\sin(x+a)} dx = x \cos a - \sin a \log|\sin(x + a)| + C,$$

जहाँ $C = -C_1 \sin a + a \cos a$, दूसरा स्वेच्छ अचर है।

(iii) $$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos x + \sin x}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int \frac{(\cos x + \sin x + \cos x - \sin x)\,dx}{\cos x + \sin x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx\right]$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx \qquad (1)$$

अब $\quad I = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}\,dx$ पर विचार कीजिए।

$\cos x + \sin x = t$ रखिए।

तब $\quad (\cos x - \sin x)\,dx = dt$

इसलिए $\quad I = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_2$

$$= \log |\cos x + \sin x| + C_2$$

(1) में रखने पर हम पाते हैं, कि

$$\int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{x}{2} + \frac{C_1}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\log|\cos x + \sin x| + C, \left(C = \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{2}\right)$$

प्रश्नावली 12.2

निम्नलिखित फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $2x\sin(x^2+1)$
2. $\frac{(\log x)^2}{x}$
3. $\frac{1}{x + x\log x}$
4. $\sin x \sin(\cos x)$
5. $\sin(ax+b)\cos(ax+b)$
6. $\sqrt{ax+b}$

7. $x\sqrt{x+2}$

8. $x\sqrt{1+2x^2}$

9. $(4x+2)\sqrt{x^2+x+1}$

10. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}$

11. $\dfrac{x}{\sqrt{x+4}}, x>0$

12. $\left(x^3-1\right)^{\frac{1}{3}} x^5$

13. $\dfrac{x^2}{\left(2+3x^3\right)^3}$

14. $\dfrac{1}{x(\log x)^m}, x>0$

15. $\dfrac{x}{9-4x^2}$

16. e^{2x+3}

17. $\dfrac{x}{e^{x^2}}$

18. $\dfrac{e^{\tan^{-1} x}}{(1+x^2)}$

19. $\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$

20. $\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$

21. $\tan^2(2x-3)$

22. $\sec^2(7-4x)$

23. $\dfrac{\tan^4\sqrt{x}\sec^2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

24. $\dfrac{2\cos x-3\sin x}{6\cos x+4\sin x}$

25. $\dfrac{1}{\cos^2 x\,(1-\tan x)^2}$

26. $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

27. $\sqrt{\sin 2x}\,\cos 2x$

28. $\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\sin x}}$

29. $\cot x \log\sin x$

30. $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

31. $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

32. $\dfrac{1}{1+\cot x}$

33. $\dfrac{1}{1-\tan x}$

34. $\dfrac{\sqrt{\tan x}}{\sin x\cos x}$

35. $\dfrac{\sin\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2}$

36. $\dfrac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}$

37. $\dfrac{x^3\sin\left(\tan^{-1} x^4\right)}{1+x^8}$

[illegible] ***त्रिकोणमितीय सर्व-समिकाओं के प्रयोग द्वारा समाकलन (Integration using trigonometric identities)*** जब समाकल्य में कुछ त्रिकोणमितीय फलन निहित होते हैं, तो हम कुछ भलीभाँति ज्ञात

सर्वसमिकाओं के प्रयोग से समाकलन ज्ञात करते हैं। निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा विधि स्पष्ट की जाती है।

उदाहरण 7 समाकलन ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \cos^2 x\, dx$ (ii) $\int \sin 2x \cos 3x\, dx$ (iii) $\int \sin^3 x\, dx$

हल (i) सर्वसमिका $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ को स्मरण कीजिए।

$$\Rightarrow \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

इसलिए
$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

(ii) सर्वसमिका $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$ को स्मरण कीजिए।

अतः
$$\int \sin 2x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\left[\int \sin 5x\, dx - \int \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{5}\cos 5x + \cos x\right] + C$$

$$= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C$$

(iii) हम जानते हैं कि $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

अतः
$$\sin^3\theta = \frac{3\sin\theta - \sin 3\theta}{4}$$

इसलिए
$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{3}{4}\int \sin x\, dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x\, dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\left(4\cos^3 x - 3\cos x\right) + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

विकल्पतः $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right) \sin x\, dx$$

$\cos x = t$ रखिए, तब $-\sin x\, dx = dt$

इस प्रकार $\int \sin^3 x\, dx = -\int (1 - t^2)\, dt$

$$= -\int dt + \int t^2 dt = -t + \frac{t^3}{3} + C$$

$$= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$$

प्रश्नावली 12.3

निम्नलिखित फलनों का x के सापेक्ष समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\sin^2 (2x + 5)$
2. $\sin 3x \cos 4x$
3. $\cos 2x \cos 4x \cos 6x$
4. $\sin^3 (2x + 1)$
5. $\sin^3 x \cos^3 x$
6. $\sin x \sin 2x \sin 3x$
7. $\sin 4x \sin 8x$
8. $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$
9. $\frac{\cos x}{1 + \cos x}$
10. $\sin^4 x$
11. $\cos^4 2x$
12. $\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$
13. $\frac{\cos 2x - \cos 2\alpha}{\cos x - \cos \alpha}$
14. $\frac{\cos x - \sin x}{1 + \sin 2x}$
15. $\tan^3 2x \sec 2x$

16. $\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x \ \sin 3x}$

17. $\tan^4 x$

18. $\dfrac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

19. $\dfrac{\cos 2x + 2\sin^2 x}{\cos^2 x}$

20. $\dfrac{1}{\sin x \cos^3 x}$

21. $\cos^5 x$

22. $\dfrac{\cos 2x}{(\cos x + \sin x)^2}$

23. $\sin^{-1}(\cos x)$

24. $\dfrac{1}{\cos(x-a)\cos(x-b)}$

25. $\dfrac{\cos^9 x}{\sin x}$

12.4 कुछ विशिष्ट समाकलन (Some Special Integrals)

इस अनुच्छेद में हम निम्नलिखित प्रमुख समाकलन सूत्रों की व्याख्या करते हैं, और उनका अनेक फलनों के समाकलन में प्रयोग करते हैं।

(1) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

(2) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$$

(3) $$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C$$

(5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

(6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C$$

अब हम उपर्युक्त परिणामों को सिद्ध करते हैं।

(1) हम लिखते हैं कि

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\frac{(x+a)-(x-a)}{(x-a)(x+a)}\right]=\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right]$$

अतः
$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left[\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right]$$

$$=\frac{1}{2a}\left[\log|x-a|-\log|x+a|\right]+C=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

(2) उपर्युक्त (1) के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=-\int\frac{dx}{x^2-a^2}$$

$$=-\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C=\frac{1}{2a}\log\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$$

(3) $x=a\tan\theta$ रखिए। तब $dx=a\sec^2\theta\,d\theta$

इसलिए
$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\int\frac{a\sec^2\theta\,d\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2}$$

$$=\frac{1}{a}\int d\theta=\frac{1}{a}\theta+C=\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}+C$$

(4) $x=a\sec\theta$ रखिए। तब $dx=a\sec\theta\tan\theta\,d\theta$

इसलिए
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{a\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}$$

$$=\int\sec\theta\,d\theta=\log\left|\sec\theta+\tan\theta\right|+C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log|a|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C, \text{ जहाँ } C = C_1-\log|a|$$

(5) $x = a\sin\theta$ रखिए। तब $dx = a\cos\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int\frac{a\cos\theta\, d\,\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int d\,\theta = \theta + C = \sin^{-1}\frac{x}{a}+C$$

(6) $x = a\tan\theta$ रखिए। तब $dx = a\sec^2\theta\, d\theta$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\sec^2 ,\, d,}{\sqrt{a^2\tan^2 ,\, +a^2}}$$

$$= \int\sec\theta\, d\,\theta = \log|\sec\theta+\tan\theta|+C_1$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log|a|+C_1$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C, \text{ जहाँ } C = C_1-\log|a|$$

इन प्रामाणिक सूत्रों के प्रयोग से हम कुछ और सूत्रों की व्याख्या करते हैं, जिनका अनुप्रयोग की दृष्टि से उपयोगी है, और इनका सीधा प्रयोग अन्य समाकलनों का मान ज्ञात करने में किया जा सकता है।

(7) $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, का मान ज्ञात करने के लिए हम,

$$ax^2+bx+c=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

लिखते हैं।

अब $x+\frac{b}{2a}=t$ रखिए। तब $dx=dt$ इसलिए $\frac{C}{a}-\frac{b^2}{4a^2}=k^2$ रखने पर हम दिए समाकलन का परिवर्तित $\frac{1}{|a|}\int\frac{dt}{\left(\pm t^2\pm k^2\right)}$, पाते हैं जिसका मान ज्ञात किया जा सकता है।

(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, के प्रकार के समाकलन को प्राप्त करने के लिए पूर्व उदाहरण (7) की भाँति क्रिया करने पर हम ऐसे समाकलन प्राप्त करते हैं जिसे प्रामाणिक सूत्रों का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

(9) $\int\frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$, p, q, a, b, c अचर हैं, के प्रकार के समाकलनों का मान ज्ञात करने के लिए हम ऐसी दो वास्तविक संख्याएँ A और B ज्ञात करते हैं, कि

$$px+q=\mathrm{A}\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)+\mathrm{B}=\mathrm{A}\,(2ax+b)+\mathrm{B}$$

A और B ज्ञात करने के लिए दोनों पक्षों से x के गुणांकों और अचरों को समान करते हैं। A और B को इस प्रकार ज्ञात हो जाने पर समाकलन प्रामाणिक ज्ञात रूप धारण करता है, जिससे उसका मान ज्ञात किया जा सकता है।

(10) $\int\frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, के मान ज्ञात करने के लिए हम उपर्युक्त की भाँति क्रिया करके समाकलन को ज्ञात प्रामाणिक रूपों में परिवर्तित करते हैं।

उपर्युक्त विधियों को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 8 निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int\frac{3x^2}{x^6+1}dx$ (ii) $\int\frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ (iii) $\int\frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{\tan^2 x+4}}$

हल (i) ज्ञात है, कि

$$\int \frac{3x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{3x^2}{(x^3)^2+1}$$

$x^3 = t$ रखिए। तब $3x^2\,dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{3x^2}{x^6+1}dx = \int \frac{dt}{t^2+1} = \tan^{-1} t + C$$

$$= \tan^{-1}x^3 + C$$

(ii) $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

$x-1 = t$ रखिए। तब $dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \sin^{-1}(t) + C$$ [12.4 (5) द्वारा]

$$= \sin^{-1}(x-1) + C$$

(iii) $\tan x = t$ रखिए। तब $\sec^2 x\, dx = dt$

इसलिए $$\int \frac{\sec^2 x\, dx}{\sqrt{\tan^2 x+4}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2^2}}$$

$$= \log\left|t+\sqrt{t^2+2^2}\right| + C$$ [12.4 (6) द्वारा]

$$= \log\left|\tan x+\sqrt{\tan^2 x+4}\right| + C$$

उदाहरण 9 निम्नलिखित समाकलनों को ज्ञात कीजिए।

(i) $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+3x+5}$ (ii) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-4x+x^2}}$

हल दिया समाकलन 12.4 (7) के रूप का है, अतः हम

$$2x^2+3x+5=2\left(x^2+\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}\right)$$

$$=2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2\right]$$

इस प्रकार $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2+3x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2}$

$x+\dfrac{3}{4}=t$ रखिए। तब $dx=dt$

इसलिए $\displaystyle\int\frac{dx}{2x^2+3x+5}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+\left(\frac{\sqrt{31}}{4}\right)^2}$

$$=\frac{1}{2.\frac{\sqrt{31}}{4}}\tan^{-1}\frac{t}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C \qquad \text{[12.4 (3) द्वारा]}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\frac{4t}{\sqrt{31}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\frac{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{31}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{31}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{31}}\right)+C$$

(ii) हम पाते हैं कि $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{2-4x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2}}$

$x-2=t$ रखिए। तब $dx=dt$

इसलिए $$\int\frac{dx}{\sqrt{2-4x+x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{t^2-(\sqrt{2})^2}}$$

$$=\log\left|t+\sqrt{t^2-(\sqrt{2})^2}\right|+C \qquad [12.4\ (4)\ \text{द्वारा}]$$

$$=\log\left|(x-2)+\sqrt{(x-2)^2-(\sqrt{2})^2}\right|+C$$

$$=\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+2}\right|+C$$

उदाहरण 10 (i) $\int\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}dx$ (ii) $\int\frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}\,dx$

हल 12.4 (9) के सूत्र का प्रयोग करते हुए हम

$$5x-2=A\frac{d}{dx}\left(1+2x+3x^2\right)+B=A(2+6x)+B$$

दोनों पक्षों से x के गुणांकों और अचरों को समान करने पर हम पाते हैं कि

$$6A=5 \text{ और } 2A+B=-2,$$

या $$A=\frac{5}{6} \text{ और } B=-\frac{11}{3}$$

इस प्रकार

$$\int\frac{5x-2}{1+2x+3x^2}dx=\frac{5}{6}\int\frac{2+6x}{1+2x+3x^2}dx-\frac{11}{3}\int\frac{dx}{3x^2+2x+1} \qquad (1)$$

$$=\frac{5}{6}I_1-\frac{11}{3}I_2 \text{ (मान लिया)}$$

I_1 में $1 + 2x + 3x^2 = t$ रखिए, तब $(2 + 6x)\, dx = dt$

इसलिए $$I_1 = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C_1$$

$$= \log \left| t \right| + C_1$$

$$= \log \left| 3x^2 + 2x + 1 \right| + C_1 \qquad (2)$$

और $$I_2 = \int \frac{dx}{3x^2 + 2x + 1} = \int \frac{dx}{3\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

$x + \frac{1}{3} = t$ रखिए। तब $dx = dt$

इसलिए $$I_2 = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}} \tan^{-1} \frac{t}{\frac{\sqrt{2}}{3}} + C_2 \qquad \text{[12.4 (3) द्वारा]}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{3t}{\sqrt{2}} + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{3\left(x + \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{2}} + C_2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{(3x+1)}{\sqrt{2}} + C_2 \qquad (3)$$

(2) और (3) से मानों को (1) में रखने पर हम पाते हैं कि

$$\int \frac{5x-2}{1+2x+3x^2} dx = \frac{5}{6} \log\left|3x^2+2x+1\right| - \frac{11}{3\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

जहाँ $\quad C = \frac{5}{6}C_1 - \frac{11}{3}C_2$

(ii) 12.4 (10) द्वारा हम

$$6x + 7 = A \frac{d}{dx}\left(x^2 - 9x + 20\right) + B = A\,(2x-9) + B$$

के रूप में व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार दोनों पक्षों से x के गुणांकों और स्थिरांकों को समान करने पर हम पाते हैं कि

$$6 = 2A \quad \text{और} \quad 7 = -9A + B$$

अतः $\quad A = 3$ और $B = 34$

इसलिए
$$\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}} dx = 3\int \frac{(2x-9)}{\sqrt{x^2-9x+20}} dx + 34\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x+20}}$$

$$= 3I_1 + 34I_2 \qquad (1)$$

I_1 में $x^2 - 9x + 20 = t$ रखिए। तब $(2x-9)\,dx = dt$.

इसलिए
$$I_1 = \int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+20}} dx = \int \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= 2\sqrt{t} + C_1 = 2\sqrt{x^2-9x+20} + C_1 \qquad (2)$$

अत: $$I_2 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9x+20}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}$$

$x-\frac{9}{2}=t$ रखिए। तब $dx = dt$

इस प्रकार $$I_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$= \log\left|t+\sqrt{t^2-\frac{1}{4}}\right| + C_2 \quad [12.4\ (4)\ \text{से}]$$

$$= \log\left|\left(x-\frac{9}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{9}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right| + C_2$$

$$= \log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right| + C_2 \qquad (3)$$

(2) और (3) से मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\int \frac{6x+7}{\sqrt{(x-5)(x-4)}}\,dx = 6\sqrt{x^2-9x+20} + 34\log\left|x-\frac{9}{2}+\sqrt{x^2-9x+20}\right| + C$$

जहाँ $C = 3C_1 + 34\,C_2$

प्रश्नावली 12.4

निम्नांकित फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}$
2. $\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$
3. $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2+1}}$
4. $\frac{1}{\sqrt{(2-x)^2-1}}$
5. $\frac{1}{(x+2)^2+1}$
6. $\frac{1}{\sqrt{9-25x^2}}$

7. $\dfrac{3x}{1+2x^4}$ 8. $\dfrac{x^2}{1-x^6}$ 9. $\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

10. $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^6+a^6}}$ 11. $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ 12. $\dfrac{1}{4x^2-4x+3}$

13. $\dfrac{1}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ 14. $\dfrac{1}{9x^2+6x+5}$ 15. $\dfrac{1}{2x^2+8x+20}$

16. $\dfrac{1}{3x^2+13x-10}$ 17. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(x-2)}}$ 18. $\dfrac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$

19. $\dfrac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}$ 20. $\dfrac{1}{\sqrt{5x^2-2x}}$ 21. $\dfrac{1}{\sqrt{20+8x-x^2}}$

22. $\dfrac{4x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$ 23. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ 24. $\dfrac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}$

25. $\dfrac{x+2}{\sqrt{4x-x^2}}$ 26. $\dfrac{x+2}{2x^2+6x+5}$ 27. $\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+3}}$

28. $\dfrac{x+3}{x^2-2x-5}$ 29. $\dfrac{5x+3}{\sqrt{x^2+4x+10}}$

12.5 आंशिक भिन्नों द्वारा समाकलन (Integration by Partial Fractions)

स्मरण कीजिए कि एक परिमेय फलन $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, दो बहुपदों P(x) और Q(x) का अनुपात है। यदि P(x) और Q(x) का अनुपात है। यदि P(x) का घातांक Q(x) के घातांक से कम है, तो परिमेय फलन उचित परिमेय फलन कहलाता है; अन्यथा विषम परिमेय फलन है। विषम परिमेय फलनों को लंबी भाग विधि से उचित परिमेय फलन के रूप में परिणित किया जा सकता है। इस प्रकार यदि $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ विषम परिमेय फलन है, तब $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$, जहाँ T(x), x में एक बहुपद और $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है।

जैसा कि हम जानते हैं, कि एक बहुपद का समाकलन कैसे करते हैं, अतः किसी एक परिमेय फलन का समाकलन किसी उचित परिमेय फलन के समाकलन की समस्या के रूप में परिणित हो जाता है। यहाँ पर हम जिन परिमेय फलनों के समाकलन पर विचार करेंगे, उनके हर रैखिक और द्विघात गुणनखंडों में विघटित होने वाले होंगे।

मान लीजिए कि हम $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ का मान ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ एक उचित परिमेय फलन है। आंशिक भिन्नों में वियोजन प्रविधि द्वारा हम सदैव उचित परिमेय फलनों को दो या दो से अधिक सरल परिमेय फलनों के योगफल के रूप में परिणित कर सकते हैं। इसके पश्चात् ज्ञात विधियों की सहायता से समाकलन सरलतापूर्वक किया जा सकता है।

निम्नलिखित सारणी 12.5 हमें निर्देशित करती है, कि किस प्रकार के परिमेय फलन किन-किन प्रकार के सरल आंशिक भिन्नों में वियोजित किए जा सकते हैं।

सारणी 12.2

निम्नलिखित में A,B,C और D वास्तविक संख्याएँ हैं, जिनका समुचित ढंग से निर्धारण करना है।

क्रमांक	परिमेय फलन का रूप		आंशिक भिन्नों का रूप
1.	$\frac{px+q}{(x-a)(x-b)}, a \neq b$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$
2.	$\frac{px+q}{(x-a)^2}$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2}$
3.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x-b)(x-c)}$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)}$
4.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^2(x-b)}$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-b)}$
5.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)^3(x-b)}$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{(x-a)^3} + \frac{D}{(x-b)}$
6.	$\frac{px^2+qx+r}{(x-a)(x^2+bx+c)}$	;	$\frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{x^2+bx+c}$, जहाँ x^2+bx+c को और आगे गुणनखंड नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 11 $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल समाकल्य उचित परिमेय फलन है। अतः इसके आंशिक भिन्नों के रूप [सारणी 12.5 (1) देखें] का ध्यान रखते हुए हम

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} \qquad (1)$$

लिखते हैं जहाँ स्थिरांकों A, B का निर्धारण समुचित ढंग से करना है। A और B वास्तविक संख्याओं का निर्धारण अनेक विधियों से किया जा सकता है। यहाँ हम दो विधियों की व्याख्या करते हैं।

विधि 1 $\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$

$$\Rightarrow \qquad x = A\,(x+2) + B\,(x+1) \qquad (2)$$

x के गुणांकों और अचरों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$A + B = 1 \text{ और } 2A + B = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम $A = -1$ और $B = 2$ पाते हैं।

विधि 2 हम A और B के मानों को x के समुचित मानों से (1) को संतुष्ट करा कर ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ हम $x = 0$ और $x = 1$ चुनते हैं।

जब $x = 0$ तो (2) से $0 = 2A + B$ मिलता है।

जब $x = 1$ तो (2) से $1 = 3A + 2B$ मिलता है।

इन समीकरणों को हल करके हम $A = -1$ और $B = 2$ पाते हैं।

इस प्रकार सामान्यतः

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{2}{x+2}$$

इसलिए $$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)} = -\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= -\log|x+1| + 2\log|x+2| + C$$

$$= \log \frac{(x+2)^2}{|x+1|} + C$$

टिप्पणी ध्यान देने योग्य है कि हमें $x = -1$ या $x = -2$ लेना वर्जित है, क्योंकि (1) को पूर्णतः हमने $(x+1)(x+2)$ से गुणा किया है। रुचिपूर्ण यह है कि $x = -1$ और $x = -2$ (2) में प्रतिस्थापित करने पर A और B के शुद्ध मान प्राप्त हो जाते हैं यद्यपि ऐसा करने का गणितीय दृष्टि से औचित्य नहीं बनता है।

उदाहरण 12 $\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ समाकल्य $\frac{x^2+1}{x^2-5x+6}$ उचित परिमेय फलन नहीं है। इस प्रकार हम x^2+1 को x^2-5x+6 से भाग देते हैं

और $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} \quad (1)$$

के रूप में व्यक्त करते हैं।

मान लीजिए $$\frac{5x-5}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$$

$\Rightarrow$ $$5x - 5 = A(x-3) + B(x-2) \quad (2)$$

जब $x = 0$, तो (2) से $-5 = -3A - 2B$

और जब $x = 1$ तो (2) से $0 = -2A - B$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$A = -5, \; B = 10$$

इस प्रकार $$\frac{x^2+1}{x^2-5x+6} = 1 - \frac{5}{x-2} + \frac{10}{x-3}$$

इसलिए $$\int \frac{x^2+1}{x^2-5x+6} dx = \int dx - 5\int \frac{1}{x-2} dx + 10 \int \frac{dx}{x-3}$$

$$= x - 5 \log |x-2| + 10 \log |x-3| + C$$

उदाहरण 13 $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल समाकल्य उचित प्रमेय फलन है। परिमेय फलन को आंशिक भिन्नों में वियोजित कीजिए। [सारणी 12.2 (6) देखें।]

हम पाते हैं कि

$$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1},$$

अतः $$x = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$x = 0$ लेने से,

$0 = A - C$ प्राप्त है।

दोनों पक्षों से x^2 के गुणांक की तुलना समान करने पर हम पाते हैं कि

$$0 = A + B$$

उसी प्रकार दोनों पक्षों से x की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$1 = C - B$$

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$A = \frac{1}{2}, B = \frac{-1}{2} \text{ और } C = \frac{1}{2}$$

इस प्रकार $$\frac{x}{(x-1)\left(x^2+1\right)} = \frac{1}{2(x-1)} + \frac{\frac{-x}{2}+\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2(x-1)} - \frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2\left(x^2+1\right)}$$

इसलिए $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{1}{4}\log\left(x^2+1\right) + \frac{1}{2}\tan^{-1}x + C$$

उदाहरण 14 $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल समाकल्य के हर का गुणनफल करने पर हम पाते हैं कि

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^3 + 1 - x^2 - x$$

$$= (x+1)\ (x^2 - x + 1) - x(x+1)$$

$$= (x+1)\ (x-1)^2$$

इसलिए $$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{3x+5}{(x+1)\,(x-1)^2}$$

यह परिमेय फलन उचित है, अतः सारणी 12.2(4) द्वारा हम पाते हैं कि

$$\frac{3x+5}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

हर को विलुप्त करने पर हम पाते हैं कि

$$3x + 5 = A\,(x-1)^2 + B\,(x+1)\,(x-1) + C\,(x+1)$$

दोनों पक्षों से x^2, x के गुणांकों और स्थिरांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$A + B = 0,\ -2A + C = 3 \text{ और } A - B + C = 5$$

हम समीकरणों को हल करने पर पाते हैं कि

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2} \text{ और } C = 4$$

इस प्रकार

$$\frac{3x+5}{(x+1)\,(x-1)^2} = \frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{4}{(x-1)^2}$$

इसलिए

$$\int \frac{3x+5}{(x+1)(x-1)}dx = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1} + 4\int\frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x+1| - \frac{1}{2}\log|x-1| - \frac{4}{x-1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{4}{x-1} + C$$

उदाहरण 15 $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^3(x+1)}$ ज्ञात कीजिए।

हल सारणी 12.2(5) द्वारा हम लिखते हैं, कि समाकल्य

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = \left[A(x-1)^2 + B(x-1) + C\right](x+1) + D(x-1)^3 \qquad (1)$$

x^3, x^2, x के गुणांकों और स्थिरांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$A + D = 0$$
$$-A + B - 3D = 1$$
$$-A + C + 3D = 0$$
$$A - B + C - D = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$A = \frac{1}{8}, B = \frac{3}{4}, C = \frac{1}{2} \quad \text{और} \quad D = -\frac{1}{8}$$

इसलिए

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^3(x+1)} = \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^3} - \frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{3}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x-1)^2} - \frac{1}{8}\log|x+1| + C$$

उदाहरण 16 $\int \frac{\cos x\, dx}{(1-\sin x)^3(2+\sin x)}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि,

$$I = \int \frac{\cos x\, dx}{(1-\sin x)^3(2+\sin x)}$$

$\sin x = t$ रखिए, तब $\cos x\, dx = dt$

इसलिए $$I = \int \frac{dt}{(1-t)^3\ (2+t)} = -\int \frac{dt}{(t-1)^3(t+2)}$$

अब समाकल्य सारणी 12.2(5) के प्रकार का है, अतः हम लिखते हैं कि

$$\frac{1}{(t-1)^3(t+2)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{(t-1)^2} + \frac{C}{(t-1)^3} + \frac{D}{t+2}$$

$$\Rightarrow \quad 1 = A\,(t-1)^2\,(t+2) + B\,(t-1)\,(t+2) + C\,(t+2) + D\,(t-1)^3 \qquad (1)$$

t^3, t^2, t के गुणांकों और स्थिरांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$A + D = 0$$
$$B - 3D = 0$$
$$-3A + B + C + 3D = 0$$
$$2A - 2B + 2C - D = 1$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$$A = \frac{1}{27},\ B = -\frac{1}{9},\ C = \frac{1}{3} \text{ और } D = -\frac{1}{27}$$

इस प्रकार $$\frac{1}{(t-1)^3(t+2)} = \frac{1}{27(t-1)} - \frac{1}{9(t-1)^2} + \frac{1}{3(t-1)^3} - \frac{1}{27(t+2)}$$

इसलिए

$$I = -\int \frac{dt}{(t-1)^3(t+2)} = -\frac{1}{27}\int \frac{dt}{t-1} + \frac{1}{9}\int \frac{dt}{(t-1)^2} - \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t-1)^3} + \frac{1}{27}\int \frac{dt}{t+2}$$

$$= -\frac{1}{27}\log|t-1| - \frac{1}{9(t-1)} + \frac{1}{6(t-1)^2} + \frac{1}{27}\log|t+2| + C$$

या $$\int \frac{\cos x\,dx}{(1-\sin x)^3\,(2+\sin x)}$$

$$= -\frac{1}{27}\log|\sin x-1| - \frac{1}{9\,(\sin x-1)} + \frac{1}{6\,(\sin x-1)^2} + \frac{1}{27}\log|\sin x+2| + C$$

ज्ञात कीजिए $\int \frac{(x^2+1)\,(x^2+2)}{(x^2+3)\,(x^2+4)}\,dx$

यहाँ समाकल्य में x की सम घातांक है। इस प्रकार की स्थिति में $x^2 = t$ रखकर आंशिक भिन्नों में वियोजन सरल हो जाता है, अतः हम लिखते हैं कि

$$\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)} = \frac{(t+1)\,(t+2)}{(t+3)(t+4)}$$

$$= \frac{t^2+3t+2}{t^2+7t+12} = 1 - \frac{2(2t+5)}{(t+3)\,(t+4)}$$

अब हम

$$\frac{2t+5}{(t+3)\,(t+4)} = \frac{A}{t+3} + \frac{B}{t+4}$$

$\Rightarrow$ $2t+5 = A(t+4) + B(t+3)$ पर विचार करते हैं। (1)

दोनों पक्षों से t के गुणांक और स्थिरांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$A + B = 2$ और $4A + 3B = 5$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं कि

$A = -1, \qquad B = 3$

इस प्रकार $$\frac{2t+5}{(t+3)\,(t+4)} = -\frac{1}{t+3} + \frac{3}{t+4}$$

अत: $$\frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right)} = 1+\frac{2}{t+3}-\frac{6}{t+4}$$

$$= 1+\frac{2}{x^2+3}-\frac{6}{x^2+4}$$

इसलिए

$$\int\frac{(x^2+1)\,(x^2+2)\,dx}{(x^2+3)\,(x^2+4)} = \int dx+2\int\frac{dx}{x^2+(\sqrt{3})^2}-6\int\frac{dx}{x^2+2^2}$$

$$= x+\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$$

प्रश्नावली 12.5

निम्नलिखित परिमेय फलनों का समाकलन कीजिए :

1. $\frac{1}{(x+1)\,(x+2)}$
2. $\frac{1}{x^2-9}$
3. $\frac{3x-1}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}$
4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$
5. $\frac{2x}{x^2+3x+2}$
6. $\frac{1-x^2}{x(1-2x)}$
7. $\frac{x^2+x+1}{x^2(x+2)}$
8. $\frac{x}{(x-1)^2\,(x+2)}$
9. $\frac{3x-2}{(x+1)^2\,(x+3)}$
10. $\frac{2x-3}{\left(x^2-1\right)(2x+3)}$
11. $\frac{5x}{(x+1)\left(x^2-4\right)}$
12. $\frac{x^3+x+1}{x^2-1}$
13. $\frac{x}{(x-2)\,(x-1)^3}$
14. $\frac{2}{(1-x)\left(1+x^2\right)}$
15. $\frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$
16. $\frac{3x-1}{(x-2)^2}$
17. $\frac{1}{x^4-1}$

18. $\dfrac{1}{x(x^n+1)}$ [संकेत : x^{n-1} से अंश और हर में गुणा करके $x^n = t$ रखिए।]

19. $\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)(2-\sin x)}$ 20. $\dfrac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}$ 21. $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}$

22. $\dfrac{1}{x(x^4-1)}$ 23. $\int \dfrac{e^x dx}{e^x(e^x-1)}$ [संकेत : $e^x = t$ रखिए।]

12.6 खंडशः समाकलन (Integration by Parts)

यह समाकलन के अत्यंत उपयोगी विधियों में से एक है, जिसका प्रयोग विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों में होता है। विशिष्टत: ऐसे समाकलन जिसके समाकल्य में कोई एक बीज गणितीय, घातांकीय, लघु गणकीय त्रिकोणमितीय फलन हो, की स्थिति में यह प्रविधि अत्यंत उपयोगी है।

यदि एकल स्वतंत्र चर x (मान लीजिए।) में u और v दो अवकलनीय फलन हो तो अवकलन के गुणनफल नियम के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int u\frac{dv}{dx}dx = uv - \int v\frac{du}{dx}dx \qquad (1)$$

मान लीजिए $\quad u = f(x)$ और $\dfrac{dv}{dx} = g(x)$

तब $\quad \dfrac{du}{dx} = f'(x)$ और $v = \int g(x)\,dx$

पद संहति (1) को पुनः लिख सकते हैं कि

$$\int f(x)\ g(x)\ dx = f(x)\int g(x)dx - \int \left[\left(\int g(x)\ dx\right)\ f'(x)\right] dx$$

या $$\int f(x)\,g(x)dx = f(x)\int g(x)dx - \int\left[f'(x)\int g(x)\,dx\right]dx$$

यदि हम f को पहला फलन और g को दूसरा फलन ले तो इस सूत्र को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं,

"दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = प्रथम फलन × द्वितीय फलन का समाकलन – [प्रथम फलन का अवकल गुणांक × द्वितीय फलन का समाकलन]" का समाकलन।

उदाहरण 18 $\int x\sin x\; dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $f(x) = x$ (प्रथम फलन) और $g(x) = \sin x$ (द्वितीय फलन)

हम पाते हैं, कि

$$\int x\sin x\,dx = x\int \sin x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(x)\int \sin x\,dx\right]dx$$

$$= -x\cos x - \int(-\cos x)\,dx = -x\cos x + \int\cos x\,dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

मान लीजिए कि हम $f(x) = \sin x$ और $g(x) = x$ लें, तब

$$\int x\sin x\,dx = \sin x\int x\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\sin x)\int x\,dx\right]dx$$

$$= \sin x.\frac{x^2}{2} - \int\cos x.\frac{x^2}{2}\,dx$$

उपर्युक्त से स्पष्ट है यदि $\sin x$ को प्रथम लेते हैं, तो समाकलन $\int x\sin x\,dx$ में x के घातांक को बढ़ जाने पर यह समाकलन और अधिक कठिन हो जाता है। अतः प्रथम फलन और द्वितीय फलन का समुचित चयन महत्त्वपूर्ण है।

टिप्पणी

1. यह भी वर्णनीय है, कि खंडशः समाकलन विधि दो फलनों के गुणनफल के सभी स्थितियों में प्रयुक्त नहीं है। उदाहरणतः $\int\sqrt{x}\sin x\,dx$ की स्थिति में यह विधि काम नहीं करती है। इसका कारण यह है,

कि ऐसा कोई फलन अस्तित्व में ही नहीं है, जिनका अवकलज $\sqrt{x}\ \sin x$ हो।

2. ध्यान से देखिए कि द्वितीय फलन के समाकलन को ज्ञात करते समय हम उसमें समाकलन अचर नहीं जोड़ते हैं। यदि हम द्वितीय फलन $\sin x$ के समाकलन को $-\cos x + k$ के रूप में लें, तो पाते हैं,

$$\int x \sin x\, dx = x(-\cos x + k) - \int(-\cos x + k)dx$$

$$= x(-\cos x + k) + \int \cos x\, dx - k\int dx$$

$$= x\,(-\cos x + k) + \sin x - kx + C$$

$$= -x\cos x + \sin x + C$$

खंडशः समाकलन प्रविधि के प्रयोग में

इससे स्पष्ट है कि द्वितीय फलन के समाकलन में अचर का जोड़ना व्यर्थ है।

उदाहरण 19 $\int x \log x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $f(x) = \log x$ (प्रथम फलन) और $g\,(x) = x$ (द्वितीय फलन) है, तो खंडशः समाकलन द्वारा हम पाते हैं कि

$$\int x \log x\, dx = \log x \int x\, dx - \int\left[\frac{d}{dx}(\log x)\int x\, dx\right]dx$$

$$= \log x.\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$$

कहीं-कहीं समाकल्य अत्यंत सरल तथा दो फलनों का गुणनफल भी नहीं होता, वहाँ खंडशः समाकलन विधि उपयोगी है, जैसा निम्नलिखित है।

उदाहरण 20 $\int \log x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम ऐसे फलन का अनुमान लगाने में असमर्थ हैं, जिसका $\log x$ अवकलज है। इस स्थिति में हम $\log x$ को पहला फलन और 1 को दूसरे फलन के रूप में लेते हैं, इस प्रकार दूसरे फलन का समाकलन x है।

अतः, $$\int(\log x).1\, dx = (\log x)\int 1 dx - \int\left[\frac{d}{dx}\,(\log x)\int 1\, dx\right]dx$$

$$= \log x \,.\, x - \int \frac{1}{x} x\,dx = x \log x - x + C$$

उदाहरण 21 $\int x \tan^{-1} x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $\tan^{-1} x =$ पहला फलन और $x =$ दूसरा फलन लीजिए।

दूसरे फलन का समाकलन $= \dfrac{x^2}{2}$

इसलिए खंडशः समाकलन द्वारा,

$$\int x \tan^{-1} x\, dx = \tan^{-1} x \int x\,dx - \int \left[\frac{d}{dx}\tan^{-1} x \int x\,dx\right] dx$$

$$= \tan^{-1} x . \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\tan^{-1} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x + C$$

उपर्युक्त उदाहरण में यदि पहले फलन और दूसरे फलन की भूमिकाएँ परिवर्तित कर दी जाएँ तो हम और कठिन स्थिति में पहुँचते हैं। तथापि कुछ परिस्थितियों में पहले और दूसरे फलन के चयन की व्यवस्था अर्थहीन होती है, जैसा कि निम्नांकित उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 22 $\int e^x \cos x\, dx$ ज्ञात कीजिए।

हल $e^x =$ पहला फलन और $\cos x =$ दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन द्वारा,

हम पाते हैं कि

$$I = \int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - I_1 \qquad (1)$$

जहाँ $I_1 = \int e^x \sin x dx$

e^x और $\sin x$ को क्रमशः प्रथम फलन और द्विवतीय फलन लेते हुए हम पाते हैं कि

$$I_1 = e^x(-\cos x) - \int e^x(-\cos x)dx = -e^x \cos x + I$$

I_1 के मान को (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$I = e^x \sin x + e^x \cos x - I$$

या $2I = e^x(\sin x + \cos x)$

और $I = \int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C$

विकल्पतः यदि हम क्रमशः $\cos x$ को पहला फलन और e^x को दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करें तो पाते हैं, कि

$$I = \cos x\, e^x - \int(-\sin x)e^x\,dx$$

$$= \cos x\, e^x + \int \sin x\, e^x\,dx = \cos x\, e^x + I_1 \qquad (2)$$

जहाँ $I_1 = \int \sin x\, e^x dx$

क्रमशः $\sin x$ को पहला फलन और e^x को दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं, कि

$$I_1 = \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x dx = e^x \sin x - I$$

I_1 का मान (2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$I = \cos x\, e^x + \sin x\, e^x - I$$

पक्षांतरण द्वारा हम पाते हैं कि

$$2\,I = e^{x}(\sin x+\cos x)$$

अतः

$$I = \int e^{x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{x}(\sin x+\cos x)+C$$

टिप्पणी उपर्युक्त की तरह क्रिया करके हम $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ और $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ के व्यापक समाकलनों के लिए सूत्रों का निगमन कर सकते हैं।

उदाहरण 23 $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int e^{ax}\sin bx\,dx$, तब e^{ax} और $\sin bx$ को क्रमशः पहला और दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$I = e^{ax}\int \sin bx\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}e^{ax}\int \sin bx\,dx\right]dx$$

$$= e^{ax}\left(\frac{-\cos bx}{b}\right) - \int a e^{ax}\left(\frac{-\cos bx}{b}\right)dx$$

$$= \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$= \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}I_1,\;\; I_1 = \int e^{ax}\cos bx\,dx \qquad (1)$$

e^{ax} को पहला और $\cos bx$ को दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$I_1 = e^{ax}\int \cos bx\,dx - \int\left[\frac{d}{dx}e^{ax}\int \cos bx\,dx\right]dx$$

$$= \frac{e^{ax}(\sin bx)}{b} - \int a e^{ax}\left(\frac{\sin bx}{b}\right)dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$= \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\text{I}$$

या I_1 के मान को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\text{I} = \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\left[\frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\text{I}\right]$$

$$= \frac{-e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin bx - \frac{a^2}{b^2}\text{I}$$

या $$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\text{I} = \frac{e^{ax}}{b^2}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$$

या $$\text{I} = \frac{e^{ax}}{\left(a^2+b^2\right)}\left(a\sin bx - b\cos bx\right) + \text{C} = \int e^{ax}\sin bx\,dx$$

इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + \text{C}$$

12.6.1 $\int e^x\left[f(x)+f'(x)\right]dx$ *के प्रकार का समाकलन*

मान लीजिए $\quad \text{I} = \int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$

$$= \int e^x f(x)\,dx + \int e^x f'(x)\,dx$$

$$= \text{I}_1 + \int e^x f'(x)\,dx = \int e^x f(x)\,dx \qquad (1)$$

जहाँ $\text{I}_1 = \int e^x f(x)dx$ इसे $f(x)$ और e^x को क्रमशः पहला और दूसरा फलन लेकर खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\text{I}_1 = f(x)e^x - \int f'(x)e^x dx + \text{C}$$

I_1 के मान को (1) में प्रतिस्थापन करने पर

$$I = e^x f(x) - \int f'(x)\, e^x dx + \int e^x f'(x)\, dx + C$$

$$= e^x f(x) + C$$

उदाहरण 24 निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

(i) $\int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx$ (ii) $\int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

हल (i) मान लीजिए $I = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \int \frac{(x+1-1)e^x}{(1+x)^2} dx$

$$= \int \frac{e^x}{1+x} dx - \int \frac{e^x}{(1+x)^2} dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right] dx$$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ पर विचार कीजिए।

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

इस प्रकार दिया समाकलन $e^x [f(x) + f'(x)]$ के प्रकार का है।

इसलिए $$I = \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx = \frac{e^x}{1+x} + C$$

(ii) मान लीजिए कि $I = \int e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{1+\cos x} + \frac{\sin x}{1+\cos x}\right] dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2}} + \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right] dx$$

$$= \int e^x \left[\frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} + \tan\frac{x}{2} \right] dx$$

$f(x) = \tan\frac{x}{2}$ पर विचार कीजिए।

तब $\quad f'(x) = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$ और इस प्रकार

$$I = e^x \tan\frac{x}{2} + C$$

प्रश्नावली 12.6

निम्नलिखित फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $x \sin 3x$
2. $x^2 e^x$
3. $x^2 \sin x$
4. $x \log 2x$
5. $x^2 \log x$
6. $\sin^{-1} x$
7. $x \sin^{-1} x$
8. $x^2 \sin^{-1} x$
9. $x \cos^{-1} x$
10. $\left(\sin^{-1} x\right)^2$
11. $x^2 e^{3x}$
12. $\log\left(x^2 + 1\right)$
13. $\frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$
14. $\frac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$
15. $x \sec^2 x$
16. $\tan^{-1} x$
17. $x(\log x)^2$
18. $\left(x^2 + 1\right)\log x$
19. $e^x(\sin x + \cos x)$
20. $e^x\left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1 + x^2}\right)$
21. $e^x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)$
22. $\frac{(x-3)e^x}{(x-1)^3}$
23. $e^{2x} \sin x$
24. $\frac{\left(x^2 + 1\right)e^x}{(x+1)^2}$
25. $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)$

12.7 कुछ विशिष्ट प्रकार के समाकलन (Some Special Types of Integrals)

इस अनुच्छेद में हम कुछ विशिष्ट प्रकार के प्रमाणिक समाकलनों की व्याख्या करेंगे। इनके करने की विधि खंडशः समाकलन तथा अन्य विधियों पर आधारित होंगी।

12.7.1 (i) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ के प्रकार के समाकलन

(i) मान लीजिए कि $I=\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

1 को द्वितीय फलन लेते हुए खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$I = x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-a^2}}.x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - I - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

या $$2I = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

या $$I = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

इसी प्रकार अन्य दो समाकलनों में 1 को दूसरे फलन के रूप में लेते हुए खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

(ii) $$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

(iii) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

टिप्पणी (i), (ii) और (iii) समाकलनों को त्रिकोणमितीय प्रतिस्थापन क्रमशः (i) $x = a\sec\theta$, (ii) $x = a\tan\theta$ और (iii) $x = a\sin\theta$ द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं।

(i) $\int \sqrt{(ax^2+bx+c)}\,dx$, (ii) $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ के प्रकार के समाकलन

(i) हम लिखते हैं,

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)\right]$$

मान लीजिए $x+\dfrac{b}{2a} = t$ और $\dfrac{c}{a}-\dfrac{b^2}{4a^2} = k^2$ रखने पर

समाकलन (i) ऐसे समाकलन के रूप में परिणित हो जाता है, जिसका मान 12.7.1 में बताए गए विधियों द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

(ii) हम ऐसे स्थिरांक A और B को ज्ञात करते हैं ताकि

$$px+q = A\left[\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)\right] + B$$

$$= A\,(2ax+b) + B$$

दोनों पक्षों में x के गुणांकों और स्थिरांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$2a\,A = p \text{ और } Ab + B = q$$

उपर्युक्त समीकरणों को हल करने पर A और B के मान ज्ञात किए जा सकते हैं।

इस प्रकार समाकलन का परिवर्तित रूप

$$A\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx+B\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

$$= AI_1+BI_2$$

$$I_1=\int(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

$ax^2 + bx + c = t$ रखिए, तब $(2ax + b)\ dx = dt$

इसलिए

$$I_1=\frac{2}{3}\left(ax^2+bx+c\right)^{\frac{3}{2}}+C_1$$

इसी प्रकार

$$I_2=\int\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

समाकलन सूत्रों 12.7.2 (i) के प्रयोग से ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार अंततः

$$\int(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\ dx$$

ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 25 $\int\sqrt{4-x^2}\ dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम लिखते हैं कि $\int\sqrt{4-x^2}\ dx=\int\sqrt{2^2-x^2}\ dx$

इसलिए सूत्र 12.7.1 (iii) द्वारा हम पाते हैं कि

$$\int\sqrt{2^2-x^2}\ dx=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+\frac{2^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$$

$$=\frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}+2\sin^{-1}\frac{x}{2}+C$$

उदाहरण 26 $\int\sqrt{1+\frac{x^2}{9}}dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम लिखते हैं, कि

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{9}}dx = \int \sqrt{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\ dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{x^2+3^2}\ dx$$

इसलिए सूत्र 12.7.1 (ii) द्वारा हम पाते हैं, कि

$$\int \sqrt{1+\frac{x^2}{9}}dx = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+9} + \frac{9}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|\right] + C$$

$$= \frac{x}{6}\sqrt{x^2+9} + \frac{3}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C$$

उदाहरण 27 $\int \sqrt{x^2+2x+5}\ dx$ ज्ञात कीजिए।

हल हम लिखते हैं, कि

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}dx = \int \sqrt{(x+1)^2+4}\ \ dx$$

$x + 1 = t$, इसके अनुसार $dx = dt$ लिखिए।

इस प्रकार

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\ dx = \int \sqrt{t^2+2^2}\ dt$$

इसलिए सूत्र 12.7.1 (ii) द्वारा हम पाते हैं, कि

$$\int \sqrt{x^2+2x+5}\ dx = \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4} + \frac{1}{2}4\log\left|t+\sqrt{t^2+4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{(x+1)^2+4} + 2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+4}\right| + C$$

$$= \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2+2x+5} + 2\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C$$

उदाहरण 28 $\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल 12.7.2 (ii) में वर्णित प्रविधि के अनुसार हम लिखते हैं, कि

$$x = A\left[\frac{d}{dx}\left(1+x-x^2\right)\right]+B$$

$$= A(1-2x)+B$$

x के गुणांक तथा स्थिरांक की तुलना करने पर

$$-2A = 1 \text{ और } A + B = 0$$

इन समीकरणों को हल करने पर हम पाते हैं, कि $A = \frac{-1}{2}$ और $B = \frac{1}{2}$, इस प्रकार समाकलन का परिवर्तित रूप निम्नलिखित है।

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx = -\frac{1}{2}\int(1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int\sqrt{1+x-x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2}I_2 \qquad (1)$$

जहाँ $\qquad I_1 = \int(1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx$

$1 + x - x^2 = t$ रखने पर, तदानुसार $(1-2x)\,dx = dt$

इस प्रकार $\qquad I_1 = \int(1-2x)\sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C_1$

$$= \frac{2}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}} + C_1$$

और $\qquad I_2 = \int\sqrt{1+x-x^2}\,dx = \int\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$

$$x-\frac{1}{2}=t \text{ रखने पर, तदनुसार } dx=dt$$

इसलिए $$I_2=\int\sqrt{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-t^2}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}t\sqrt{\frac{5}{4}-t^2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4}\sin^{-1}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C_2$$ [12.7.1 (iii) द्वारा]

$$=\frac{1}{2}\frac{(2x-1)}{2}\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{4}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{5}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C_2$$

I_1 और I_2 के मानों को (1) में प्रतिस्थापन करने पर हम पाते हैं, कि

$$\int x\sqrt{1+x-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}\left(1+x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{8}(2x-1)\sqrt{1+x-x^2}+\frac{5}{16}\sin^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+C$$

जहाँ $C=\frac{-C_1+C_2}{2}$ अन्य स्वेच्छ अचर हैं।

प्रश्नावली 12.7

निम्नलिखित फलनों का समाकलन ज्ञात कीजिए।

1. $\sqrt{1-4x^2}$
2. $\sqrt{x^2+3x}$
3. $\sqrt{x^2+4x+6}$
4. $\sqrt{x^2+4x+1}$
5. $\sqrt{1-4x-x^2}$
6. $\sqrt{x^2+4x-5}$
7. $\sqrt{1+3x-x^2}$
8. $\sqrt{3-2x-x^2}$
9. $x\sqrt{x+x^2}$
10. $(x+1)\sqrt{2x^2+3}$
11. $(x+3)\sqrt{3-4x-x^2}$

12.7.3 $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ और $\int \frac{dx}{a+b\sin x}$ के प्रकार के समाकलन

इस प्रकार के समाकलनों को ज्ञात करने के लिए हम त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं का प्रयोग करते हैं।

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad \text{और} \quad \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$\tan\frac{x}{2} = t$ के प्रतिस्थापन से ये समाकलन $\int \frac{dt}{at^2+bt+c}$ प्रकार के सुपरिचित समाकलनों में परिणित हो जाते हैं, जिन्हें हम ज्ञात कर सकते हैं।

हम इन्हें उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 29 $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I = \int \frac{dx}{a+b\cos x}$ (1)

$$\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \quad \text{रखिए।}$$

इस प्रकार

$$I = \int \frac{\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx}{a\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)+b\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \int \frac{\sec^2\frac{x}{2}\,dx}{a+b+(a-b)\tan^2\frac{x}{2}}$$

पुनः $\tan\frac{x}{2} = t$, रखने पर $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = dt$

इसलिए

$$I = 2\int \frac{dt}{a+b+(a-b)t^2}$$

$$= \frac{2}{(a-b)}\int \frac{dt}{t^2+\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$$ पर विचार कीजिए।

ध्यान दीजिए कि $\frac{a+b}{a-b}$ का चिह्न धनात्मक अथवा ऋणात्मक होगा, यदि $a^2 > b^2$ या $a^2 < b^2$

स्थिति I मान लीजिए कि $a^2 > b^2$, तब $\frac{a+b}{a-b}$ धनात्मक है।

इसलिए $$I = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan^{-1}\left[t\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right]+C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\tan\frac{x}{2}\right]+C$$

स्थिति II मान लीजिए कि $a^2 < b^2$ तो $\frac{a+b}{a-b}$ ऋणात्मक है।

इसलिए $$I = \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2-(\frac{b+a}{b-a})}$$

$$= \frac{2}{a-b}\int \frac{dt}{t^2 - \left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{(a-b)} \frac{1}{2\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \log \left| \frac{t - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{t + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \right| + C$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \left| \frac{\tan\frac{x}{2} - \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2} + \sqrt{\frac{b+a}{b-a}}} \right| + C$$

स्थिति III मान लीजिए कि $a^2 = b^2$ तब $b = a$ या $b = -a$

यदि $b = a$ तो $I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1+\cos x}$

$$= \frac{1}{2a}\int \sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{a}\tan\frac{x}{2} + C$$

यदि $b = -a$ तब

$$I = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{1-\cos x}$$

$$= \frac{1}{2a}\int \text{cosec}^2\frac{x}{2}\,dx = -\frac{1}{a}\cot\frac{x}{2} + C$$

उदाहरण 30 $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I = \int \frac{dx}{5+4\sin x}$

$$= \int \frac{dx}{5 + 4\dfrac{2\tan\dfrac{x}{2}}{1 + \tan^2\dfrac{x}{2}}}$$

तब $$I = \int \frac{\sec^2\dfrac{x}{2}dx}{5\left(1+\tan^2\dfrac{x}{2}\right)+8\tan\dfrac{x}{2}}$$

$\tan\dfrac{x}{2} = t$ रखिए, तब $\dfrac{1}{2}\sec^2\dfrac{x}{2}dx = dt$

या $$\sec^2\frac{x}{2}\,dx = 2dt$$

इस प्रकार

$$I = 2\int \frac{dt}{5\left(1+t^2\right)+8t}$$

$$= \frac{2}{5}\int \frac{dt}{t^2 + \frac{8}{5}t + 1} = \frac{2}{5}\int \frac{dt}{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$t + \dfrac{4}{5} = u$ रखिए। तब $dt = du$

इसलिए $$I = \frac{2}{5}\int \frac{du}{u^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{2}{5.\frac{3}{5}}\tan^{-1}\left(\frac{5u}{3}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{\left[5\left(t+\frac{4}{5}\right)\right]}{3} + C$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{(5t+4)}{3} + C$$

या $$I = \frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{\left(5\tan\frac{x}{2}+4\right)}{3} + C$$

प्रश्नावली 12.8

निम्नलिखित फलनों का समाकलन कीजिए।

1. $\frac{1}{1+2\cos\theta}$
2. $\frac{1}{2+\cos\theta}$
3. $\frac{1}{4+5\cos x}$
4. $\frac{1}{1-2\sin\theta}$
5. $\frac{1}{4\cos\theta-1}$
6. $\frac{1}{12+12\cos\theta}$
7. $\frac{1}{a+b\sin x}$, जहाँ a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।

विविध उदाहरण (MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 32 निम्नलिखित फलन का प्रति अवकलज ज्ञात कीजिए।

$$[f(x)g''(x)-f''(x)g(x)]$$

हल निरीक्षण विधि द्वारा हम विचार करते हैं कि

$$\frac{d}{dx}[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)]$$

अवकलज के शृंखला-नियम द्वारा हम पाते हैं कि

$$\frac{d}{dx}[f(x)g'(x)-f'(x)g(x)] = f(x)g''(x)+f'(x)g'(x)-[f'(x)g'(x)+f''(x)g(x)]$$

$$= f(x)g''(x) - f''(x)g(x).$$

अतः $f(x)g''(x) - f''(x)g(x)$ का एक प्रति अवकलज $f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$ है।

उदाहरण 32 $\int \frac{dx}{x^2\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{4}}}$ ज्ञात कीजिए।

हल $$\int \frac{dx}{x^2\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{4}}} = \int \frac{dx}{x^5\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$1+\frac{1}{x^4} = t$, रखिए। अतः $\frac{-4}{x^5}\,dx = dt$ इसलिए $\frac{1}{x^5}\,dx = -\frac{1}{4}dt$

अर्थात् $$\int \frac{1}{x^2\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{4}}} = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^{\frac{3}{4}}}$$

$$= -\frac{1}{4}\int t^{\frac{-3}{4}}\,dt \;= -t^{\frac{1}{4}} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2(x^4+1)^{\frac{3}{4}}} = -\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} + C$$

उदाहरण 33 $\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि

$$I = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right)}$$

मान लीजिए $x = t^6$, तो $dx = 6t^5\, dt$

इसलिए $$I = \int \frac{6t^5 dt}{t^2(1+t)} = 6\int \frac{t^3}{1+t} dt$$

$$= 6\int \frac{(t^3+1-1)}{(1+t)}\, dt$$

$$= 6\int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 6\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \log|1+t|\right] + C$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\log|1+t| + C$$

इसलिए $$\int \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}} = 2\sqrt{x} - 3x^{\frac{1}{3}} + 6x^{\frac{1}{6}} - 6\log\left|1 + x^{\frac{1}{6}}\right| + C$$

उदाहरण 34 $\int \frac{x^3 + x}{x^4 - 9} dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि

$$I = \int \frac{x^3 + x}{x^4 - 9} dx$$

$$= \int \frac{x^3}{x^4 - 9} dx + \int \frac{x\, dx}{x^4 - 9}$$

या $$= I_1 + I_2 \quad \ldots (1)$$

जहाँ $I_1 = \int \frac{x^3}{x^4 - 9} dx$ और $I_2 = \int \frac{x}{x^4 - 9}\, dx$

हम सर्वप्रथम I_1 का मान निकालते हैं।

मान लीजिए $t = x^4 - 9$ तदनुसार $dt = 4x^3\, dx$, ताकि $x^3\, dx = \frac{1}{4} dt$

इस प्रकार $$I_1 = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t}$$

$$= \frac{1}{4}\log|t| + C_1 = \frac{1}{4}\log|x^4 - 9| + C_1$$

अब $I_2 = \int \frac{x\,dx}{x^4 - 9}$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए $x^2 = t$, तदनुसार $2x\,dx = dt$ रखिए।

इस प्रकार $$I_2 = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2 - 3^2}$$

$$= \frac{1}{2\times 6}\log\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C_2 = \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C_2$$

I_1 और I_2 के मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$I = \int \frac{x^3 + x}{x^4 - 9}\,dx = \frac{1}{4}\log|x^4 - 9| + \frac{1}{12}\log\left|\frac{x^2-3}{x^2+3}\right| + C$$

जहाँ $C = C_1 + C_2$

उदाहरण 35 $\int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\,d\phi$ ज्ञात कीजिए।

हल $I = \int \frac{(3\sin\phi - 2)\cos\phi}{5 - \cos^2\phi - 4\sin\phi}\,d\phi$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए $t = \sin\phi$, तदनुसार $dt = \cos\phi\; d\phi$

इस प्रकार $$I = \int \frac{(3t-2)\,dt}{5 - (1 - t^2) - 4t}$$

$$= \int \frac{(3t-2)\,dt}{t^2 - 4t + 4} = \int \frac{(3t-2)\,dt}{(t-2)^2}$$

अब समाकल्प

$$\frac{3t-2}{(t-2)^2}=\frac{A}{(t-2)}+\frac{B}{(t-2)^2}$$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

$$\Rightarrow \qquad 3t-2=A(t-2)+B$$

दोनों पक्षों में गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$A=3 \text{ और } B-2A=-2, \text{ या } A=3 \text{ और } B=4$$

इस प्रकार

$$I=\int\left[\frac{3}{t-2}+\frac{4}{(t-2)^2}\right]dt$$

$$=3\int\frac{dt}{t-2}+4\int\frac{dt}{(t-2)^2}$$

$$=3\log|t-2|+4\left(-\frac{1}{t-2}\right)+C$$

$$=3\log|\sin\phi-2|-\left(\frac{4}{\sin\phi-2}\right)+C$$

इसलिए $$I=3\log(2-\sin\phi)+\left(\frac{4}{2-\sin\phi}\right)+C$$

क्योंकि $2-\sin\phi$ सदैव धनात्मक है।

उदाहरण 36 $\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $$I=\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}$$

$$=\int\frac{dx}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}+1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

$$= \frac{1}{2}\,I_1+\frac{1}{2}\,I_2 \qquad (1)$$

जहाँ $$I_1 = \int \frac{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

मान लीजिए $x+\frac{1}{x}=t$, तदनुसार $\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$

इस प्रकार $$I_1 = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C_1 = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+C_1$$

अब

$$I_2 = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{x^2+\frac{1}{x^2}+1} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}$$

मान लीजिए $x-\frac{1}{x}=t$, तदनुसार $\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=dt$

इस प्रकार $$I_2=\int\frac{dt}{t^2+(\sqrt{3})^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C_2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C_2$$

I_1 और I_2 के मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$I=\int\frac{x^2dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}\right)+C$$

जहाँ $C_1+C_2=C$

उदाहरण 37 $\int\sqrt{\tan x}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I=\int\sqrt{\tan x}\,dx$

$\tan x=t^2$ तदनुसार $\sec^2 x\,dx=2\,t\,dt$ रखिए।

इस प्रकार $$dx=\frac{2t\,dt}{(1+t^4)}$$

अतः $$I=\int\frac{2t^2dt}{(1+t^4)}$$

$$=\int\frac{(t^2+1+t^2-1)}{t^4+1}dt$$

$$= \int \frac{t^2+1}{t^4+1}dt + \int \frac{t^2-1}{t^4+1}dt = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

जहाँ $$I_1 = \int \frac{t^2+1}{t^4+1}\,dt = \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+(\sqrt{2})^2}$$

मान लीजिए $t-\frac{1}{t}=u$, तदनुसार $\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = du$

$$I_1 = \int \frac{du}{u^2+(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} + C_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}\,t}\right) + C_1$$

इस प्रकार $$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + C_1$$

अब $$I_2 = \int \frac{t^2-1}{t^4+1}\,dt = \int \frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}\,dt$$

$$= \int \frac{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2-(\sqrt{2})^2}$$

मान लीजिए $t+\frac{1}{t}=u$, तदनुसार $\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt = du$

$$I_2 = \int \frac{du}{u^2-(\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}}\right| + C_2$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{t^2-\sqrt{2}\,t+1}{t^2+\sqrt{2}\,t+1}\right| + C_2$$

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right| + C_2$$

I_1 और I_2 के मानों को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\int \sqrt{\tan x}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \log\left|\frac{\tan x-\sqrt{2\tan x}+1}{\tan x+\sqrt{2\tan x}+1}\right| + C$$

जहाँ $\quad C_1 + C_2 = C$

उदाहरण 38 $\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $\quad I = \int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

$$= \int \frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2} \cdot \frac{x}{\cos x} dx$$

$\frac{x}{\cos x}$ को पहला और $\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}$ को दूसरा फलन लेते हुए खंडशः समाकलन करने पर हम

$$I=\frac{x}{\cos x}\int\frac{x\cos x\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}-\int\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x}\right)\left(\int\frac{x\cos x dx}{(x\sin x+\cos x)^2}\right)\right]dx$$

$\int\frac{x\cos x\;dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$ ज्ञात करने के लिए

मान लीजिए $x\sin x+\cos x=t$, तदनुसार $(\sin x+x\cos x-\sin x)\,dx=dt$, $\Rightarrow$ $x\cos x\,dx=dt$

इसलिए
$$\int\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx=\int\frac{dt}{t^2}$$

$$=-\frac{1}{t}=-\frac{1}{(x\sin x+\cos x)}$$

अतः
$$I=\frac{x}{\cos x}\times\frac{-1}{x\sin x+\cos x}-\int\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}\times\frac{-1}{x\sin x+\cos x}dx$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\sec^2 x.dx$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$$

$$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\frac{\sin x}{\cos x}+C$$

$$=\frac{-x+x\sin^2 x+\sin x\;\cos x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+C$$

$$=\frac{\sin x\;\cos x-x\left(1-\sin^2 x\right)}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+C$$

$$=\frac{\cos x(\sin x - x\cos x)}{\cos x(x\sin x + \cos x)}+C$$

या $$\int \frac{x^2 dx}{(x\sin x+\cos x)^2}=\frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x+\cos x}+C$$

उदाहरण 39 $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left[\log\left(x^2+1\right)-2\log x\right]}{x^4}\,dx$ ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $$I=\int \frac{\sqrt{x^2+1}\left[\log\left(x^2+1\right)-2\log x\right]}{x^4}\,dx$$

$$=\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^4}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]dx$$

$$=\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\times\frac{1}{x^3}\right]dx$$

$1+\frac{1}{x^2}=t \Rightarrow -\frac{2}{x^3}dx=dt$ रखिए।

इस प्रकार $$I=-\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}\log t\;dt$$

$\log t$ को पहला और $\sqrt{t}$ को दूसरा फलन लेते हुए खंडशः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$I=-\frac{1}{2}\left[\log t\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-\int\frac{1}{t}\times\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\,dt\right]$$

$$=-\frac{1}{3}\log t\times t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$= -\frac{1}{3}\log t \times t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{9} t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} \log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{9}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

या $$I = -\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left[\log\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \frac{2}{3}\right] + C$$

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 12)

निम्न फलनों को समाकलित कीजिए।

1. $e^{\tan^{-1} x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$ [संकेत $\tan^{-1} x = t$ रखें]

2. $\frac{1}{x-x^3}$

3. $\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}$

4. $\frac{1}{\sqrt{\sin^3 x \cos x}}$

5. $\frac{1}{x\sqrt{ax-x^2}}$ [संकेत $x = \frac{a}{t}$ रखें]

6. $\frac{\cos x}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$

7. $\frac{5x}{(x+1)(x^2+9)}$

8. $\frac{\sin x}{\sin(x-\alpha)}$

9. $\frac{e^{5\log x} - e^{4\log x}}{e^{3\log x} - e^{2\log x}}$

10. $\frac{\sin^8 x - \cos^8 x}{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$

11. $\frac{1}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$

12. $\frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}$

13. $\frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)}$

14. $\frac{x^4}{(x-1)(x^2+1)}$

15. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}$

16. $\dfrac{1}{1+x^4}$

17. $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

18. $\dfrac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$

19. $\cos^3 x \; e^{\log \sin x}$

20. $e^{3\log x}\left(x^4+1\right)^{-1}$

21. $5^{5^{5^{x}}}\,5^{5^{x}}\,5^{x}$

22. $f'(ax+b)\left[f(ax+b)\right]^n$

23. $\dfrac{\left(x^4-x\right)^{\frac{1}{4}}}{x^5}$

24. $\dfrac{x}{1+\sin x}$

25. $\dfrac{1}{\sqrt{\sin^3 x \sin(x+\alpha)}}$

26. $\log(\log x)+\dfrac{1}{(\log x)^2}$

27. $\dfrac{\sin^{-1}\sqrt{x}-\cos^{-1}\sqrt{x}}{\sin^{-1}\sqrt{x}+\cos^{-1}\sqrt{x}}$

28. $\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$

29. $\dfrac{1}{3\cos x+4\sin x}$

30. $\dfrac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}e^x$

31. $\dfrac{1}{\sin x+\sin 2x}$

32. $\dfrac{1}{\sin x(3+2\cos x)}$

33. $\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)^2(x+2)}$

34. $\left[\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right]$

35. $\tan^{-1}\sqrt{\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)}$

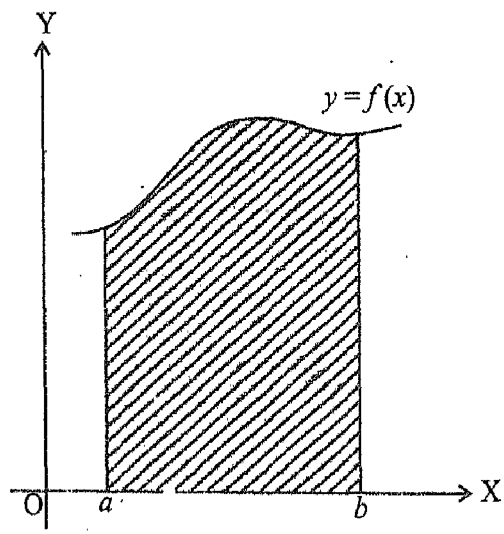
निश्चित समाकलन (DEFINITE INTEGRALS) 13

13.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कक्षाओं में हम ऐसे क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करना सीख चुके हैं, जो रेखा-खंडों से घिरे होते हैं। तथापि ऐसे क्षेत्र, जो अंशतः अथवा पूर्णतः वक्रों से घिरे हों, उनका क्षेत्रफल पूर्व सीखी गई विधियों से नहीं ज्ञात किया जा सकता है। अतः एक सशक्त गणितीय प्रविधि की आवश्यकता है, जो इस प्रकार की समस्याओं का हल निकाल सके। यह निश्चित समाकलन की संकल्पना के आधार पर संभव हो सका है।

अध्याय 12 में हम अनिश्चित समाकलन का अध्ययन कर चुके हैं। इस अध्याय में निश्चित समाकलन को पारिभाषित करेंगे, और देखेंगे कि यह किस प्रकार किसी वक्र के अंतर्गत क्षेत्र का क्षेत्रफल निकालने में प्रयोग किया जा सकता है। हम उन प्रमेयों की व्याख्या करेंगे, जो इसका मान निकालने में उपयोगी हैं। हम यह भी देखेंगे, कि अनिश्चित समाकलन और निश्चित समाकलन किस प्रकार परस्पर निकटता से संबंधित हैं।

विभिन्न क्षेत्रों जैसे अर्थशास्त्र, वित्त-व्यवस्था और प्रायिकता आदि की रोचक समस्याओं के हल में निश्चित समाकलन का प्रयोग होता है। किसी वक्र के अंतर्गत क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की प्रविधि प्रायिकता के समस्याओं के हल में प्रयुक्त की जा सकती है।



आकृति 13.1

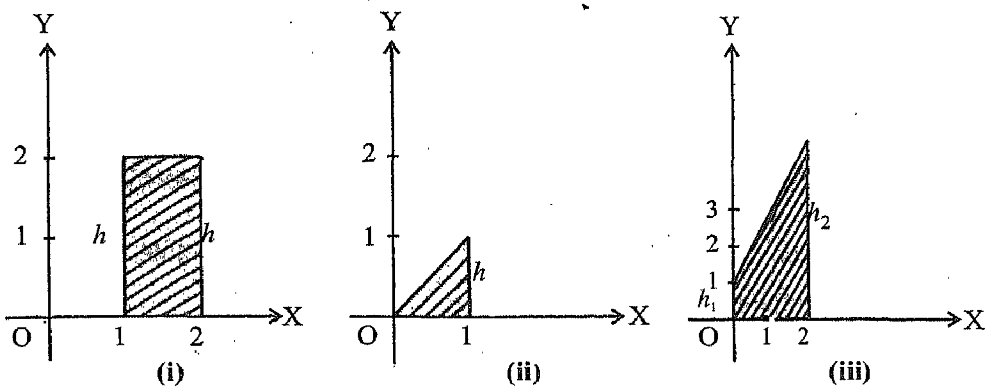
13.2 एक योगफल की सीमा के रूप में निश्चित समाकलन (Definite Integral as the Limit of a Sum)

मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ पर f एक संतत फलन पारिंभाषित है। मान लीजिए कि फलन के सभी मान अऋणात्मक/ऋणेत्तर हैं। इस प्रकार वक्र का लेखा-चित्र x-अक्ष के ऊपर है (आकृति 13.1)।

इस वक्र, x-अक्ष तथा कोटियों $x = a$ और $x = b$ के

बीच स्थित, अर्थात् आकृति 13.1 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने की समस्या है।

इस समस्या के हल करने की धारणा को प्राप्त करने के लिए हम $f(x)$ के तीन विशिष्ट स्थितियों पर विचार करते हैं (आकृति 13.2)।



आकृति 13.2

आकृति 13.2 (i) में [1, 2] पर $f(x) = 2$

आकृति 13.2 (ii) में [0, 1] पर $f(x) = x$

आकृति 13.2 (iii) में [0, 2] पर $f(x) = 2x + 1$

आकृति 13.2 में छायांकित क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करने के सूत्रों को हम जानते हैं।

आकृति 13.2 (i) में आयताकार क्षेत्र का

क्षेत्रफल = आधार × ऊँचाई (h)

आकृति 13.2 (ii) में त्रिभुजाकार क्षेत्र का

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई (h)

आकृति 13.2 (iii) में समलंब चतुर्भुजाकार क्षेत्र का

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × दो किनारों पर की ऊँचाइयों (h_1, h_2) का योगफल।

(ध्यान दीजिए यह वही है, जैसा $\frac{1}{2}$ × समांतर रेखा-खंडों का योगफल × उनके बीच की दूरी)

उपर्युक्त सूत्रों से हम पाते हैं कि इन तीन स्थितियों में सर्वनिष्ठ परिस्थिति यह है कि

क्षेत्र का क्षेत्रफल = आधार × क्षेत्र की माध्य ऊँचाई

आयताकार क्षेत्र की स्थिति में ऊँचाई में परिवर्तन नहीं है, अतः माध्य ऊँचाई h है।

त्रिभुजाकार क्षेत्र की स्थिति में ऊँचाई समान दर से 0 से h तक बढ़ती है, अतः माध्य ऊँचाई $= \frac{0+h}{2} = \frac{h}{2}$

समलंब चतुर्भुजाकार क्षेत्र में ऊँचाई h_1 से h_2 तक समान दर से बढ़ती है, अतः माध्य ऊँचाई $\frac{h_1+h_2}{2}$ है।

उपर्युक्त $f(x)$ की तीन विशिष्ट स्थितियों के आधार पर हम $[a, b]$ पर पारिभाषित किसी भी फलन f के लिए निम्नलिखित सूत्रीकरण करते हैं,

आबद्ध (घिरे) क्षेत्र का क्षेत्रफल (आकृति 13.1 में छायांकित क्षेत्र)

= *आधार × माध्य ऊँचाई*

आधार, अंतराल $[a, b]$ की लंबाई हैं किसी बिंदु x पर ऊँचाई उस बिंदु पर f का मान है।

इसलिए माध्य ऊँचाई $[a, b]$ के प्रत्येक बिंदु पर f के मानों का माध्य है। यह ज्ञात करना इतना सरल नहीं है क्योंकि ऊँचाई एक समान दर से परिवर्तित नहीं हो सकती है।

अब हमारी समस्या अंतराल $[a, b]$ में f के मानों का माध्य ज्ञात करना है।

13.2.1 *एक अंतराल में एक फलन का माध्य मान (Average value of a function in an interval)*

यदि अंतराल $[a, b]$ में f के सीमित संख्या में ही मान हों, तो निम्नांकित सूत्र से माध्य मान ज्ञात किया जा सकता है,

$$f \text{ का } [a, b] \text{ में मान का माध्य} = \frac{\text{अंतराल } [a,b] \text{ में } f \text{ के मानों का योग}}{\text{मानों की संख्या}}$$

परंतु हमारी समस्या (आकृति 13.1) में अंतराल $[a, b]$ में f के मानों की संख्या अनंत है। ऐसी स्थिति में माध्य कैसे ज्ञात किया जाए? उपर्युक्त सूत्र हमारी सहायता नहीं करता है। इसलिए हम f के माध्य मान का अनुमान लगाने के लिए निम्नलिखित ढंग का सहारा लेते हैं।

प्रथम अनुमान (First Estimate)

f के मान का बिंदु a पर विचार कीजिए। यह मान $f(a)$ है। हम इस मान नामतः $f(a)$ को f के $[a, b]$ में मानों के माध्य का कच्चा अनुमान लेते हैं।

f का $[a, b]$ में माध्य मान (प्रथम अनुमान) $= f(a)$ (1)

द्वितीय अनुमान (Second Estimate)

$[a, b]$ को दो समान भागों या उप-अंतरालों में बाँटिए। मान लीजिए कि प्रत्येक अंतराल की लंबाई h है। इस प्रकार

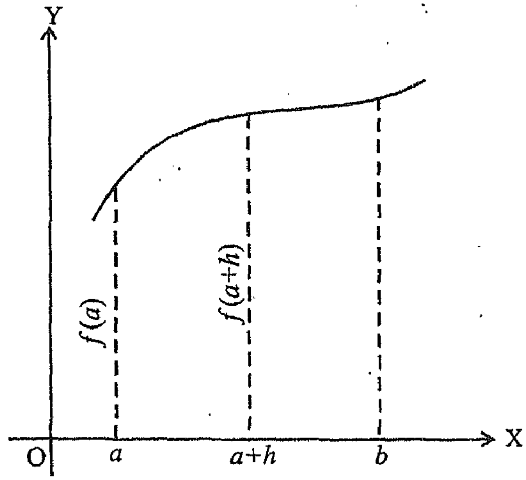
$$h = \frac{b-a}{2}$$

इन दोनों उप-अंतरालों के बाईं छोर पर के मानों पर विचार कीजिए। ये मान $f(a)$ और $f(a+h)$ है (आकृति 13.3)।

इन दो मानों के माध्य को $[a, b]$ में f के माध्य मान के दूसरे अनुमान के रूप में लीजिए।

इस प्रकार $[a, b]$ में f के माध्य मान का दूसरा अनुमान

$$= \frac{f(a)+f(a+h)}{2}, \quad h = \frac{b-a}{2} \qquad (2)$$



आकृति 13.3

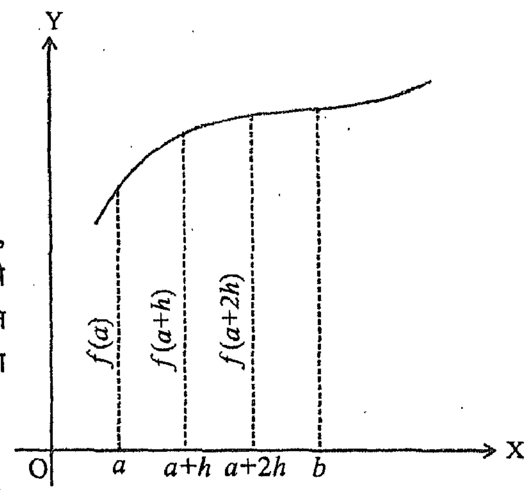
इस द्वितीय अनुमान को प्रथम अनुमान की अपेक्षा अच्छा अनुमान माना जा सकता है।

तृतीय अनुमान (Third Estimate)

$[a, b]$ को h लंबाई के तीन समान उप-अंतरालों में बाँटिए (आकृति 13.4)। इस प्रकार $h = \dfrac{b-a}{3}$

इन तीनों उप-अंतरालों के बाएँ छोर पर के मानों $f(a)$, $f(a+h)$, $f(a+2h)$ का माध्य ज्ञात कीजिए। इसे $[a, b]$ में f के मानों के माध्य का तीसरा अनुमान समझिए। इस प्रकार $[a, b]$ में f के मानों के माध्य का तीसरा अनुमान

$$= \frac{f(a)+f(a+h)+f(a+2h)}{3}, \; h = \frac{b-a}{3} \qquad (3)$$



आकृति 13.4

इस तीसरे अनुमान को पूर्व के दोनों अनुमानों से अच्छा अनुमान होने की आशा की जाती है।

nवाँ अनुमान (nth Estimate)

मान लीजिए कि n एक प्राकृतिक संख्या है। अंतराल $[a, b]$ को n समान उप-अंतरालों, जिनकी लंबाई h हो (आकृति 13.5), में विभक्त कीजिए। इस प्रकार $h = \frac{b-a}{n}$। इस n उप-अंतरालों के बाएँ छोर पर स्थित बिंदुओं पर f के मानों को लीजिए। ये मान $f(a), f(a+h), \ldots, f(a+\overline{n-1}\,h)$ है। इन मानों का माध्य ज्ञात कीजिए। इसे $[a, b]$ में f के मानों के माध्य लीजिए। इस प्रकार f के माध्य मान का nवाँ अनुमान

$$= \frac{f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}\,h)}{n},\ h=\frac{b-a}{n} \qquad (4)$$

n के उच्चतर मानों के संगत (4) को f के $[a, b]$ में मानों के उत्तम माध्य का अनुमान होने की आशा की जाती है, जिसकी हमें तलाश है।

इस प्रकार हम $[a, b]$ में f के मानों के माध्य के अनुमान का निम्नलिखित अनुक्रम पाते हैं।

$$f(a)$$

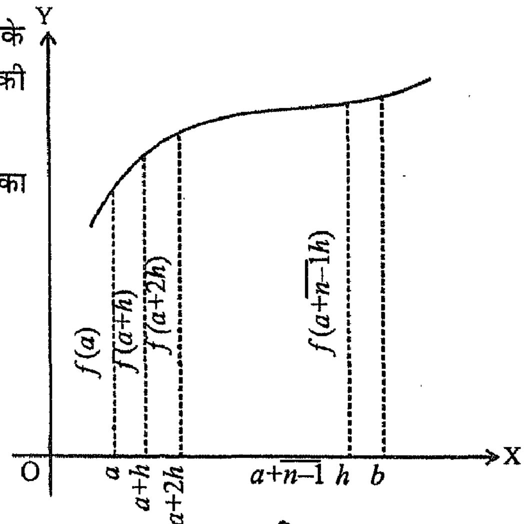
$$\frac{1}{2}[f(a)+f(a+h)],\ h=\frac{b-a}{2}$$

$$\frac{1}{3}[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)],\ h=\frac{b-a}{3}$$

- -

- -

$$\frac{1}{n}[f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}\,h)],\quad h=\frac{b-a}{n}$$



आकृति 13.5

जैसे-जैसे हम इस अनुक्रम को आगे बढ़ाते हैं, वैसे-वैसे हम $[a, b]$ में f के मानों के माध्य के निकटतर पहुँचते रहते हैं, जो अभीष्ट है। इसलिए इन अनुमानों की सीमा को $[a, b]$ में f के मानों का माध्य लेना तर्क संगत है। दूसरे शब्दों में,

$[a, b]$ में f के मानों का माध्य मान

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\cdots+f(a+\overline{n-1}\,h)\right],\ h=\frac{b-a}{n} \qquad (5)$$

13.2.2 *निश्चित समाकलन* (*Definite integral*)

अब हम आकृति (13.1) में छायांकित क्षेत्र के क्षेत्रफल का सूत्र प्राप्त करते हैं जहाँ आधार $(b-a)$, और माध्य ऊँचाई (5) द्वारा प्राप्त होती है। इस प्रकार वक्र f, x-अक्ष तथा कोटियों $x=a$ और $x=b$ से आबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= (b-a)\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\cdots+f\left(a+\overline{n-1}\,h\right)\right], h=\frac{b-a}{n} \qquad (6)$$

(6) के दाहिने पक्ष के व्यंजक को हम निश्चित समाकलन की परिभाषा के रूप में लेते हैं। इस निश्चित समाकलन को हम $\int_a^b f(x)\,dx$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इसे f का a से b तक का समाकलन पढ़ते हैं। इस प्रकार हम निम्न परिभाषा पाते हैं

परिभाषा $$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a)+f(a+h)+\cdots+f\left(a+\overline{n-1}\,h\right)\right], \qquad (7)$$

जहाँ $$h=\frac{b-a}{n}$$

टिप्पणी f के $[a,b]$ में मानों के माध्य मान के अनुमानों को प्राप्त करने में हम उप-अंतरालों के बाएँ छोर पर स्थित बिंदुओं पर f के मानों को लिए हैं। ठीक इसी प्रकार हम सभी उप-अंतरालों के दाहिने छोर के बिंदुओं पर मानों को भी ले सकते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(b)\right],\ h=\frac{b-a}{n} \qquad (8)$$

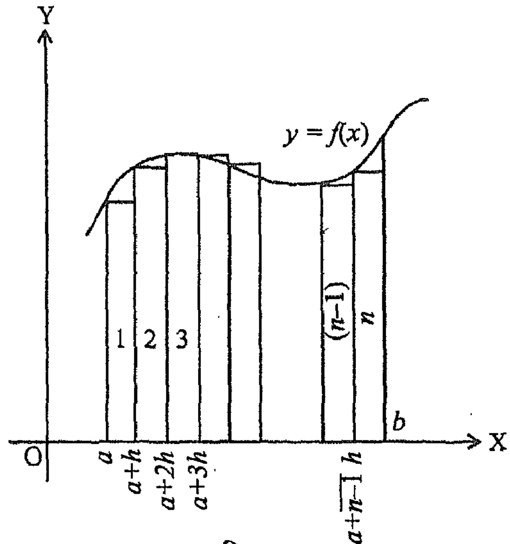
यह सत्य है, कि (7) और (8) की सीमाएँ समान आती हैं। इसकी उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा क्षेत्र के परे है।

13.2.3 *आयतों के क्षेत्रफलों द्वारा निश्चित समाकलन* (*Definite integral through areas of rectangles*)

व्याख्या निश्चित समाकलन की (7) में दी गई परिभाषा की व्याख्या हम अन्य प्रकार से भी कर सकते हैं। हम (7) को निम्नलिखित प्रकार से भी लिख सकते हैं।

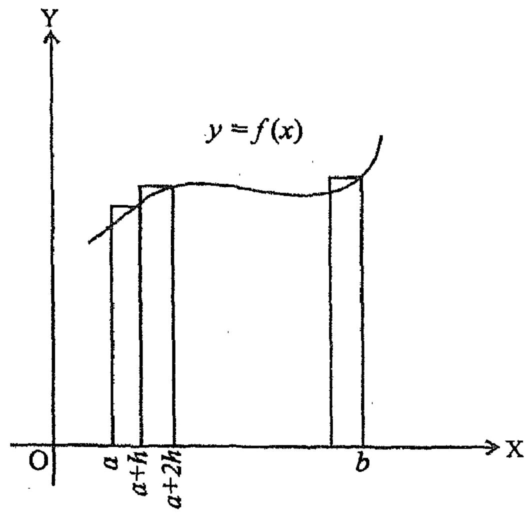
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[h\,f(a)+h\,f(a+h)+\cdots+h\,f\left(a+\overline{n-1}h\right)\right], h=\frac{b-a}{n} \qquad (9)$$

यहाँ प्रथम पद $hf(a)$ है। यह आकृति 13.6 में 1 से चिह्नित आयत का क्षेत्रफल है [क्योंकि h और $f(a)$ इस आयत की संलग्न भुजाएँ हैं] इसी प्रकार दूसरा पद $h.f(a+h)$ उपर्युक्त आकृति में 2 से चिह्नित आयत का क्षेत्रफल है।



आकृति 13.6

इस प्रकार, $hf(a)+hf(a+h)+\ldots+hf\left(a+\overline{n-1}\,h\right)$, आकृति 13.6 में चिह्नित n आयतों के क्षेत्रफलों का योगफल है। इन आयतों का सम्मिलन सन्निकटतः वक्र और x-अक्ष के बीच का क्षेत्रफल है यदि n बढ़ता है और क्षेत्र का सन्निकटन क्षेत्रफल के और समीप पहुँचता है। इसलिए $n \to \infty$ लेकर इसकी सीमा को हम $\int_a^b f(x)\,dx$ के रूप में पाते हैं, जो (7) के अनुसार वक्र $y=f(x)$ और रेखाओं $y=0$, $x=a$ और $x=b$ से आबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है।



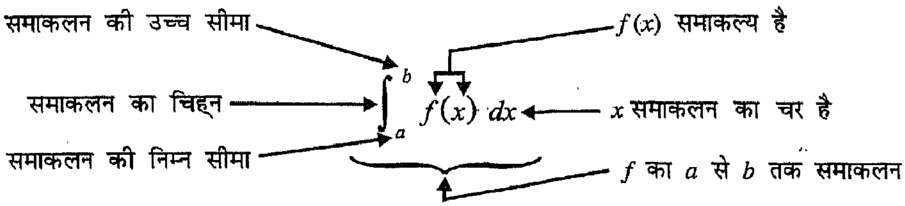
आकृति 13.7

यदि हम बाएँ के बजाए दाहिने छोर के बिंदुओं को लेते हैं तब भी उसी क्षेत्रफल को अन्य आयतों के क्षेत्रफलों के सम्मिलन के सीमा के रूप में पाते हैं (आकृति 13.7)। इससे $\int_a^b f(x)\,dx$ वही क्षेत्रफल है, जिसे (8) द्वारा व्यक्त किया गया है, की व्याख्या होती है।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त विधियों नामतः बाएँ छोर के बिंदुओं या दाहिने छोर के बिंदुओं में से किसी एक से ही वांछित क्षेत्रफल की गणना करना पर्याप्त है।

शब्दावली (Terminology)

$\int_a^b f(x)dx$ से संबंधित निम्न पद दिए जाते हैं।



टिप्पणी किसी फलन के लिए अंतराल पर निश्चित समाकलन का मान, फलन और दिए अंतराल पर निर्भर करता है। इसका मान स्वतंत्र चर राशि जिसे हम समाकलन के चर के रूप में प्रयोग करते हैं, पर निर्भर नहीं करता है। यदि हम x के अतिरिक्त अन्य स्वतंत्र चर t या u का प्रयोग करें तो $\int_a^b f(x)dx$ के स्थान पर $\int_a^b f(t)dt$ या $\int_a^b f(u)du$ लिख सकते हैं। इस प्रकार निश्चित समाकलन के चर को मूक चर *(dummy variable)* कहते हैं।

उदाहरण 1 $\int_1^2 x\,dx$ का एक योगफल के सीमा के रूप में मान निकालिए।

हल हमें ज्ञात है कि

$$a = 1,\ b = 2,\ f(x) = x$$

अब $$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$$

इसलिए परिभाषा द्वारा

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

अत:

$$\int_1^2 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(1) + f\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[1+\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

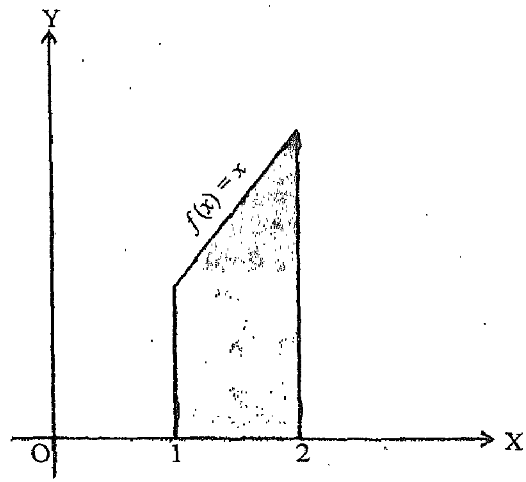
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\text{-बार}}+\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}\{1+2+\cdots+(n-1)\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[n+\frac{1}{n}.\frac{(n-1)n}{2}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{3n-1}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right] = \frac{3}{2}$$

टिप्पणी हम देखते हैं कि $\int_1^2 x\,dx$ आकृति 13.8 में छायांकित समलंब चतुर्भुजाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल है। हम इस क्षेत्रफल को सूत्र की सहायता से भी ज्ञात कर सकते हैं। इस क्षेत्रफल को हम $\frac{1}{2}(2-1)(1+2)$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ के रूप में पाते हैं। इस प्रकार प्राप्त उत्तर का सत्यापन होता है।



आकृति 13.8

उदाहरण 2 $\int_a^b x^2 dx$ का एक योगफल की सीमा के रूप में मान ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = x^2$, इसलिए

$$\int_a^b x^2 dx = (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+nh)\right]$$

[जब $n \to \infty, h \to 0$]

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[(a+h)^2 + (a+2h)^2 + \cdots + (a+nh)^2\right]$$

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\underbrace{a^2 + a^2 + \cdots + a^2}_{n-\text{बार}} + 2ah(1+2+\cdots+n) + h^2\left(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2\right)\right]$$

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[na^2 + n(n+1)ah + \frac{n(n+1)(2n+1)h^2}{6}\right]$$

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \left[a^2 + (n+1)ah + \frac{(n+1)(2n+1)h^2}{6}\right]$$

$$= (b-a) \lim_{n\to\infty} \left[a^2 + (nh+h)a + \frac{(nh+h)(2nh+h)}{6}\right]$$

$$= (b-a) \lim_{h\to 0} \left[a^2 + (b-a+h)a + \frac{1}{6}(b-a+h)\left(2(b-a)+h\right)\right]$$

$$= (b-a)a^2 + (b-a)^2 a + \frac{2}{6}(b-a)^3$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\left[3a^2 + 3(b-a)a + b^2 - 2ab + a^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\left(a^2 + ab + b^2\right) = \frac{1}{3}\left(b^3 - a^3\right).$$

उदाहरण 3 $\int_0^2 e^x dx$ का एक योगफल के सीमा के रूप में मान ज्ञात कीजिए।

हल परिभाषा से,

$$\int_0^2 e^x dx = (2-0) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[e^0 + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{4}{n}} + \cdots + e^{\frac{2n-2}{n}}\right]$$

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left[\frac{e^{\frac{2n}{n}} - 1}{e^{\frac{2}{n}} - 1} \right]$$ (गुणोत्तर श्रेणी के n पदों के योगफल के सूत्र के प्रयोग द्वारा)

$$= 2 \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \frac{e^2 - 1}{(e^{\frac{2}{n}} - 1)}$$

$$= \frac{2\left(e^2 - 1\right)}{\lim_{n \to \infty} \frac{(e^{\frac{2}{n}} - 1)}{\frac{2}{n}} . 2} = e^2 - 1$$

उदाहरण 4 $\int_a^b \cos x \, dx$ का मान योग के सीमा के रूप में ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $f(x) = \cos x$, इसलिए

$$\int_a^b \cos x \, dx = \lim_{n \to \infty} h \left[\cos\left(a + h\right) + \cos\left(a + 2h\right) + \cdots + \cos\left(a + nh\right)\right]$$

मान लीजिए $\quad S = \cos(a + h) + \cos(a + 2h) + \ldots + \cos(a + nh)$

दोनों पक्षों में $2 \sin \frac{1}{2} h$, से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$2\sin \frac{1}{2} h . S = 2 \sin \frac{1}{2} h \cos(a + h) + 2 \sin \frac{1}{2} h \cos(a + 2h) + \ldots + 2 \sin \frac{1}{2} h \cos(a + nh)$$

$$= \sin(a + \frac{3}{2} h) - \sin(a + \frac{1}{2} h) + \sin(a + \frac{5}{2} h) - \sin(a + \frac{3}{2} h)$$

$$+ \ldots + \sin[a + \frac{1}{2} (2n + 1) h] - \sin[a + \frac{1}{2} (2n - 1) h]$$

$$= \sin\left[a + \frac{1}{2}(2n + 1)h\right] - \sin\left(a + \frac{1}{2}h\right)$$

$$= \sin\left(b+\frac{1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right), \text{ for } nh = b-a$$

इस प्रकार

$$\int_a^b \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty} h \frac{\left[\sin\left(b+\frac{1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]}{2\sin\frac{1}{2}h}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{h/2}{\sin h/2}\left[\sin\left(b+\frac{1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h/2}{\sin h/2} \lim_{h\to 0}\left[\sin\left(b+\frac{1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{1}{2}h\right)\right] \left(\text{जब } n\to\infty \atop h\to 0\right)$$

$$= 1.\,(\sin b-\sin a) = \sin b - \sin a$$

टिप्पणी उपर्युक्त चार उदाहरण सिद्धांत की व्याख्या करने के लिए है। तथापि निश्चित समाकलनों के हल करने की सरल विधि भी है। इसे हम अग्रिम अनुच्छेद में सीखेंगे।

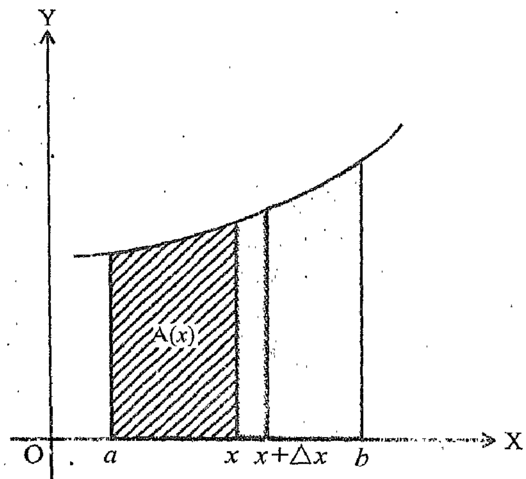
प्रश्नावली 13.1

निम्नलिखित निश्चित समाकलनों को हल कीजिए :

1. $\int_a^b x\ dx$
2. $\int_0^5 (x+1)\ dx$
3. $\int_0^5 (x-1)\ dx$
4. $\int_1^4 (x^2-x)\ dx$
5. $\int_{-1}^1 e^x\ dx$
6. $\int_a^b \sin x\ dx$
7. $\int_1^2 \left(x^2+x\right)dx$
8. $\int_2^3 x^3\ dx$
9. $\int_0^4 \left(x+e^{2x}\right)dx$
10. $\int_a^b \sin^2 x\ dx$

13.3 कलन की आधारभूत प्रमेय (Fundamental Theorem of Calculus)

13.3.1 *क्षेत्रफल फलन* (*Area function*) हम $\int_a^b f(x)\,dx$ को वक्र $y=f(x)$, $a \le x \le b$, x-अक्ष और कोटियों $x=a$ और $x=b$ से आबद्ध क्षेत्र के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किए हैं। मान लीजिए $[a, b]$ में x कोई चर बिंदु है। तब $\int_a^x f(x)\,dx$ से आकृति 13.9 में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल निरूपित होता है [यहाँ यह मान लिया गया है, कि $f(x)>0$, $x \in [a,b]$, निम्नलिखित कथन समानत: अन्य फलनों के लिए सत्य है।] इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x के मान पर निर्भर है।



आकृति 13.9

दूसरे शब्दों में इस छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल x का फलन है। x के इस फलन को हम A (x) द्वारा व्यक्त करते हैं। इस फलन A (x) को *क्षेत्रफल फलन* कहते हैं।

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

हम दिखाएंगे कि $A'(x) = f(x)$ अर्थात् $f(x)$ का प्रति अवकलन $A(x)$ है।

13.3.2 *प्रमेय 1 (समाकलन गणित की प्रथम आधारभूत प्रमेय) Theorem 1 (First Fundamental Theorem of Integral Calculus)* । मान लीजिए कि क्षेत्रफल फलन

$$A(x) = \int_a^x f(x)\,dx \text{ सभी } x \ge a \text{ के लिए}$$

पारिभाषित है। इस फलन को अंतराल $[a, b]$ में संतत मान लिया गया है। तब

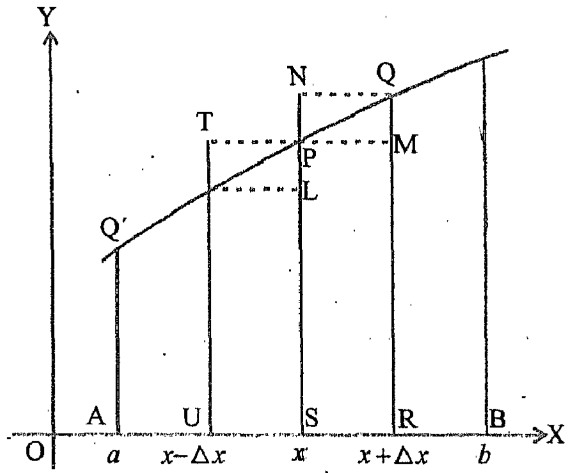
$$A'(x) = f(x) \text{ सभी } x \in [a,b] \text{ के लिए।}$$

उपपत्ति सर्वप्रथम हम f को x के दोनों ओर छोटे अंतराल I में धनात्मक तथा बढ़ता हुआ मानकर विचार करते हैं (आकृति 13.10)। स्मरण कीजिए कि A (x), a से x तक फलन f द्वारा बद्ध क्षेत्रफल है, और

$$A'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

पहले हम दाहिने पक्ष की सीमा से प्रारंभ करते हैं। क्योंकि हमें सीमा $\Delta x \to 0$ लेना है, अतः Δx को धनात्मक परंतु अत्यंत छोटा लेते हैं। इस प्रकार $[x, x + \Delta x] \subset I$ अब $A(x + \Delta x)$ क्षेत्रफल ARQQ′ और $A(x)$ क्षेत्रफल ASPQ′ है। इस प्रकार $A(x + \Delta x) - A(x)$ क्षेत्र PQRS का क्षेत्रफल है (आकृति 13.10 (i))। आकृति 13.10 से स्पष्ट है कि

क्षेत्रफल (PMRS) < क्षेत्रफल (PQRS)
< क्षेत्रफल (NQRS)



आकृति 13.10

अर्थात् $f(x)\,\Delta x < A(x + \Delta x) - A(x) < f(x + \Delta x)\,\Delta x$ (2)

परंतु $\Delta x > 0$, हम (2) से पाते हैं कि

$$f(x) < \frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} < f(x+\Delta x) \tag{3}$$

पुनः अंतराल $[x - \Delta x, x]$, लेने पर हम पाते हैं

$$f(x-\Delta x) < \frac{A(x) - A(x-\Delta x)}{\Delta x} < f(x)$$

अर्थात्
$$f(x-\Delta x) < \frac{A(x-\Delta x) - A(x)}{-\Delta x} < f(x) \tag{4}$$

$\Delta x \to 0$ लेने पर तथा सैंडविच प्रमेय को प्रयोग करने से, (3) से हम पाते हैं,

$$R\,A'(x) = f(x)$$

और (4) से पाते हैं

$$L\,A'(x) = f(x)$$

अतः $A'(x)$ का अस्तित्व है और यह $f(x)$ के बराबर है।

टिप्पणी पाठक को राय दी जाती है कि वे इस प्रमेय की उपपत्ति उस स्थिति में भी ज्ञात करें, जब x के

दोनों ओर एक छोटे अंतराल में f, x के एक ओर बढ़ रहा और दूसरी ओर घट रहा हो।

13.3.3 *समाकलन गणित की द्वितीय आधारभूत प्रमेय* (*Second Fundamental Theorem of Integral Calculus*) हम नीचे एक ऐसे प्रमुख प्रमेय की उपपत्ति देते हैं, जो निश्चित समाकलन के मान को प्रति अवकलज के उपयोग से ज्ञात कराती है।

प्रमेय 2 मान लीजिए कि बंद अंतराल $[a, b]$ से f एक संतत फलन है। f का एक प्रति अवकलज F है। तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

उपपत्ति मान लीजिए

$$\mathrm{A}(x) = \int_a^x f(x)\,dx,\ x \in [a, b]$$

क्षेत्रफल फलन है। हम प्रमेय (1) में सिद्ध कर चुके हैं कि $\mathrm{A}(x)$, $f(x)$ का प्रति अवकलज है अर्थात्

$$\mathrm{A}'(x) = f(x),\ x \in [a, b] \qquad (1)$$

यह ज्ञात है कि f का प्रति अवकलज F है

$$\mathrm{F}'(x) = f(x),\ x \in [a, b] \qquad (2)$$

(1) और (2) की तुलना से हम पाते हैं कि

$$\mathrm{A}'(x) - \mathrm{F}'(x) = 0,\ x \in [a, b]$$

दूसरे शब्दों में $[\mathrm{A}(x) - \mathrm{F}(x)]$ का $[a, b]$ पर अवकलज शून्य है। अध्याय 11 के प्रमेय 7 के टिप्पणी 4 के अनुसार $\mathrm{A}(x) - \mathrm{F}(x)$ एक अचर फलन "मान लिया C" है।

इसलिए $\quad \mathrm{A}(x) - \mathrm{F}(x) = \mathrm{C}$

अर्थात् $\quad \mathrm{A}(x) = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C},\ x \in [a, b] \qquad (3)$

जब $\quad x = a$, (3) द्वारा

$$\mathrm{A}(a) = \mathrm{F}(a) + \mathrm{C} \qquad (4)$$

और जब $\quad x = b$, (3) द्वारा

$$\mathrm{A}(b) = \mathrm{F}(b) + \mathrm{C} \qquad (5)$$

(4) और (5) से, हम पाते हैं कि

$$\mathrm{A}(b) - \mathrm{A}(a) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) \qquad (6)$$

अब $$\text{A}(a) = \int_a^a f(x)\ dx = 0$$

और $$\text{A}(b) = \int_a^b f(x)\ dx$$ (क्षेत्रफल फलन की परिभाषा से)

इन मानों को (6) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)\ dx = \text{F}(b) - \text{F}(a),$$

जिससे परिणाम सिद्ध होता है।

टिप्पणी

1. दूसरे शब्दों में प्रमेय का कथन यह है कि,

$$\int_a^b f(x)\ dx = (\text{उच्च सीमा } b \text{ पर एक प्रति अवकलज का मान})$$
$$- (\text{निम्न सीमा } a \text{ पर उसी प्रति अवकलज का मान})$$

2. यह प्रमेय अत्यंत उपयोगी है, क्योंकि इससे निश्चित समाकलनों के मान को सरलतापूर्वक ज्ञात करने की विधि प्राप्त होती है। इसमें योगफल की सीमा ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं पड़ती है।
3. एक निश्चित समाकलन निकालने में जटिल संक्रिया एक ऐसे फलन का प्राप्त करना है, जिसका अवकलज समाकल्य हो। इस प्रकार हम देखते हैं कि अवकलन और समाकलन गणित में निकटतम संबंध है।

संकेतन सुविधा के लिए $\text{F}(b) - \text{F}(a)$ को $\text{F}(x)\big]_a^b$ अथवा $[\text{F}(x)]_a^b$ द्वारा व्यक्त करते हैं। इस प्रकार

$$\int_a^b f(x)dx = \text{F}(x)]_a^b \text{ or } [\text{F}(x)]_a^b$$

जहाँ $\text{F}(x)$, $f(x)$ का प्रति अवकलज है।

$\int_a^b f(x)dx$ के गणना के प्रक्रम

(i) अनिश्चित समाकलन $\int f(x)\,dx$ ज्ञात कीजिए। मान लीजिए कि यह $\text{F}(x)$ है। समाकलन अचर C को लेने की आवश्यकता नहीं है, क्योंकि यदि हम $\text{F}(x)$ के अतिरिक्त $\text{F}(x) + \text{C}$ पर विचार करें, तो पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)+C]_a^b = [F(b)+C]-[F(a)+C] = F(b)-F(a)$$

इस प्रकार निश्चित समाकलन के ज्ञात करने में स्वेच्छ अचर का लोप हो जाता है। हम वही मान F (x) पर विचार करके भी प्राप्त करते हैं।

(ii) तब $[F(x)]_a^b$ लीजिए। यह $F(b)-F(a)$ है, जो $\int_a^b f(x)\,dx$ का मान है।

अब हम कुछ उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 5 $\int_2^3 (x^2+1)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि,

$$\int (x^2+1)\,dx = \frac{x^3}{3}+x$$

इसलिए द्वितीय आधारभूत प्रमेय द्वारा,

$$\int_2^3 (x^2+1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_2^3 = \left(\frac{3^3}{3}+3\right)-\left(\frac{2^3}{3}+2\right)$$

$$= 12-\frac{14}{3} = \frac{22}{3}$$

अत: $$\int_2^3 (x^2+1)\,dx = \frac{22}{3}$$

उदाहरण 6 $\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$\int x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$$

इसलिए $\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{5}\left[4^{\frac{5}{2}} - 0\right] = \frac{2}{5}\left(2^5\right) = \frac{64}{5}$

अतः $\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\, dx = \frac{64}{5}$

उदाहरण 7 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

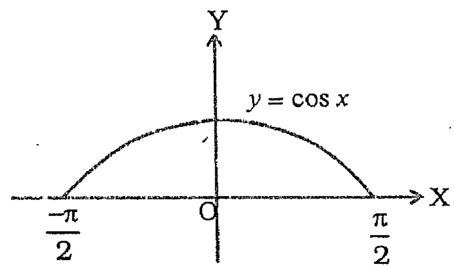
हल हम जानते हैं कि

$$\int \cos x\, dx = \sin x$$

इसलिए $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 1 = 2$$

अतः $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2$



आकृति 13.11

टिप्पणी उदाहरण 7 के परिणाम से स्पष्ट है, कि आलेख $y = \cos x$ द्वारा $x = \frac{\pi}{2}$ और $x = -\frac{\pi}{2}$ और x-अक्ष के बीच घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल 2 है (आकृति 13.11)।

उदाहरण 8 $\int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल सर्वप्रथम हम अनिश्चित समाकलन $\int \frac{6x+3}{x^2+4}\, dx$ का मान ज्ञात करते हैं।

$$\int \frac{6x+3}{x^2+4}\, dx = \int \frac{6x}{x^2+4}\, dx + \int \frac{3}{x^2+4}\, dx$$

$$= 3\int \frac{2x}{x^2+4}dx + 3\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

$$= 3\log(x^2+4) + \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

इसलिए $$\int_0^2 \frac{6x+3}{x^2+4}dx = \left[3\log\left(x^2+4\right)+\frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}\right]_0^2$$

$$= \left[3\log 8+\frac{3}{2}\tan^{-1}1\right]-\left[3\log 4+\frac{3}{2}\tan^{-1}0\right]$$

$$= 3\log\frac{8}{4}+\frac{3\pi}{8} = 3\log 2+\frac{3\pi}{8}$$

उदाहरण 9 $\int_0^1 \left(xe^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right)dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल सबसे पहले हम अनिश्चित समाकलन $\int\left(xe^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right)dx$ का मान ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए $I_1 = \int xe^x dx$ और $I_2 = \int \sin\frac{\pi x}{4}dx$

अब $I_1 = x.e^x - \int 1.e^x\, dx$ (खंडशः समाकलन द्वारा)

$$= (x-1)\,e^x$$

और $$I_2 = \left[-\cos\frac{\pi x}{4}\right]\frac{4}{\pi} = -\frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4}x$$

इसलिए

$$\int_0^1\left(x\,e^x + \sin\frac{\pi x}{4}\right)dx = \left[(x-1)e^x - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi x}{4}\right]_0^1$$

$$= (1-1)e^1 - \frac{4}{\pi}\cos\frac{\pi}{4} - \left[(0-1)e^0 - \frac{4}{\pi}\cos 0\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2}}+1+\frac{4}{\pi} = 1+\frac{4}{\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$$

13.3.5 अनिश्चित और निश्चित समाकलनों की तुलना (*Comparison of indefinite and definite integrals*)

अनिश्चित समाकलन	निश्चित समाकलन
1. किसी फलन का अनिश्चित समाकलन एक दूसरा फलन होता है।	एक फलन का एक अंतराल पर निश्चित समाकलन एक संख्या होती है। यह संख्या अंतराल परिवर्तन के साथ परिवर्तित होती है।
2. किसी फलन का अनिश्चित समाकलन $\int f(x)\,dx$ अद्‌वितीय नहीं होता है। इनमें एक अचर का अंतर हो सकता है।	निश्चित समाकलन $\int_a^b f(x)\,dx$ एक अद्‌वितीय संख्या होती है।
3. अनिश्चित समाकलन $\int f(x)\,dx = F(x)$ (माना) की स्थिति में अचर x जो स्वतंत्र चर है, की एक विशिष्ट भूमिका होती है क्योंकि यदि x को y से विस्थापित करें तो $F(x)$ के स्थान पर $F(y)$ प्राप्त होता है।	निश्चित समाकलन की स्थिति में स्वतंत्र चर को किसी भी अक्षर से व्यक्त कर सकते हैं। सभी प्रतीक $\int_a^b f(x)\,dx$ और $\int_a^b f(y)\,dy$ या $\int_a^b f(t)\,dt$ एक ही संख्या को निरूपित करते हैं। स्वतंत्र चर के अक्षर की भूमिका कुछ भी हो, अर्थहीन है।
4. $\int_a^b f(x)\,dx$ के ज्ञात होने पर हम $\int f(x)\,dx$ नहीं ज्ञात कर सकते हैं।	$\int f(x)\,dx$ के ज्ञात होने पर हम $\int_a^b f(x)\,dx$ ज्ञात कर सकते हैं।

टिप्पणी हम निश्चित समाकलनों के मान ज्ञात करने के दो विधियों से परिचित हैं। प्रथम विधि में इसे हम एक योगफल की सीमा के रूप, और दूसरी विधि में हम आधारभूत प्रमेय, का प्रयोग करते है। इनके संबंध में प्रेक्षण निम्नलिखित हैं।

1. पहली विधि ज्यामितीय अर्थ पर आधारित है। इससे व्याख्या होती है, निश्चित समाकलन क्षेत्रफल क्यों है।

2. दूसरी विधि सरल तथा सुगम है।

3. दोनों विधियों से परिणाम समान ही मिलते हैं।

प्रश्नावली 13.2

निम्नलिखित निश्चित समाकलनों (प्र. 1 से प्र. 22) का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-1}^{2} x \, dx$

2. $\int_{-1}^{1} (x+1) \, dx$

3. $\int_{2}^{3} \frac{1}{x} \, dx$

4. $\int_{1}^{2} (4x^3 - 5x^2 + 6x + 9) \, dx$

5. $\int_{0}^{8} x^{\frac{5}{3}} \, dx$

6. $\int_{0}^{4} x^{\frac{1}{2}} \, dx$

7. $\int_{0}^{4} \left(x + x^{\frac{3}{2}}\right) dx$

8. $\int_{0}^{\pi} \cos x \, dx$

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx$

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx$

11. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \, dx$

12. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

13. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^2 - 1}$

14. $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2+1} dx$

15. $\int_{0}^{1} \frac{2x+3}{5x^2+1}$

16. $\int_{1}^{2} \frac{5x^2 \, dx}{x^2 + 4x + 3}$

17. $\int_{4}^{5} e^x \, dx$

18. $\int_{0}^{1} \left(x\, e^x + \cos \frac{\pi x}{4}\right) dx$

19. $\int_{0}^{1} \left(x\, e^{2x} + \sin \frac{\pi x}{2}\right) dx$

20. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$

21. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(2\sec^2 x + x^3 + 2\right) dx$ 22. $\int_0^{\pi} \left(\sin^2\frac{x}{2} - \cos^2\frac{x}{2}\right) dx$

13.4 प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलनों का मान निर्धारण (Evaluation of Definite Integrals by Substitution)

पिछली अध्याय में हम अनिश्चित समाकलनों के मान निर्धारण की अनेक विधियों की व्याख्या कर चुके हैं। अनिश्चित समाकलनों के मान निर्धारण के प्रमुख विधियों में से एक प्रतिस्थापन-विधि है। जब हम निश्चित समाकलनों जैसे $\int_0^1 \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2+3\sin x}\, dx$ के प्रकार के प्रश्नों को प्रतिस्थापन विधि से हल करते हैं, तो प्रक्रम निम्नलिखित हैं।

1. $y = f(x)$ या $x = g(y)$ प्रतिस्थापित कीजिए, जिससे दिया समाकलन समाकलित होने के लिए ज्ञात रूप में हो जाए। नए चर के पद में समाकलन को लिखिए।
2. नए समाकल्य को नए चर के सापेक्ष समाकलित कीजिए।
3. नए चर के स्थान पर पुनः प्रतिस्थापन कीजिए, और उत्तर को पूर्व चर x के पदों में व्यक्त कीजिए।
4. (3) से प्राप्त उत्तर का उच्च सीमा और निम्न सीमा पर मानों को ज्ञात कीजिए। उच्च सीमा और निम्न सीमा पर के मानों का अंतर ही निश्चित समाकलन का अभीष्ट मान है।

इस प्रविधि को तीव्रतर बनाने के लिए हम निम्नलिखित विधि को अपना सकते हैं, प्रक्रम 1 और 2 को करने के बाद 3 को करने की आवश्यकता नहीं है। इसके स्थान पर हम समाकलन को नए चर के पद में ही रहने देते हैं, परंतु निश्चित समाकलन की सीमाओं को नए चर के अनुसार परिवर्तित कर लेते हैं, इससे ही अंतिम प्रक्रम की क्रिया करके अभीष्ट मान ज्ञात कर सकते हैं इस अनुच्छेद में हम इस प्रविधि को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 10 $\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $t = x^5 + 1$, तब $dt = 5x^4 dx$

इसलिए $\int 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \int \sqrt{t}\, dt$

$$= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(x^5+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

अतः
$$\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \frac{2}{3}\left[(x^5+1)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}\left[(1^5+1)^{\frac{3}{2}} - ((-1)^5+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

विकल्पतः, सर्वप्रथम हम समाकलन का रूपातंरण करते हैं, तब रूपातंरित समाकलन का नई सीमा के साथ मान ज्ञात करते हैं।

मान लीजिए $t = x^5 + 1$ तब $dt = 5x^4\, dx$

जब $x = -1, t = 0$ और तब $x = 1, t = 2$

x जैसे -1 से 1 को परिवर्तित होता है, t वैसे-वैसे 0 से 2 को परिवर्तित होता है।

जब
$$\int_{-1}^{1} 5x^4 \sqrt{x^5+1}\, dx = \int_{0}^{2} \sqrt{t}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{2} = \frac{2}{3}\left[2^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

अब हम कुछ अन्य उदाहरण लेते हैं जिनमें रूपांतरित समाकलन को नई सीमाओं द्वारा हल किया गया है।

उदाहरण 11 $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\, \cos x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $t = \sin x$

तब $dt = \cos x\, dx$

जब $x=0$ तो $t=0$

जब $x=\frac{\pi}{2}$ तो $t=1$

अतः $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,\cos x\,dx = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[1^{\frac{3}{2}} - 0^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}$$

उदाहरण 12 $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए, $t=\tan\frac{x}{2}$ तब

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx = \frac{1}{2}(1+t^2)\,dx$$

और $$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

जब $x=0$ तो $t=0$ और जब $x=\pi$ तो $t\to\infty$

इस प्रकार, जैसे–जैसे x, 0 से π की ओर अग्रसर होता है। वैसे–वैसे t, 0 से ∞ की ओर बढ़ता है।

$$\int_0 \frac{dx}{5+4\cos x} = \int_0^{\infty} \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left[5+4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\right]}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2\,dt}{5(1+t^2)+4(1-t^2)}$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3}\left[\tan^{-1}\frac{t}{3}\right]_0^{\infty} = \frac{2}{3}\left[\frac{\pi}{2}-0\right] = \frac{\pi}{3}$$

उदाहरण 13 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta \, d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए, $t = \sin^2\theta$ तो $dt = 2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = \sin 2\theta\, d\theta$

और
$$\sin^4\theta + \cos^4\theta = t^2 + (1-t)^2$$
$$= 2t^2 - 2t + 1$$
$$= 2\left(t^2 - t + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]$$

जब $\theta = 0$, तो $t = 0$ और जब $\theta = \frac{\pi}{2}$, तो $t = 1$

अत:
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2\theta\, d\theta}{\sin^4\theta + \cos^4\theta} = \int_0^1 \frac{dt}{2\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2}}\left[\tan^{-1}\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}\right]_0^1$$
$$= \left[\tan^{-1}(2t-1)\right]_0^1 = \tan^{-1}1 - \tan^{-1}(-1)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$$

प्रश्नावली 13.3

निम्नलिखित समाकलनों का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_{-1}^{1} x^3 \left(x^4+1\right)^3 dx$

2. $\int_{0}^{1} x\sqrt{1-x^2}\, dx$

3. $\int_{-1}^{1} \frac{5x}{\left(4+x^2\right)^2} dx$

4. $\int_{0}^{1} \frac{5x}{\left(4+x^2\right)^2} dx$

5. $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2+1} dx$

6. $\int_{0}^{2} \frac{5x+1}{x^2+4} dx$

7. $\int_{0}^{1} x e^{x^2} dx$

8. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin\theta}\, \cos^5\theta\, d\theta$

9. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$

10. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\cos x+4\sin x}$

11. $\int_{0}^{2\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{4+3\sin x}} dx$

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5+4\sin x}$

13. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a\cos x+b\sin x}\ ; a, b>0$

14. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 3\theta)\sin 3\theta\, d\theta$

15. $\int_{0}^{\pi} 5\,(5-4\cos\theta)^{\frac{1}{4}} \sin\theta\, d\theta$

16. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta\, d\theta$

17. $\int_{0}^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{x}\, \cos^2\left(x^{\frac{3}{2}}\right) dx$

18. सिद्ध कीजिए कि $\int_{0}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = 2$

13.5 निश्चित समाकलनों के कुछ गुणधर्म (Some Properties of Definite Integrals)

पिछले अनुच्छेद में हम निश्चित समाकलन के मान को एक योगफल की सीमा के रूप में निकालने के विषय में अध्ययन किए हैं। परंतु इस विधि का प्रयोग तभी किया जा सकता है, जब समाकल्य एक सरल फलन हो। यदि समाकल्य सरल फलन नहीं है, तो योगफल की सीमा ज्ञात करना संभव नहीं हो सकता है। ऐसी स्थितियों में हम निश्चित समाकलन के कुछ प्रमुख गुणधर्मों पर विचार करते हैं, जो निम्नलिखित हैं। निश्चित समाकलनों के सरलतापूर्वक मान निर्धारण में इनका उपयोग किया जाएगा।

P1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$

P2. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx$; के लिए $a < c < b$

P3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

P4. $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)dx$

P5. $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$

P6. $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि $f(2a-x) = f(x)$

$= 0,$ यदि $f(2a-x) = -f(x)$

P7. (i) $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$, यदि $f(x)$ एक सम फलन है।

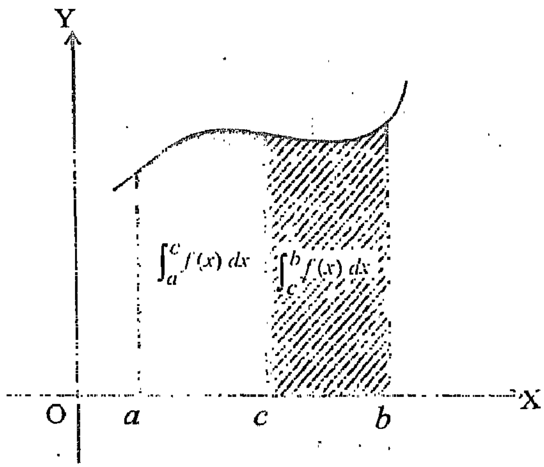
(ii) $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$, यदि $f(x)$ एक विषम फलन है।

एक-एक करके हम इन गुणधर्मों की उपपत्ति सीखते हैं।

P1 की उपपत्ति मान लीजिए कि f का प्रति अवकलन F है। अतः दूसरे आधारभूत प्रमेय से हम पाते हैं कि

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

P2 की उपपत्ति मान लीजिए कि $a < c < b$, तो जैसा कि आकृति (13.12) में दर्शाया गया है, तो $x = a, x = b, y = 0$, और $y = f(x)$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल आकृति में विभिन्न प्रकार से छायांकित क्षेत्रों का योगफल है।



आकृति 13.12

स्थिति (ii) यदि c, a और b के मध्य नहीं है, तब भी वही सूत्र सत्य है।

मान लीजिए $a < c < b$ तो प्रथम स्थिति के अनुसार,

मान लीजिए $a < b < c$ तो प्रथम स्थिति के अनुसार

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

इसलिए

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)\,dx$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{(P1 द्वारा)}$$

वैकल्पिक उपपत्ति मान लीजिए f का प्रति अवकलज F है। तब

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

$$\int_a^c f(x)\,dx = F(c) - F(a) \qquad (2)$$

और
$$\int_c^b f(x)\,dx = F(b) - F(c) \qquad (3)$$

(2) और (3) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)dx = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

इससे P2 सिद्ध होता है।

P3 की उपपत्ति मान लीजिए कि $t = a + b - x$, तब $dt = -dx$

जब $x = a$ तो $t = b$ और जब $x = b$ तो $t = a$

इस प्रकार यदि x, a से b, में परिवर्तित होता है, तो t, b से a में परिवर्तित होता है तथा $x = a + b - t$ है। इसलिए

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(a+b-t)dt$$

$$= \int_a^b f(a+b-t)dt \quad \text{(प्रगुण P1 द्वारा)}$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)dx$$

(चूँकि निश्चित समाकलन का चर मूक चर होता है)

P4 की उपपत्ति मान लीजिए कि $t = a - x$ तो $dt = -dx$

जब $x = 0$, तो $t = a$ और अब $x = a$, तो $t = 0$

जैसे-जैसे x, 0 से a में परिवर्तित होता है, वैसे-वैसे t, a से 0 में परिवर्तित होता है तथा $x = a - t$ भी है।

इसलिए $\int_0^a f(x)\,dx = \int_a^0 f(a-t)\,(-dt) = -\int_a^0 f(a-t)\,dt$

$$= \int_0^a f(a-t)\,dt \qquad \text{(प्रगुण P1 द्वारा)}$$

$$= \int_0^a f(a-x)\,dx \qquad \text{(चर } t \text{ को } x \text{ से परिवर्तित करने से)}$$

P5 की उपपत्ति P3 के प्रयोग द्वारा हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

दाहिने पक्ष के दूसरे समाकलन में मान लीजिए, $t = 2a - x$

तब $\quad dt = -\,dx$

जब $\quad x = a$ तो $t = a$ जब $x = 2a$ तो $t = 0$ तथा $x = 2a - t$

अतः दूसरे समाकलन का मान

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-t)\,dt$$

$$= \int_0^a f(2a-t)\,dt \qquad \text{(प्रगुण P1 द्वारा)}$$

$$= \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad \text{(चर } t \text{ को } x \text{ में परिवर्तित करने पर)}$$

अतः: $$\int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx$$

P6 की उपपत्ति P5 के प्रयोग द्वारा हम पाते हैं कि

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(2a-x)\,dx \qquad (1)$$

अब यदि $f(2a-x) = f(x)$, तो (1) द्वारा

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

अब यदि $f(2a-x) = -f(x)$, तो (1) द्वारा

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

P7 की उपपत्ति स्मरण कीजिए कि यदि $f(x), x$ का समफलन है तो $f(-x) = f(x)$; और यदि $f(x)$, x का विषम फलन है तो $f(-x) = -f(x)$

P2 के प्रयोग से हम पाते हैं, कि

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

दाहिने पक्ष के प्रथम समाकलन में $t = -x$ रखिए, तब $dt = -dx$

जब $x = -a$ तो $t = a$ और $x = 0$ तो $t = 0$, $x = -t$ भी है।

इसलिए $$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(-x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \quad \text{(चर } t \text{ को } x \text{ द्वारा परिवर्तन करने पर)} \qquad (1)$$

(i) अब मान लीजिए कि f, x का सम फलन है, तो $f(-x) = f(x)$, तब (1) द्वारा

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

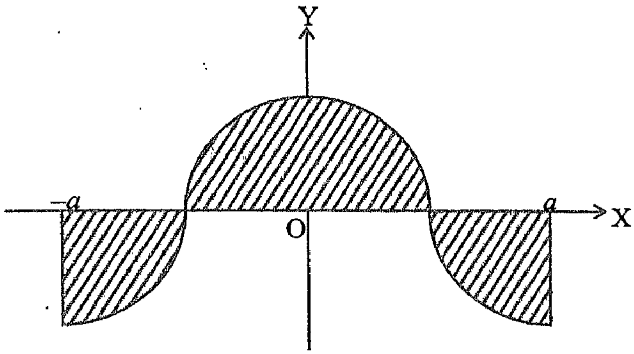
$$= 2\int_0^a f(x)\,dx$$

(ii) मान लीजिए कि f, x का विषम फलन है, तो $f(-x) = -f(x)$, तो (1) द्वारा

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = 0$$

टिप्पणी P7 की ज्यामितीय व्याख्या निम्नलिखित विधि से की जा सकती है।

यदि $[-a, a]$ पर f एक समफलन है, तो इसका आलेख y-अक्ष के परितः सममित होता है (आकृति 13.13)।



सम फलन का आलेख
आकृति 13.13

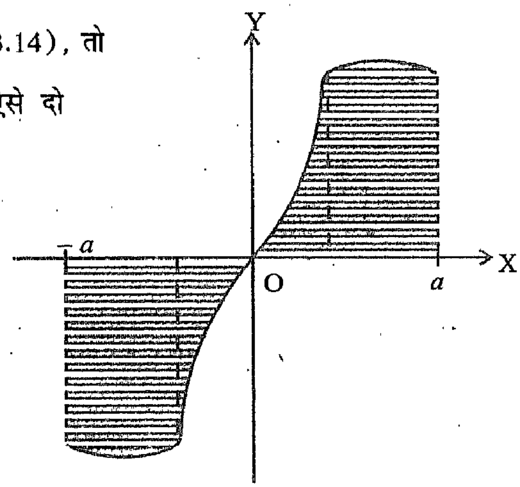
इसलिए $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$ द्वारा निरूपित क्षेत्रफल y-अक्ष के बाएँ और दाहिने समानतः विभक्त है।

इसलिए संपूर्ण क्षेत्रफल $=$ y-अक्ष के दाहिने क्षेत्रफल का दो गुना

अर्थात् $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

दूसरी स्थिति में यदि f विषम फलन है (आकृति 13.14), तो $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ द्वारा निरूपित क्षेत्रफल y-अक्ष द्वारा ऐसे दो भागों में विभक्त होता है जो परिमाण में समान परंतु चिह्न में विपरीत है। (ध्यान दीजिए कि यदि क्षेत्र x-अक्ष से नीचे है, तो क्षेत्रफल ऋणात्मक समझा जाता है) इस प्रकार संपूर्ण चिह्नित क्षेत्रफल शून्य है, अर्थात्,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$



आकृति 13.14

अब हम कुछ उदाहरणों द्वारा देखेंगे कि ये सात प्रगुण कुछ निश्चित समाकलनों के मान निर्धारण में किस प्रकार उपयोगी है।

उदाहरण 14 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ का मान निकालिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ (1)

तब $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$ (प्रगुण P4 द्वारा)

अर्थात् $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

अर्थात् $I = \frac{\pi}{4}$

उदाहरण 15 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ तब

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$$ (प्रगुण P4 द्वारा)

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x}}\, dx$$

इसलिए $$2\,I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\, dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx=[x]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

अत: $$I=\frac{\pi}{4}$$

उदाहरण 16 $\int_{-5}^{5} |x+2|\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, & \text{यदि } x>-2 \\ -x-2, & \text{यदि } x<-2 \end{cases}$$

इसलिए $$\int_{-5}^{5} |x+2|\,dx=\int_{-5}^{-2} |x+2|\,dx+\int_{-2}^{5} |x+2|\,dx$$ (**P2** प्रगुण द्वारा)

$$=\int_{-5}^{-2} (-x-2)\,dx+\int_{-2}^{5} (x+2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-5}^{-2}+\left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{5}$$

$$=-\frac{4}{2}+4-\left(\frac{-25}{2}+10\right)+\frac{25}{2}+10-\left(\frac{4}{2}-4\right)$$

$$= 4+\frac{25}{2}+\frac{25}{2} = 29$$

उदाहरण 17 $\int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^2 x\sqrt{2-x}\,dx$ तब

$$I = \int_0^2 (2-x)\sqrt{2-(2-x)}\,dx \qquad \text{(P4 प्रगुण द्वारा)}$$

$$= \int_0^2 (2-x)\sqrt{x}\,dx$$

$$= \int_0^2 2\sqrt{x}\,dx - \int_0^2 x^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= 2.\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - \frac{2}{5}\left[x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2$$

$$= \frac{4}{3}.2^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}2^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{4}{15}\,2^{\frac{5}{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

उदाहरण 18 $\int_{-1}^{1} \sin^5 x \cdot \cos^4 x\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_{-1}^{1} \sin^5 x \cos^4 x\,dx$

$f(x) = \sin^5 x \cos^4 x$, जहाँ

$f(-x) = \sin^5(-x)\cos^4(-x) = -\sin^5 x \cos^4 x = -f(x)$

अर्थात् $f(x)$, x का विषम फलन है।

इसलिए प्रगुण P7 (ii) के अनुसार

$$I = 0$$

उदाहरण 19 $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल हम देखते हैं कि $\cos^2 x$, x का सम फलन है।

इसलिए $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x\, dx$ [प्रगुण P7 (i) द्वारा]

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+\cos 2x)}{2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - 0$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

उदाहरण 20 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{1+\sqrt{\tan x}}$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos x}\, dx}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \quad (1)$$

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}\, dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}+\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}-x\right)}}$$ (प्रगुण P3 द्वारा)

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}\, dx}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}} \qquad (2)$$

(1) और (2) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2\,I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} dx = [x]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

इसलिए $I = \frac{\pi}{12}$

उदाहरण 21 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\, dx$

तब $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx$ (प्रगुण P4 द्वारा)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\, dx$$

I के दोनों मानों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$2\,I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x \ \cos x + \log 2 - \log 2)\, dx \quad \text{(log 2 को जोड़ने और घटाने पर)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log 2 \sin x \cos x - \log 2)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin 2x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 \, dx$$

प्रथम समाकलन में $2x = t$ रखिए। तब $2\,dx = dt$

इसलिए, $$2\text{I} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin t \, dt - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \text{(प्रगुण P6 द्वारा क्योंकि } \sin(\pi - t) = \sin t\text{)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \quad \text{(चर } t \text{ को } x \text{ से बदलने पर)}$$

$$= \text{I} - \frac{\pi}{2}\log 2$$

इसलिए $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

प्रश्नावली 13.4

निश्चित समाकलन के प्रगुणों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{\frac{3}{2}} x \, dx}{\sin^{\frac{3}{2}} x + \cos^{\frac{3}{2}} x}$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^5 x + \cos^5 x}$

4. $\int_2^8 |x-5|\, dx$

5. $\int_0^1 x(1-x)^n\, dx$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)\, dx$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)\, dx$

8. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx$

9. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$

10. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{1+\sin x}$

11. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x\, dx$

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{\sin x + \cos x}$

13. $\int_0^{2\pi} \cos^5 x\, dx$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}\, dx$

15. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}\, dx$

16. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx = 0$

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए।

17. $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\, dx$

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\, dx$

19. $\int_0^4 |x-1|\, dx$

20. $\int_2^5 |x-1|\, dx$

21. $\int_0^{\pi} \frac{x\, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$

22. $\int_0^{2x} \cos^5 x\, dx$

23. $\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{a-x}}\, dx$

13.6 अनुप्रयोग (Applications)

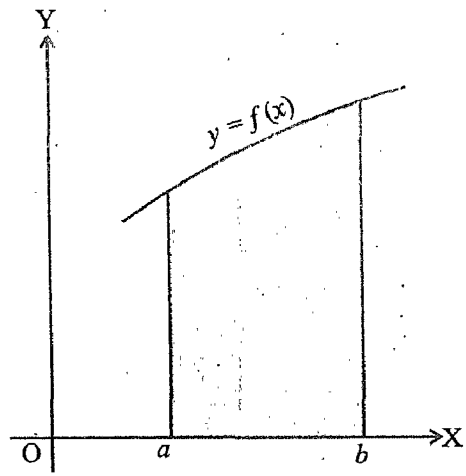
पिछले अनुच्छेदों में हम निश्चित समाकलनों के मान निर्धारण के सरल ढंग के लिए समाकलन गणित के द्वितीय आधारभूत प्रमेय का प्रयोग किए हैं। इस अनुच्छेद में हम निश्चित समाकलनों के विभिन्न उपयोगों में से कुछ एक का संक्षिप्त अध्ययन करते हैं।

13.6.1 (i) वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष और कोटियों $x = a$ और $x = b$ से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल A (आकृति 13.15) निम्नलिखित द्वारा निरूपित होता है।

$$\text{A} = \int_a^b f(x)\, dx$$

इसे हम निम्नलिखित ढंग से भी लिख सकते हैं,

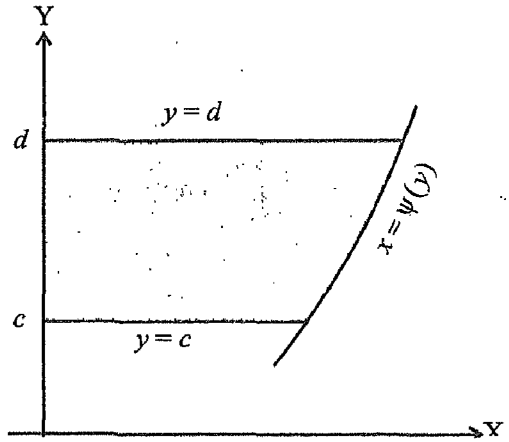
$$\text{A} = \int_a^b y\, dx$$



आकृति 13.15

(ii) वक्र $x = \psi(y)$, y-अक्ष और रेखाओं $y = c$, $y = d$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (आकृति 13.16)।

$$\text{A} = \int_c^d x\, dy$$ द्वारा भी निरूपित होता है।



आकृति 13.16

उदाहरण 22 वक्र $y^2 = 4x$, $x = 1$, $x = 4$ और x-अक्ष से प्रथम पाद में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

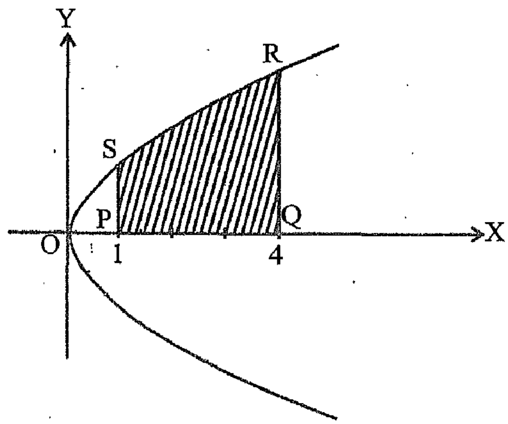
हल क्षेत्र PQRS का अभीष्ट क्षेत्रफल (आकृति 13.17)।

$$A = \int_1^4 2\sqrt{x}\, dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= 2\times\frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{4}{3}(8-1) = \frac{28}{3}$$



आकृति 13.17

उदाहरण 23 वक्र $x^2 = 16y$, $y = 1$, $y = 4$ और y-अक्ष से प्रथम पाद में घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

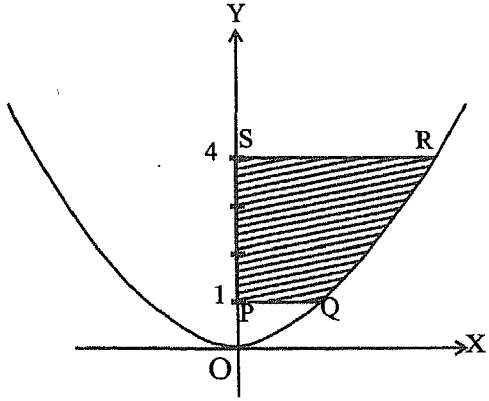
हल क्षेत्रफल (आकृति 13.18) द्वारा निरूपित, निम्नलिखित द्वारा प्राप्त होगा।

$$A = \int_1^4 4\sqrt{y}\, dy$$

$$= 4\left[\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= 4\times\frac{2}{3}\left[4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$= \frac{8}{3}[8-1] = \frac{56}{3}$$

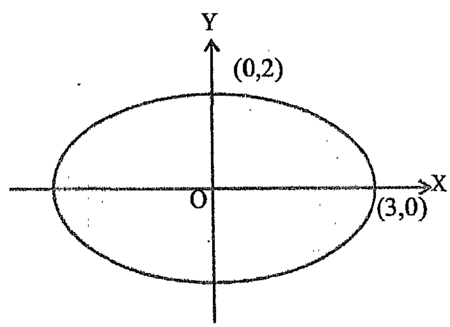


आकृति 13.18

उदाहरण 24 दीर्घवृत्त

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।}$$

हल दिए समीकरण को हम $y^2 = 4\left(1-\frac{x^2}{9}\right)$ के रूप में भी लिख सकते हैं। हम देखते हैं कि वक्र x-अक्ष और y-अक्ष के परितः सममित है, (आकृति 13.19)। इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल, प्रथम पाद में स्थित क्षेत्रफल का चार गुना है।



आकृति 13.19

प्रथम पाद में

$$y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल के लिए हमें $\frac{2}{3}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ की गणना करके 4 से गुणा करना है,

अर्थात् $$A = 4\times\frac{2}{3}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ dx$$

$x = 3\sin\theta$ रखिए। तब $dx = 3\cos\theta\, d\theta$

इसलिए $$\sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta$$

जब $x = 0$ तो $\theta = 0$ और $x = 3$ तो $\theta = \frac{\pi}{2}$

जैसे-जैसे x, 0 से 3 में परिवर्तित होता है, वैसे-वैसे θ, 0 से $\frac{\pi}{2}$ में परिवर्तित होता है।

इसलिए $$A = \frac{8}{3}\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\ dx$$

$$= \frac{8}{3}\times 9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\ d\theta$$

$$= \frac{24}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

$$= 12\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 12\left[\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin\pi - 0\right]$$

$$= 6\pi$$

13.6.2 ***एक वक्र और एक रेखा से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल (The area of the region bounded by a curve and a line)*** इस अनुच्छेद में हम एक रेखा और एक वृत्त, एक रेखा और एक परवलय, तथा एक रेखा और एक दीर्घवृत्त से घिरे क्षेत्रों का क्षेत्रफल ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 25 प्रथम पाद के उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो x-अक्ष, रेखा $y = x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 32$ से घिरा हो।

हल दिए समीकरण हैं :

$$y = x \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 = 32 \qquad (2)$$

(1) और (2) को हल करने पर हम पाते हैं, कि रेखा और वृत्त प्रथम पाद में बिंदु P (4, 4) पर मिलते हैं (आकृति 13.20)। PM लंब खींचिए।

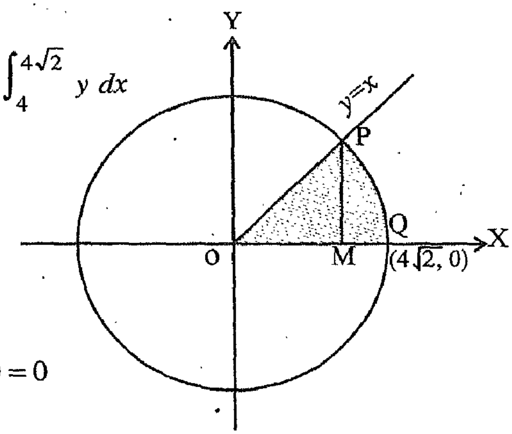
इसलिए अभीष्ट क्षेत्रफल A = त्रिभुज OPM का क्षेत्रफल + $\int_4^{4\sqrt{2}} y\,dx$

अब वृत्त का प्राचल समीकरण

$x = 4\sqrt{2}\cos\theta,\ y = 4\sqrt{2}\sin\theta$ हैं।

तब $dx = -4\sqrt{2}\sin\theta\ d\theta$

जब $x = 4$, तो $\theta = \frac{\pi}{4}$ जब $x = 4\sqrt{2}$, तो $\theta = 0$



आकृति 13.20

इसलिए $$A = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 + \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \left(4\sqrt{2}\sin\theta\right)\left(-4\sqrt{2}\sin\theta\right) d\theta$$

$$= 8 + 32\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\cos 2\theta)}{2}\ d\theta$$

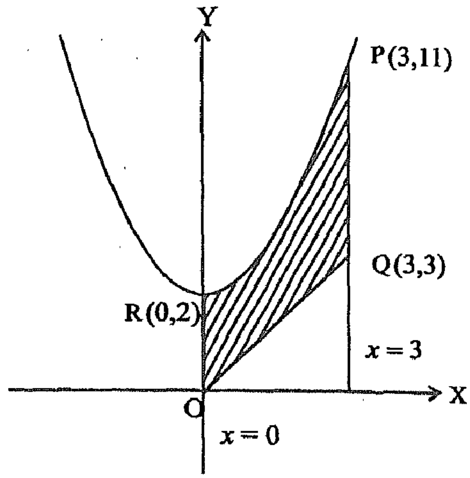
$$= 8 + \frac{32}{2}\left[\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8 + 16\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] - 0$$

$$= 8 + 4\pi - 8 = 4\pi$$

उदाहरण 26 परवलय $y = x^2 + 2$ और रेखाओं $y = x,\ x = 0$ और $x = 3$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल परवलय का समीकरण $y = x^2 + 2$ है। $y = x$ एक रेखा का समीकरण है, जो परवलय से नीचे है। रेखा $x = 3$, परवलय से बिंदु P (3, 11) और $y = x$ से बिंदु Q (3, 3) पर मिलती है। क्षेत्र जिसका क्षेत्रफल अभीष्ट है, आकृति 13.21 में छायांकित है। चूंकि $\int_0^3 \left(x^2 + 2\right)dx$, $y = x^2 + 2, x = 0, y = 0$ और $x = 3$ से घिरे

क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है और $\int_0^3 x\,dx$ रेखाओं $y = x, y = 0, x = 0$ और $x = 3$ से घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है। अतः आकृति को देखने से स्पष्ट है, कि अभीष्ट क्षेत्रफल OQPR $\int_0^3 (x^2+2)dx - \int_0^3 x\,dx$ है।



आकृति 13.21

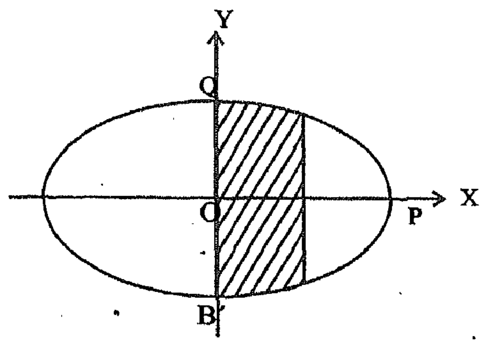
इस प्रकार $\quad A = \int_0^3 (x^2+2)\,dx - \int_0^3 x\,dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 2x\right]_0^3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3$$

$$= 9 + 6 - \frac{9}{2} = \frac{21}{2}$$

उदाहरण 27 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ और कोटियों $x = ae$ और $x = 0$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ $b^2 = a^2(1-e^2)$ और $e < 1$

हल अभीष्ट क्षेत्रफल (आकृति 13.22)।



आकृति 13.22

$$= 2\int_0^{ae} y\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\int_0^{ae} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^{ae}$$

$$= \frac{2b}{2a}\left[ae\sqrt{a^2 - a^2e^2} + a^2\sin^{-1}e\right]$$

$$= ab\left[e\sqrt{1-e^2} + \sin^{-1} e\right]$$

प्रश्नावली 13.5

1. प्रथम पाद में वक्र $y^2 = 9x$, रेखाओं $x = 2, x = 4$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. प्रथम पाद में वक्र $y^2 = x - 2$, रेखाओं $x = 4, x = 6$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. प्रथम पाद में वक्र $x^2 = 4y$, रेखाओं $y = 2, y = 4$ और y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. प्रथम पाद में $x^2 = y - 3, y = 4, y = 6$ और y-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. प्रथम पाद में x-अक्ष, रेखा $x = \sqrt{3}\, y$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के रेखा $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ से कटे छोटे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
9. परवलय $y = x^2 + 1$ और रेखाओं $y = x, x = 0$ और $x = 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
10. परवलय $y = x^2$ और रेखा $y = x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल-ज्ञात कीजिए।
11. परवलय $y = x^2$ और रेखाओं $y = |x|$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
12. परवलय $y^2 = 4ax$ और रेखाओं $x = a$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
13. वक्र $x^2 = 4y$ और रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
14. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
15. दीर्घवृत्त $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ और रेखा $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$ से घिरे छोटे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ और रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

17. दो वृत्तों $x^2+y^2=1$ तथा $(x-1)^2+y^2=1$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. त्रिभुज ABC जिसके शीर्षों के निर्देशांक A(2, 0), B (4, 5) और C (6, 3) का क्षेत्रफल समाकलन विधि से ज्ञात कीजिए।

विविध उदाहरण (MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 28 $\int_0^{2\pi} e^x \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए $I=\int_0^{2\pi} e^x \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) dx$

$$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)e^x\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)e^x\,dx$$

$$=\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)e^{2\pi}-\sin\frac{\pi}{4}\right]-\frac{1}{2}\left[\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)e^x\right]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)e^x\,dx\right]$$

$$=\left(-\frac{e^{2\pi}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{e^{2\pi}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{4}I$$

इसलिए $$I+\frac{1}{4}I=\left(\frac{-e^{2\pi}-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\,\frac{e^{2\pi}+1}{\sqrt{2}}\right)$$

या $$\frac{5I}{4}=\frac{-2e^{2\pi}-2+e^{2\pi}+1}{2\sqrt{2}}$$

या $$I=-\frac{\sqrt{2}}{5}\left[e^{2\pi}+1\right]$$

उदाहरण 29 $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ r निश्चित धन संख्या है। इससे सिद्ध कीजिए कि r त्रिज्या के वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 वर्ग इकाई है।

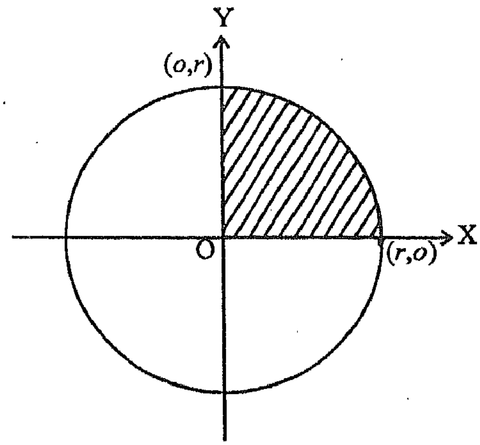
हल हम जानते हैं कि

$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{r}$$

इसलिए $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{r}\right]_0^r$

$$= \frac{r^2}{2}\sin^{-1} 1$$

$$= \frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi r^2}{4}$$



आकृति 13.23

इस वक्र $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ को खींचते हैं।

चूंकि $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

इसलिए $y^2 = r^2 - x^2$ अर्थात् $x^2 + y^2 = r^2$ के समतुल्य है।

जो मूल बिंदु केंद्र तथा r त्रिज्या का एक वृत्त है। इसलिए $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, वृत्त $x^2 + y^2 = r^2$, x-अक्ष, कोटियों $x = 0$ और $x = r$ से घिरे हुए क्षेत्र का क्षेत्रफल है, अर्थात् यह वृत्त के प्रथम पाद में स्थित क्षेत्र के क्षेत्रफल को निरूपित करता है, जैसा आकृति 13.23 में प्रदर्शित है। इसलिए r त्रिज्या के वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= 4\cdot\frac{\pi r^2}{4} = \pi r^2$ वर्ग इकाई।

उदाहरण 30 वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ के उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $y^2 = 6x$ से बाहर है।

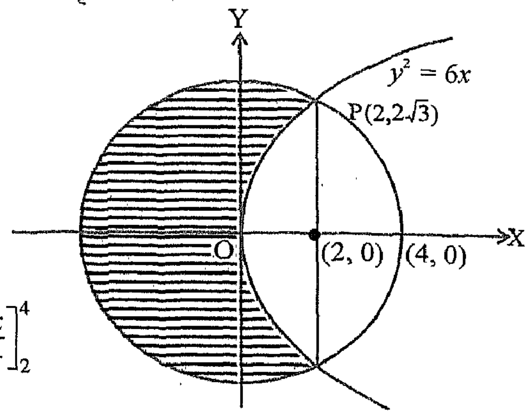
हल प्रथम पाद में वृत्त $x^2 + y^2 = 16$ और परवलय $y^2 = 6x$ का प्रतिच्छेद बिंदु P $(2, 2\sqrt{3})$, जैसा आकृति 13.24 में दर्शाया गया है।

अभीष्ट क्षेत्र का क्षेत्रफल A = वृत्त का क्षेत्रफल – परवलय में स्थित वृत्त का क्षेत्रफल

$$=16\pi - 2\int_0^2 y\,dx - 2\int_2^4 y\,dx$$

$$= 16\pi - 2\int_0^2 \sqrt{6}\, x^{\frac{1}{2}}\, dx - 2\int_2^4 \sqrt{16-x^2}\, dx$$

$$= 16\pi - 2\sqrt{6}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 - 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{16-x^2} + \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4}\right]_2^4$$



आकृति 13.24

$$= 16\pi - \frac{4}{3}\sqrt{6}.2\sqrt{2} - 2\left[\frac{4}{2}\sqrt{16-16} + \frac{16}{2}\sin^{-1}1 - \frac{2}{2}\sqrt{16-4} - \frac{16}{2}\sin^{-1}\frac{2}{4}\right]$$

$$= 16\pi - \frac{16}{\sqrt{3}} - 16.\frac{\pi}{2} + 4\sqrt{3} + \frac{8\pi}{3}$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}} + \frac{32\pi}{3} = \frac{4}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right)$$

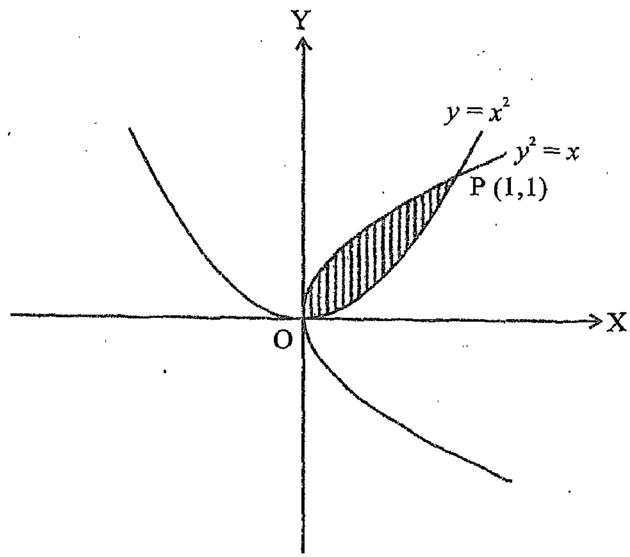
उदाहरण 31 दो परवलयों $y = x^2$ और $x = y^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दोनों परवलयों के प्रतिच्छेदन बिंदु P (1,1) है, जैसा कि आकृति 13.25 में प्रदर्शित है।

$$A = \int_0^1 y\,dx - \int_0^1 y\,dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx - \int_0^1 x^2 dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1$$



आकृति 13.25

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 13)

मान ज्ञात कीजिए :

1. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} e^x \frac{1-\sin x}{1-\cos x}\, dx$

2. $\int_0^{2\pi} e^{\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) dx$

3. $\int_0^{2\pi} e^x \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) dx$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x.\cos x}{\cos^2 x + \sin^4 x}\, dx$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x\ dx}{\cos^2 x + 4\sin^2 x}$

6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}\, dx$

7. परवलय $y^2 = 4x$ के अंतर्गत वृत्त $4x^2 + 4y^2 = 9$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. दो परवलयों $4y = x^2$ और $4x = y^2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. वक्र $y^2 = 4a(x-1)$ और रेखाओं $x = 1$ और $y = 4a$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. परवलय $x^2 = y$, रेखा $y = x + 2$ और x-अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. सिद्ध कीजिए कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{1 + \sin x \cos x}\, dx = 0$

निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

13. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{9 + 16\sin 2x}\, dx$

14. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \tan^{-1} (\sin x)\, dx$

15. $\int_{-1}^{\frac{3}{2}} |x \sin \pi x|\, dx$

16. यदि $\int_0^a 3x^2\, dx = 8$, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

17. यदि $\int_a^b x^3 dx = 0$ और $\int_a^b x^2\, dx = \frac{2}{3}$, तो a और b दोनों ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित (प्र. 18 से 24) को सिद्ध कीजिए।

18. $\int_1^3 \frac{1}{x^2(x+1)}\, dx = \frac{2}{3} + \log\frac{2}{3}$

19. $\int_0^1 x\, e^x\, dx = 1$

20. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{5+3\cos x} = \frac{\pi}{4}$

21. $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log 2$

22. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx = \frac{2}{3}$

23. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2\tan^3 x\, dx = 1 - \log 2$

24. $\int_0^1 \sin^{-1} x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

25. क्षेत्र $\{(x,y): y^2 \le 4x,\ 4x^2 + 4y^2 \le 9\}$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

26. निम्नलिखित क्षेत्र की रचना कीजिए और समाकलन के प्रयोग से उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
$\{(x,y): 0 \le y \le x^2 + 3;\ 0 \le y \le 2x + 3;\ 0 \le x \le 3\}$

27. वक्रों $y = 6x - x^2$ और $y = x^2 - 2x$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित निश्चित समाकलनों (प्र. 28 और 29) को एक योगफल की सीमा के रूप में हल कीजिए।

28. $\int_0^1 e^{2-3x}\, dx$

29. $\int_2^4 2^x\, dx$

निम्नलिखित निश्चित समाकलनों (30 और 31) को हल कीजिए।

30. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$

31. $\int_1^4 \left(|x-1| + |x-2| + |x-3|\right) dx$

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

समाकलन गणित का प्रारंभ गणित के प्रारंभिक विकास काल से ही हुआ है। यह प्राचीन यूनानी गणितज्ञों द्वारा विकसित निश्शेषता विधि पर आधारित है। इस विधि का प्रारंभ समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफल और ठोस वस्तुओं के आयतन की गणना से हुआ। इस तरह से निश्शेषता विधि, समाकलन विधि की प्रारंभिक स्थिति के रूप में समझी जा सकती है। निश्शेषता विधि का सर्वोत्कृष्ट विकास प्रारंभिक काल में यूडोक्स (Eudoxus 440 B.C.) और आर्किमिडीज (Archimedes 300 B.C.) के कार्यों में पाया जाता है।

कलन के सिद्धांत का क्रमबद्ध विकास ईसा के 17वीं शताब्दी में हुआ। सन् 1665 में न्यूटन ने कलन पर अपना कार्य (Theory of fluxion) प्रवाहन सिद्धांत के रूप में प्रारंभ किया। उन्होंने इस सिद्धांत का प्रयोग वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्शी और वक्रता-त्रिज्या ज्ञात करने में किया। न्यूटन ने व्युत्क्रम फलन की धारणा से परिचय कराया और इसको प्रति अवकलज (अनिश्चित समाकलन) या स्पर्शियों की व्युत्क्रम विधि (Inverse Method of tangents) का नामकरण किया।

1684–86 के बीच में लैवनीज (Leibnitz) ने एक प्रपत्र एक्टा इरोडिटोरियम (Acta Eruditorum) में प्रकाशित किया और इसे कैलक्यूलस सम्मैटोरियस (Calculous Summatorius) नाम दिया, क्योंकि यह अनेक अंततः छोटे क्षेत्रफलों के योगफल से संबंधित था. वहीं पर उन्होंने इसे योगफल के प्रतीक '$\int$' द्वारा व्यक्त किया। सन् 1696 ई. में उन्होंने जे. बरनौली (J. Bernoulli) के सुझाव को मानकर अपने प्रपत्र को कैलक्यूलस इंटेग्राली (Calculus Integrali) नाम में परिवर्तित कर दिया। यह न्यूटन द्वारा किए गए कार्य स्पर्शियों के व्युत्क्रम तरीका (Inverse Method of tangents) के संगत कार्य था।

न्यूटन और लेवनीज दोनों ने पूर्णतः स्वतंत्र गंतव्य मार्ग अपनाया जो मूलतः भिन्न थे। तथापि उन दोनों के सिद्धांतों के संगत प्रतिफल तत्सम पाए गए। लेवनीज ने निश्चित समाकलन की धारणा का प्रयोग किया।

यह निश्चित है कि उन्होंने ही सर्वप्रथम प्रति अवकलज और निश्चित समाकलन के बीच के संबंध को समझा।

निष्कर्ष यह है कि समाकलन गणित के आधारभूत धारणाओं, सिद्धांतों तथा अवकलन गणित से इसके प्रारंभिक संबंधों का विकास पी. डे. फर्मा, आई. न्यूटन, और लेवनीज के कार्यों द्वारा 17 वीं शताब्दी के अंत में हुआ। तथापि इसका औचित्य, सीमा की संकल्पना के आधार पर 19वीं शताब्दी के प्रारंभ में ए.एल. कोशी (A.L. Cauchy) के द्वारा किया गया। अंत में ली सोफी (Lie Sophie) का निम्नलिखित उद्धरण वर्णनीय है।

ऐसा कहा जा सकता है कि अवकलन और समाकलन का प्रारंभ निश्चित रूप से आर्किमिडीज द्वारा हुआ, जिसका प्रयोग विज्ञान के विकास में केप्लर, डेकार्ट, कैवेलिरी, फर्मा और वलीस...(Kepler, Descartes, Cavalieri, Fermat and Wallis'...) ने किया। महानतम खोज कि 'अवकलन और समाकलन परस्पर व्युत्क्रम संक्रियाएँ हैं' न्यूटन और लैवनीज द्वारा किया गया।

अवकल समीकरण
(DIFFERENTIAL EQUATIONS) 14

14.1 भूमिका (Introduction)

आइजक न्यूटन (Issac Newton, 1642-1727) और गाटफ्रॉइड विलहेल्म फ्रेहर लैबनीज (Gottfried Wilhelm Freiherr Leibnitz, 1646-1716) ने सत्रहवीं शताब्दी में हमें सिखाया कि I अंतराल में परिभाषित फलन f को स्वतंत्र चर के सापेक्ष कैसे अवकलन करते हैं, अर्थात् दिए गए फलन f के परिभाषित प्रांत (Domain) के प्रत्येक बिंदु पर $f'(x)$ कैसे ज्ञात करते हैं। अतः प्रत्येक व्यक्ति के मस्तिष्क में स्वाभाविक यह प्रश्न उठता है कि "क्या इस क्रिया की प्रतिलोम क्रिया संभव है?" अर्थात्

एक फलन $g: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ (वास्तविक संख्याओं का समुच्चय) दिए रहने पर क्या यह संभव है कि फलन $f: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ ऐसा प्राप्त हो जाए कि प्रत्येक $x \in \mathrm{I}$ के लिए $f'(x) = g(x)$ हो। आजकल इस समस्या को निम्नलिखित रूप में सूत्रबद्ध करते हैं:

कोई फलन $g: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ दिया है। एक फलन $f: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$, जो $y = f(x)$ द्वारा व्यक्त है, ज्ञात करना है ताकि

$$y' = \frac{dy}{dx} = g(x) \qquad (x \in \mathrm{I}) \qquad (1)$$

ध्यान देने योग्य है, कि समीकरण (1) भौतिकी समस्या से संबंधित समय t पर एक कण (जो सरल रेखीय गति कर रहा है) के वेग v को ज्ञात करने का गणितीय प्रतीयमान है, जब उस पर t समय पर बल $\mathrm{F}(t)$ आरोपित हो, अर्थात् v ज्ञात करना है, यदि

$$\frac{dv}{dt} = \mathrm{F}(t)$$

समीकरण (1) के रूप के समीकरण को 'अवकल समीकरण (अ.स.)' कहते हैं। इसकी औपचारिक परिभाषा बाद में दी जाएगी।

अब सभी प्राकृतिक घटनाएँ चाहे वह भौतिकी, रसायन विज्ञान, जीव विज्ञान या मानव विज्ञान, भू विज्ञान इत्यादि या सामाजिक विज्ञान या अर्थशास्त्र की हों, को प्रतिरूपित करने में अवकल समीकरणों का प्रयोग होता

है। वस्तुतः किसी प्राकृतिक घटना के गणितीय प्रतिरूपण में अवकल समीकरणों की प्रमुख भूमिका होती है। अतः सभी अत्याधुनिक वैज्ञानिक अन्वेषणों के लिए अवकल समीकरणों के गहन अध्ययन की प्रमुख आवश्यकता है।

14.2 परिभाषाएँ (Definitions)

हम जानते हैं कि एक बीज गणितीय समीकरण अज्ञात चर राशि में एक बहुपद (जिसके गुणांक वास्तविक या सम्मिश्र संख्याएँ हों) को शून्य के समान करने पर प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए $x-2=0, x^2+3x+2=0$ आदि। यहाँ अज्ञात राशि x, जिसकी हमें खोज है, एक वास्तविक या सम्मिश्र संख्या है, जो दिए गए समीकरण को संतुष्ट करती है। हम यह भी जानते हैं कि एक अस्पष्ट समीकरण, एक ऐसा समीकरण होता है जिसमें अज्ञात चर राशि x के त्रिकोणमितीय / घातांकीय / लघुगणकीय फलन होते हैं, उदाहरणतः $\sin x+\cos x=0$, $e^x-1=0$, $\log(1+x)=0$ आदि। यहाँ भी अज्ञात राशि जिसकी हमें खोज है, एक वास्तविक या सम्मिश्र संख्या है, जो दिए समीकरण को संतुष्ट करती है।

इन दो प्रकार के समीकरणों के विपरीत एक अवकल समीकरण ऐसा समीकरण है जिसमें हम ऐसे फलन के खोज में रहते हैं, जो इसको संतुष्ट करता हो, अर्थात् जब अवकल समीकरण में अज्ञात को फलन से प्रतिस्थापित करते हैं तो वह एक सर्वसमिका बन जाता है। एक अवकल समीकरण की औपचारिक परिभाषा निम्नलिखित है।

परिभाषा 1 *अवकल समीकरण* एक ऐसा समीकरण है, जिसमें कुछ अज्ञात फलनों के एक या अधिक अवकलज निहित होते हैं, जिन्हें ज्ञात करने की आवश्यकता होती है।

एक अज्ञात फलन y : $\left(y'\equiv\dfrac{dy}{dx},\ y''\equiv\dfrac{d^2y}{dx^2},\ y'''\equiv\dfrac{d^3y}{dx^3},\ldots\right)$ से निहित कुछ अवकल समीकरणों के उदाहरण निम्नलिखित हैं :

$$\frac{dy}{dx}=\sin x, \tag{2}$$

$$y''+y=0, \tag{3}$$

$$y=\sin y', \tag{4}$$

$$(y''')^2\times x^2(y'')^3=0, \tag{5}$$

$$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1 \tag{6}$$

विभिन्न प्रकार के अवकल समीकरणों को समझने के लिए आइए हम अग्रलिखित परिभाषाओं पर ध्यान दें।

परिभाषा 2 किसी अवकल समीकरण की *कोटि* अवकल समीकरण में उपस्थित अज्ञात फलन के उच्चतम कोटि के अवकलज के कोटि द्वारा परिभाषित होती है।

पूर्व उदाहरणों के समुच्चय में समीकरण (2), (4) और (6) प्रथम कोटि के हैं। समीकरण (3) द्वितीय कोटि तथा समीकरण (5) तृतीय कोटि के हैं।

टिप्पणी इस तथ्य की ओर ध्यान आकर्षित किया जाता है, कि उपर्युक्त (4) के समीकरण में अन्य समीकरणों (2), (3), (5) और (6) की भाँति हम उपस्थित अवकलज नामतः y' का बहुपद नहीं पा रहे हैं। इस प्रकार के अवकल समीकरणों के अध्ययन में विशिष्ट ध्यान की आवश्यकता है। अतः इस प्रकार के समीकरणों को इस पुस्तक में विचारणीय समीकरणों से परे रखा जा रहा है। यहाँ हम केवल उन्हीं अवकल समीकरणों की चर्चा करते हैं, जो सभी अवकलजों में बहुपद हों। निम्नलिखित परिभाषा केवल इसी कोटि के अवकल समीकरणों से संबंधित है।

परिभाषा 3 अवकल समीकरण जिसके पद अवकलजों में बहुपद हों, तो वह घातांक (धनात्मक पूर्णांक) जो उच्चतम कोटि के अवकलज पर प्रयुक्त हो, उसे उस अवकल समीकरण की *घात* कहते हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों के समुच्चय में समीकरणों (2), (3) और (6) में प्रत्येक की घात एक है, जबकि समीकरण (5) की घात दो है। समीकरण (4) की घात परिभाषित नहीं है, क्योंकि यह y' में बहुपद नहीं है।

उदाहरण 1 निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से प्रत्येक का कोटि तथा घात (यदि परिभाषित हो) ज्ञात कीजिए :

(i) $y'' + 3y' + 2y = 0$ (ii) $y'^2 - \sin^2 y = 0$

(iii) $(y'')^2 + \cos y' = 0$ (iv) $y''' + 2(y'')^2 - y' + y = 0$

हल (i) इस अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि अवकलज, जो उपस्थित है, वह y'' है, अतः इसकी कोटि दो है। यह y' और y'' दोनों में शून्य से समीकृत बहुपद से बना है, अतः इसका घात वह घातांक है, जिस तक y'' का घात है, नामतः 1 है।

(ii) इस अवकल समीकरण में उच्चतम कोटि का उपस्थित अवकलज y' है, अतः इसकी कोटि 1 है। इसमें y' का बहुपद शून्य के समीकृत उपस्थित है (यद्यपि y में बहुपद नहीं है), अतः इसका घात वह घातांक है, जिस तक y' का घात है, नामतः 2 है।

(iii) इस अवकल समीकरण (अ.स.) में उच्चतम कोटि का उपस्थित अवकलज y'' है, अतः इसकी कोटि 2 है। इसका बायाँ पक्ष y' में बहुपद नहीं है, अतः इसकी घात परिभाषित नहीं है।

(iv) इस अ.स. में उच्चतम कोटि का अवकलज y''' उपस्थित है, अतः इसकी कोटि 3 है। इसका बायाँ पक्ष प्रत्येक अवकलज y', y'', y''' में बहुपद है, अतः इसका घात वह घातांक है, जो y''' की घात है, नामतः 1 है।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि एक अवकल समीकरण की कोटि और घात (यदि परिभाषित है), तो वह सदैव धन पूर्णांक होते हैं।

प्रश्नावली 14.1

निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि ज्ञात कीजिए।

1. $y' + 3y = 0$ **2.** $y' + y = e^x$ **3.** $y' + 2y = \sin x$

4. $y' + y^2 = y$ **5.** $y' = 1 + y + y^2$ **6.** $y'' + 4y = 0$

7. $y''' + 2y'' + y' = 0$ **8.** $y'' + (y')^2 + 2y = 0$ **9.** $y^{iv} + y = \sin x$

10. $y^v + y = 0$

निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण की घात, जहाँ कहीं संभव हो ज्ञात कीजिए। प्रत्येक की कोटि भी ज्ञात कीजिए।

11. $y' + 5y = 0$ **12.** $y' + 6y^2 + y = 0$ **13.** $(y')^2 + y^2 - 1 = 0$

14. $(y')^2 + y^3 + y = 0$ **15.** $y' + \sin y' = 0$ **16.** $y'' + 2y' + \sin y = 0$

17. $y'' + y^2 = 0$ **18.** $(y''')^2 + (y'')^3 + (y')^4 + y^5 = 0$

19. $y^{iv} + y''' + y'' + y' + y = 0$ **20.** $y^v + y^2 + e^{y'} = 0$

14.3 अवकल समीकरण का निर्माण (Formation of Differential Equations)

सर्वप्रथम हम निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करते हैं कि एक अवकल समीकरण द्वारा कैसे वक्रों के कुल (Family of curves) निरूपित होते हैं।

उदाहरण 2 वह अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए जिससे समांतर रेखाओं का कुल $y = 2x + C$ निरूपित होता है, जहाँ [C $(\in \mathbf{R})$: प्राचल] है।

हल हम समांतर रेखाओं के कुल P (आकृति 14.1) पर विचार करते हैं।

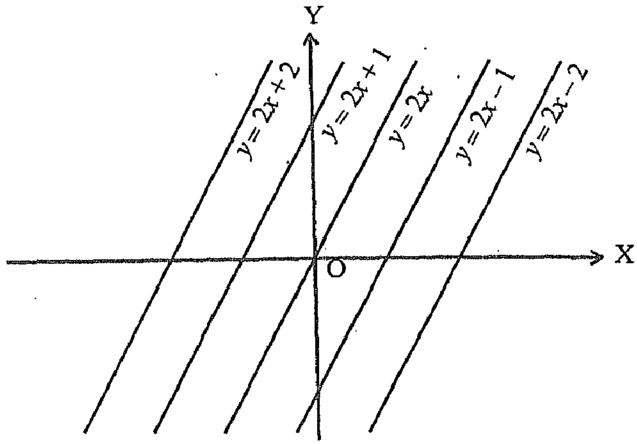
$$P : y = 2x + C, \text{ जहाँ } C\ (\in \mathbf{R}) : \text{ प्राचल है।} \quad (1)$$

C का प्रत्येक निर्दिष्ट वास्तविक मान परिवार (कुल) P के एक सदस्य को निर्धारित करता है। उदाहरणतः $y = 2x - 1$, $y = 2x$, $y = 2x + 1$ इत्यादि (आकृति 14.1)।

हमें एक संबंध (समीकरण) प्राप्त करना है, जिसे P का प्रत्येक सदस्य संतुष्ट करता हो। अत: अभीष्ट संबंध प्राचल C से स्वतंत्र होना चाहिए। यह (1) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर प्राप्त होता है, अर्थात्

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2 \qquad (x \in \mathbf{R}) \qquad (2)$$

इस प्रकार अवकल समीकरण (2) समांतर रेखाओं के कुल P, जो समीकरण (1) द्वारा प्रदत्त है, को निरूपित करता है।



आकृति 14.1

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि समीकरण (1) अवकल समीरकण (2) का *पूर्वग (Primitive)* कहलाता है।

उदाहरण 3 वह अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए, जो सरल रेखाओं के कुल $y = mx + c$ को निरूपित करता है, जहाँ $m, c\ (\in \mathbf{R})$ प्राचल है।

हल यदि हम रेखाओं के कुल S पर विचार करें, जहाँ

$$S : y = mx + c, [m,\ c\ (\in \mathbf{R}) : \text{प्राचल}] \qquad (1)$$

तब वह संबंध जो दोनों प्राचलों m, और c से स्वतंत्र हो, को प्राप्त करने के लिए हमें (1) को दो बार अवकलन करना होगा।

$$y' = \frac{dy}{dx} = m,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \qquad (2)$$

अत: अवकल समीकरण (2) समीकरण (1) द्वारा निरूपित रेखाओं के कुल S को व्यक्त करता है।

टिप्पणी उदाहरण (2) की भाँति समीकरण (1) को अ.स. (2) का *पूर्वग* कहते हैं।

उदाहरण 4 उस अवकल समीकरण को प्राप्त कीजिए जो उस वृत्त के कुल को निरूपित करता है, जिसका केंद्र x-अक्ष पर हो तथा त्रिज्या 1 मात्रक हो।

हल एक वृत्त, जिसका केंद्र x-अक्ष पर, मान लिया $(a, 0)$ तथा त्रिज्या एक मात्रक है, का समीकरण है :

$$(x-a)^2+y^2=1$$

इस प्रकार वृत्तों का कुल C, जिसका केंद्र x-अक्ष पर है तथा त्रिज्या एक मात्रक है, निम्नलिखित है (आकृति 14.2):

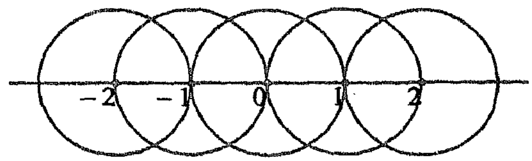
$$C:(x-a)^2+y^2=1, \qquad [m, c\,(\in \mathbf{R}) : \text{प्राचल}] \tag{1}$$

a के विभिन्न मानों के संगत हम कुल C के विभिन्न सदस्यों को प्राप्त करते हैं। उदाहरणतः

$x^2+y^2=1,$

$(x-1)^2+y^2=1,$

$(x+1)^2+y^2=1,$ इत्यादि।



आकृति. 14.2

उस संबंध को प्राप्त करने के लिए जो कुल C को निरूपित करता है तथा प्राचल a से स्वतंत्र है, हम (1) का अवकलन करके पाते हैं :

$$(x-a)+y\frac{dy}{dx}=0 \tag{2}$$

ध्यान दीजिए कि (2) अब भी प्राचल a से स्वतंत्र नहीं है। अत: (a से स्वतंत्र) अभीष्ट संबंध को प्राप्त करने के लिए हम (1) और (2) के बीच a का विलोपन करते हैं। इसके फलस्वरूप पाते हैं कि

$$y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=1 \tag{3}$$

संबंध (3), प्राचल a से स्वतंत्र होने के कारण कुल C (वृत्तों का कुल जिसका केंद्र x-अक्ष पर तथा त्रिज्या 1 है।) को निरूपित करता है।

टिप्पणी

1. उदाहरणों (2) और (3) की भाँति, (1) अवकल समीकरण (3) का पूर्वग कहलाता है।
2. यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि उदाहरण (2) में दिए गए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण प्रथम कोटि तथा प्रथम घात का है। उदाहरण 3 में दिए 2 प्राचल वाले वक्रों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि द्विवितीय तथा घात एक है। उदाहरण 4 में दिए एक प्राचल वाले वक्रों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि एक तथा घात दो है।

14.3.1 *एक दिए वक्रों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण का निर्माण (Formation of the differential equation that will represent a given family of curves)*

उदाहरणों (2), (3), (4), में हम देख चुके हैं कि वक्रों के एक कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण कैसे प्राप्त किया जाता है। इस अनुच्छेद में हम उसी समस्या का व्यापक रूप में अध्ययन करते हैं।

(a) यदि वक्रों के दिए कुल F_1 में केवल एक प्राचल है, तब यह निम्नलिखित रूप के समीकरण द्वारा निरूपित होता है,

$$F_1 : f(x, y, a) = 0; \; [a \, (\in \mathbf{R}) : \text{प्राचल}] \qquad (1)$$

(1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम एक संबंध जिसमें x, y, y' और a निहित हैं, पाते हैं, अर्थात्

$$g(x, y, y', a) = 0 \qquad (2)$$

अभीष्ट अवकल समीकरण (1) और (2) के बीच a का विलोपन करने पर निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (3)$$

अवकल समीकरण (3) वक्रों के कुल F_1 (उदाहरण 2 और 4 देखिए) को निरूपित करता है। इस प्रकार समीकरण (1) अवकल समीकरण (3) का पूर्वग है।

(b) यदि वक्रों के कुल का समीकरण F_2 दो प्राचलों पर निर्भर रहता है, तो यह निम्नलिखित रूप के समीकरण द्वारा निरूपित होता है।

$$F_2 : f(x, y, a, b) = 0; \qquad [a, b (\in \mathbf{R}) : \text{प्राचल}] \qquad (4)$$

(4) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम x, y, y', a, b से निहित एक संबंध पाते हैं,

$$g(x, y, y', a, b) = 0 \qquad (5)$$

परंतु दो संबंधों (4) और (5) से दोनों प्राचलों a और b का विलोपन संभव नहीं हो पाता है, हमें एक तीसरे संबंध की आवश्यकता है। तीसरा संबंध (5) को x के सापेक्ष एक बार और अवकलन पर प्राप्त होता है, जिसका रूप

$$f_1(x, y, y', y'', a, b) = 0 \text{ है।} \qquad (6)$$

अभीष्ट अवकल समीकरण (4), (5) और (6) से प्राचलों a और b के विलोपन से प्राप्त होता है (उदाहरण 4 देखिए)।

उपर्युक्त विवेचनाओं से स्पष्ट है कि

(i) एक प्राचल पर निर्भर वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण प्रथम कोटि का होता है,

(ii) दो प्राचलों पर निर्भर वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला अवकल समीकरण द्वितीय कोटि का होता है।

वस्तुतः n प्राचलों पर निर्भर वक्रों के कुल को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण की कोटि n होती है। प्राचलों पर निर्भर वक्रों के कुल को निरूपित करने वाला समीकरण, संगत अवकल समीकरण का पूर्वग कहलाता है।

उदाहरण 5 वक्रों के कुल $y = a\cos(x+b)$; जहाँ a और b प्राचल है, को निरूपित करने वाले अवकल समीकरण को प्राप्त कीजिए।

हल ज्ञात है कि $y = a \cos (x + b)$ (1)

(1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं, कि

$$y' = -a \sin (x + b) \quad (2)$$

(2) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं, कि

$$y'' = -a \cos (x + b) \quad (3)$$

(1), (2) और (3) से a और b के विलोपन से हम पाते हैं, कि

$$y + y'' = 0$$

या $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0$, जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

उदाहरण 6 $y^2 = m(a^2 - x^2)$ के संगत अवकल समीकरण को m और a के विलोपन द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल ज्ञात है, कि $y^2 = m(a^2 - x^2)$ (1)

(1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं, कि

$$2yy' = -2mx$$

या $$yy' = -mx \quad (2)$$

(2) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं, कि

$$(y')^2 + yy'' = -m \quad (3)$$

समीकरणों (2) और (3) से m का विलोपन करने पर हम पाते हैं, कि

$$yy' - x\left[(y')^2 + yy''\right]$$

या $$xyy'' + x(y')^2 - yy' = 0$$

या $$xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0,$$

जो अभीष्ट अवकल समीकरण है।

प्रश्नावली 14.2

निम्नलिखित वक्रों के कुल को उनके संगत अवकल समीकरणों को निर्मित करके निरूपित कीजिए (a, b : प्राचल)।

1. $x^2+y^2=a^2$
2. $x^2-y^2=a^2$
3. $y^2=4ax$
4. $x^2+(y-b)^2=1$
5. $(x-a)^2-y^2=1$
6. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
8. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
9. $y^2=4a(x-b)$
10. $(y-b)^2=4(x-a)$

14.4 अवकल समीकरणों के हल (Solutions of Differential Equations)

परिभाषा 4 अवकल समीकरण का हल एक फलन $\varphi : J \to \mathbf{R}$ (J : एक अंतराल) ऐसा है, जिसे दिए अवकल समीकरण में अज्ञात फलन से प्रतिस्थापित करने पर वह अंतराल J में सर्वसमिका बन जाता है। हम इसे φ द्वारा संतुष्ट होना कहते हैं। हम ऐसा भी कहते हैं कि वक्र $y=\varphi(x), x\in J$, दिए अवकल समीकरण का हल-वक्र है।

उदाहरण 7 सत्यापन कीजिए कि फलन $\varphi : \mathbf{R}\to\mathbf{R}$, जो $\varphi(x)=5x+c$, $x\in\mathbf{R}$, द्वारा व्यक्त हैं (c : प्राचल) अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=5,\ (x\in\mathbf{R}) \text{ का एक हल है।} \quad (1)$$

हल स्पष्ट है कि $\varphi(x)=5x+c$, $x\in\mathbf{R}$, द्वारा परिभाषित फलन φ, किसी भी वास्तविक संख्या c के लिए, अवकल समीकरण

$$\frac{dy}{dx}=5,\ (x\in\mathbf{R})$$

को संतुष्ट करता है, क्योंकि $\varphi'(x)=5$, $x\in\mathbf{R}$;

अतः φ दिए अवकल समीकरण (1) का हल है।

टिप्पणी प्रत्येक वास्तविक संख्या c, $\varphi_c(x) = 5x + c$, $x \in \mathbf{R}$; φ_c द्वारा प्रदत्त एक विशिष्ट फलन φ_c निर्धारित करती है। φ_c को समीकरण (1) का *विशिष्ट हल* कहते हैं।

उदाहरण 8 सत्यापित कीजिए कि फलन ψ, जो $\psi(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$, $x \in \mathbf{R}$ ($\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{R}$ और प्राचल हैं) द्वारा प्रदत्त है, अवकल समीकरण,

$$y'' + y = 0 \quad (x \in \mathbf{R}) \tag{1}$$

का हल है।

हल चूंकि $\quad \psi(x) = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x, \ (x \in \mathbf{R})$

हम सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए पाते हैं, कि

$$\psi'(x) = -\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x$$

और $$\psi''(x) = -\mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x$$

इस प्रकार सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\psi''(x) + \psi(x) = 0$

अत: यदि समीकरण (1) में ψ को y से प्रतिस्थापित करते हैं, तो सभी $x \in \mathbf{R}$ और सभी $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbf{R}$ के लिए वह एक सर्वसमिका बन जाती है।

इस प्रकार वास्तविक संख्याओं A और B का प्रत्येक युग्म A, B समीकरण (1) का हल ψ परिभाषित करता है, जिसे (1) का विशिष्ट हल के रूप में निर्दिष्ट करते हैं।

[illegible] कोई फलन (कोई भी प्राचल से स्वतंत्र), जो एक अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है, उसे उस अवकल समीकरण का *विशिष्ट हल* कहते हैं।

[illegible] n प्राचलों पर निर्भर एक फलन ϕ, n कोटि के एक अवकल समीकरण का व्यापक हल कहलाता है, यदि सभी n प्राचलों को समुचित ढंग से चुन लेने पर दिए अवकल समीकरण के प्रत्येक हल ϕ से प्राप्त हो जाएँ।

फलन $\phi_1(x) = 5x + 2 \ (x \in \mathbf{R})$ द्वारा परिभाषित फलन ϕ_1, अवकल समीकरण $y' = 5$ का विशिष्ट हल है।

$\phi(x) = 5x + c \ (x \in \mathbf{R})$ (C प्राचल है) द्वारा परिभाषित फलन ϕ, $y' = 5$, का व्यापक हल हैं, क्योंकि इसके सभी हल ϕ से प्राचल c को चुनने के बाद प्राप्त किए जा सकते हैं।

$\psi_1(x) = \cos x + \sin x$, $\psi_2(x) = 2\cos x + 3\sin x$, $(x \in \mathbf{R})$ द्वारा परिभाषित दोनों फलनों में से प्रत्येक फलन ψ_1, ψ_2, $y'' + y = 0$ के विशिष्ट हल हैं।

$\psi(x) = A\cos x + B\sin x$ के लिए $x \in \mathbf{R}$ (जहाँ A, B प्राचल हैं) द्वारा परिभाषित फलन $\psi: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $y'' + y = 0$ का व्यापक हल है, क्योंकि प्राचलों A, B के चयन करने पर इसके सभी हल प्राप्त किए जा सकते हैं।

टिप्पणी एक दिए अवकल समीकरण के हल प्राप्त करने की क्रिया को प्रायः *अवकल समीकरण को हल करना* या *अवकल समीकरण को समाकलित* करना कहते हैं। इस क्रिया की प्रविधि के दो प्रक्रम होते हैं— प्रथम, दिए अवकल समीकरण का हल ज्ञात करना, अर्थात् स्वतंत्र चर x और आश्रित चर y (मान लीजिए) को जोड़ने वाला एक ऐसा संबंध प्राप्त करना है, ताकि संबंध (जिसे पूर्वग कहते हैं) में कोई अवकलज न हो। द्वितीयतः प्राप्त हल से यदि संभव हो तो y को x अथवा x को y के पदों में व्यक्त करना।

14.4.1 ***प्रारंभिक मान समस्याएँ (Initial value problem)*** हम जानते हैं कि प्रथम कोटि का अवकल समीकरण एक प्राचल वक्रों के कुल को निरूपित करता है। द्वितीय कोटि का अवकल समीकरण दो प्राचल वक्रों के कुल को निरूपित करते हैं तथा इस प्रकार अन्य ऐसे कुल के एक विशिष्ट सदस्य को विशिष्ट मान प्रदान करने की आवश्यकता पड़ती है। इस प्रकार अवकल समीकरण के साथ ही साथ हमें कुछ और प्रतिबंधों (जिन्हें पूरक प्रतिबंध कहते हैं) की आवश्यकता पड़ती है, जिनसे प्राचल निर्दिष्ट किए जा सकते हैं। ऐसे पूरक प्रतिबंध सामान्यतः अज्ञात फलन के प्रांत के कुछ बिंदु पर अज्ञात फलन का निर्धारित मान तथा अवकलजों का मान प्रदान करके निर्धारित किए जाते हैं। उदाहरणतः

(i) $\phi_1(x) = y(x) = 2x + 1$, $(x \in \mathbf{R})$ द्वारा प्रदत्त फलन ϕ_1 निम्नलिखित प्रतिबंधों

$$y'(x) = 2, \quad y(1) = 3$$

को संतुष्ट करता है।

ध्यान दीजिए कि $\phi(x) = 2x + A$, सभी $x \in \mathbf{R}$ द्वारा प्रदत्त फलन ϕ, अवकल समीकरण $y'(x) = 2$ का हल है, जहाँ A प्राचल है।

(ii) $\psi_1(x) = f(x) = x^2 + 1$, $(x \in \mathbf{R})$ द्वारा व्यक्त फलन ψ_1 निम्नलिखित प्रतिबंधों

$$y''(x) = 2,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$$

को संतुष्ट करता है।

ध्यान दीजिए कि $\psi(x) = x^2 + Ax + B$, सभी $x \in \mathbf{R}$, द्वारा प्रदत्त फलन ψ, अवकल समीकरण $y''(x) = 2$ के हल हैं, जहाँ A, B प्राचल हैं।

चूंकि सभी पूरक प्रतिबंध प्रायः परिभाषित अज्ञात फलन के प्रांत के केवल एक बिंदु द्वारा निर्धारित किए जाते हैं, इन प्रतिबंधों को प्रारंभिक प्रतिबंध कहते हैं। एक अवकल समीकरण, जो इन निर्धारित प्रारंभिक प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, उसके हल को ज्ञात करने की समस्या को *प्रारंभिक मान समस्या* (प्रा.मा.स.) कहते हैं।

उदाहरण 9 सत्यापन कीजिए कि $\phi(x) = \sin x - \cos x$ $(x \in \mathbf{R})$ द्वारा परिभाषित फलन ϕ, प्रारंभिक मान समस्या $y' = \sin x + \cos x$, $(x \in \mathbf{R})$, $y(0) = -1$ का एक हल है।

हल स्पष्टत: $\phi'(x) = \cos x + \sin x$ $(x \in \mathbf{R})$

अत: यदि हम y के स्थान पर दिए अवकल समीकरण में किसी $x \in \mathbf{R}$ के लिए ϕ, प्रतिस्थापित करें तो यह $\mathbf{R}$ में एक सर्वसमिका बनता है। अत: दिए अवकल समीकरण का ϕ एक हल है। साथ ही $\phi(0) = -1$ है। इस प्रकार प्रदत्त फलन ϕ दिए गए प्रारंभिक मान समस्या का हल है।

उदाहरण 10 सत्यापन कीजिए कि $\phi(x) = \log x$ सभी $x \in (0, \infty)$ द्वारा परिभाषित फलन ϕ, प्रारंभिक मान समस्या $xy' = 1$ $(x \neq 0)$, $y(1) = 0$ को संतुष्ट करता है।

हल सभी $x \in (0, \infty)$ के लिए यदि $\phi(x) = \log x$ हो, तो हम पाते हैं कि सभी $x \in (0, \infty)$ के लिए $\phi'(x) = \frac{1}{x}$ है।

अत: यदि हम दिए अवकल समीकरण में y को ϕ से प्रतिस्थापित करते हैं, तो उससे $(0, \infty)$ में एक सर्वसमिका प्राप्त होती है। इस प्रकार प्रदत्त फलन ϕ दिए गए अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है। साथ ही $\phi(1) = 0$, अत: दिया हुआ फलन ϕ दिए गए प्रारंभिक मान समस्या को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 11 दर्शाइए कि $\phi(x) = \cos x$ $(x \in \mathbf{R})$ द्वारा परिभाषित फलन ϕ, प्रारंभिक मान समस्या $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ को संतुष्ट करता है।

हल $\phi(x) = \cos x$ $(x \in \mathbf{R})$ का अर्थ है कि सभी $x \in \mathbf{R}$ के लिए $\phi'(x) = -\sin x$ और $\phi''(x) = -\cos x$

अत: यदि हम अवकल समीकरण में ϕ को y से प्रतिस्थापित करते हैं, तो वह संतुष्ट होता है। साथ ही $\phi(0) = 1$ और $\phi'(0) = 0$, अर्थात् ϕ प्रारंभिक प्रतिबंधों को भी संतुष्ट करता है। अत: दिया फलन ϕ दिए गए प्रारंभिक मान समस्या को संतुष्ट करता है।

प्रश्नावली 11.3

निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए सत्यापन कीजिए कि संगत फलन उसका हल है (अवकल समीकरण तथा उसके संगत फलन दोनों समूचे $\mathbf{R}$ पर परिभाषित हैं):

1. $y' = e^x$: e^x
2. $y' = \cos x$: $1 + \sin x$

3. $y' + y = 2$: $e^{-x} + 2$

4. $y' + 2y = 0$: $2e^{-2x}$

5. $y' + y = 1 + x$: $e^{-x} + x$

6. $y'' + y = 0$: $\cos x - \sin x$

7. $y'' + 4y = 0$: $3\sin 2x$

8. $y'' - y' = 0$: $e^{x} + 1$

9. $\left(1 + x^2\right)y' = xy$: $\sqrt{1 + x^2}$

10. $y''' = 0$: $x^2 + 2x + 1$

निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए सत्यापन कीजिए कि संगत फलन उसका हल यथा वर्णित प्रांत में है (यहाँ $A, B \in \mathbf{R}$ प्राचल हैं) :

11. $xy' = y \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$: $A\,x \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$

12. $x + yy' = 0 \ (x \in \mathbf{R},\ y \neq 0)$: $\pm\sqrt{A^2 - x^2} \ (x \in (-A, A))$

13. $xy' + y = y^2 \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$: $\dfrac{A}{x + A} \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{-A\})$

14. $x^3 y'' = 1 \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$: $\dfrac{1}{2x} + Ax + B \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$

15. $y = (y')^2 \ (x \in \mathbf{R},\ y \geq 0)$: $\dfrac{1}{4}(x \pm A)^2 \ (x \in \mathbf{R})$

सत्यापन कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, जो निम्नांकित विधि से परिभाषित है, संगत प्रारंभिक मान समस्या के हल हैं।

16. $\phi(x) = \sin x$: $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

17. $\phi(x) = e^{x}$: $y' = y,\ y(0) = 1$

18. $\phi(x) = e^{-x} + 2$: $y' + y = 2,\ y(0) = 3$

19. $\phi(x) = e^{x} + 1$: $y'' - y' = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

20. $\phi(x) = x^2 + 2x + 1$: $y''' = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 2$

14.5 अवकल समीकरणों का वर्गीकरण (Classification of Differential Equations)

अवकल समीकरणों का वर्गीकरण प्रथमतः उनके कोटि के आधार पर होता है। प्रथम कोटि के अवकल समीकरण वे हैं, जिनमें केवल प्रथम कोटि का अवकलज होता है। इसमें अज्ञात फलन के उच्च कोटि के अवकलज नहीं होते हैं। दो या अधिक कोटि के अवकल समीकरण उच्चतर कोटि के अवकल समीकरण के रूप में निर्दिष्ट होते हैं।

अवकल समीकरणों का दूसरा वर्गीकरण उसकी रैखिकता को निर्दिष्ट करता है। एक अवकल समीकरण रैखिक कहलाता है, यदि अज्ञात फलन तथा सभी अवकलज अवकल समीकरण में रैखिक रूप में ही निहित हों, अर्थात् उनके घात केवल एक ही हों, साथ ही वे गुणनफल के रूप में भी न हों। एक अरैखिक अवकल समीकरण वह अवकल समीकरण है, जो रैखिक न हो। उदाहरणतः

$y'' + y = 0$ एक रैखिक अवकल समीकरण है।

$y'' + yy' + y^2 = 0$ एक अरैखिक अवकल समीकरण है।

अनुच्छेद 14.2 के अवकल समीकरण (2), (3) रैखिक है, जबकि अनुच्छेद 14.2 के समीकरण (4), (5) और (6) अरैखिक हैं।

टिप्पणी एक घात के अवकल समीकरण का रैखिक होना अनिवार्य नहीं है, उदाहरणतः $yy' + 1 = 0$ रैखिक नहीं है।

14.6 प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण का वैकल्पिक रूप (An Alternative Form of a First-order First-degree Differential Equation)

प्रथम कोटि तथा प्रथम घात का अवकल समीकरण

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad x \in \text{I} \ (\text{अंतराल})$$

के रूप में होते हैं। (1)

समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में पुनर्लिखित कर सकते हैं,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f(x, y)\right] = 0$$

जहाँ $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ (2)

इस प्रकार $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[\Delta y - f(x, y)\Delta x\right] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x \left[\frac{\Delta y}{\Delta x} - f(x, y)\right] = 0$ [(2) के प्रयोग द्वारा]

जैसे $\Delta x \to 0$ तो $\Delta y - f(x, y)\Delta x \to 0$

$$dy = f(x, y)dx \tag{3}$$

के रूप में लिखकर व्यक्त किया जा सकता है। यह अवकल समीकरण (1) का वैकल्पिक रूप है।

14.7 प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरण को हल करने की कुछ विधियाँ (Some Methods of Solving First-order First-degree Differential Equation)

इस अनुच्छेद में हम प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के अवकल समीकरणों को हल करने की तीन विधियों की व्याख्या करेंगे।

14.7.1 *पृथक्करणीय चर वाले समीकरण (Differential equations with variables separable)*

परिभाषा 7 प्रथम कोटि तथा प्रथम घात का अवकल समीकरण

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

के रूप का होता है।

यदि फलन f,

$$f(x, y) = p(x)\, q(y) \qquad (2)$$

का रूप धारण करता है, (अर्थात् x के फलन और y के फलन के गुणनफल के रूप) तब अवकल समीकरण (1) के चर x, y पृथक्करणीय कहलाते हैं। इस स्थिति में अवकल समीकरण (1) को वैकल्पिक रूप में निम्नलिखित विधि से लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{q(y)} dy = p(x) dx, \text{ यदि } \quad q(y) \neq 0 \qquad (3)$$

यदि $p(x)$ का पूर्वग $\mathrm{P}(x)$ और $\frac{1}{q(y)}$ का पूर्वग $\mathrm{Q}(y)$ हो, तो (3) का-अर्थ निम्नलिखित है :

$$\mathrm{Q}(y) - \mathrm{P}(x) = \mathrm{C} \quad \text{(एक वास्तविक संख्या)} \qquad (4)$$

इसे समाकलन संकेतन द्वारा निम्नलिखित रूप में व्यक्त करते हैं।

$$\int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(x)\, dx + \mathrm{C} \qquad (5)$$

इसे हम कहते हैं कि (3) के समाकलन से (5) प्राप्त होता है। इस प्रकार (5) अवकल समीकरण (1) का पूर्वग है, जहाँ $f(x, y)$, (2) द्वारा प्रदत्त है।

टिप्पणी शब्द 'पूर्वग' दो संदर्भों एक अवकल समीकरण और दूसरा फलन के संदर्भ में प्रयोग किया है परंतु

इससे कोई भ्रम नहीं होना चाहिए। दिए गए फलन $f: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ के पूर्वग से हमारा अभिप्राय उस फलन $g: \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ से है, जिसका अवकलज $g'(x) = f(x)$, $x \in \mathbf{R}$ दूसरे शब्दों में $y = g(x), (x \in \mathrm{I})$ अवकलन समीकरण $y' = f(x), (x \in \mathrm{I})$ का पूर्वग है।

उदाहरण 12 $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$ को हल कीजिए। (1)

हल अवकल समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं

$$y\, dy = -x\, dx$$

इसके समाकलन से हम पाते हैं, कि

$$y^2 = -x^2 + \mathrm{C} \tag{2}$$

स्पष्टतः C धनात्मक होना चाहिए; क्योंकि $\mathrm{C} = 0$ का अर्थ $x = y = 0$, अर्थात् मात्र एक बिंदु, जो स्पष्टतः समीकरण (1) के हल को इंगित नहीं करता है। अतः $\mathrm{C} = a^2 > 0$, $\mathrm{C} = a^2\ (a > 0)$ से हम (2) की सहायता से पाते हैं कि

$$y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in [-a, a] \tag{3}$$

इस प्रकार प्रत्येक फलन $\phi, \psi\ [-a, a] \to \mathbf{R}$ जो

$$\phi(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in [-a, a],$$

और

$$\psi(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in [-a, a]$$

द्वारा परिभाषित हैं, (1) के हल के रूप में विचारणीय हो सकते हैं। तथापि दोनों ϕ और ψ, $x = \pm a$ पर अवकलनीय नहीं है। इसलिए केवल फलन

$$\phi_1, \psi_1 : [-a, a] \to \mathbf{R} \text{ जो}$$

$$\phi_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2}, \qquad x \in (-a, a),$$

और

$$\psi_1(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \in (-a, a)$$

द्वारा प्रदत्त हैं, ही (1) के हल हैं।

टिप्पणी उपर्युक्त उदाहरण द्वारा हम देखते हैं कि एक अवकल समीकरण एक अंतराल I पर ही वैध हो सकता है, परंतु एक हल ϕ, I के समस्त मानों के संगत परिभाषित नहीं हो सकता है।

उदाहरण 13 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{1+3y^2}$ को हल कीजिए। (1)

हल अवकल समीकरण (1) को वैकल्पिक रूप में निम्नलिखित विधि से लिख सकते हैं :

$$\left(1+3y^2\right)dy=3x^2dx$$

अतः समाकलन द्वारा हम पाते हैं कि

$$y+y^3=x^3+\text{C}, (\text{C : प्राचल}) \qquad (2)$$

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि संबंध (2) को अवकल समीकरण (1) का 'पूर्वग', परंतु 'हल' नहीं कहते हैं, क्योंकि (2) से y, सुस्पष्टतः x का एक फलन के रूप में प्राप्त नहीं होता है। तथापि एक पूर्वग को एक हल के रूप में निर्दिष्ट करने का प्रचलन प्रयोग में है।

उदाहरण 14 निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल कीजिए

$$y'=2xy,\ y(0)=1$$

हल दिए गए अवकल समीकरण को वैकल्पिक रूप में निम्नवत् लिखते हैं :

$$\frac{dy}{y}=2x\,dx \quad \text{यदि} \quad y\neq 0$$

अतः समाकलन करने पर हम निम्नलिखित एक प्राचल पर निर्भर वक्रों का कुल, निम्नलिखित द्वारा पाते हैं :

$$\log|y|=x^2+c \qquad (y\neq 0)\ (c : \text{प्राचल})$$

इससे प्राप्त होता है $\quad |y|=\text{A}e^{x^2}\ \left(\text{A}=e^c\right)$

चूंकि $y(0)=1$, हम पाते हैं कि $\text{A}=1$, इस प्रकार $y=e^{x^2}$

अतः दिए गए प्रारंभिक मान समस्या का अभीष्ट हल फलन $\phi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$

$$\phi(x)=e^{x^2},\ x\in\mathbf{R}$$

द्वारा परिभाषित है।

प्रश्नावली 14.4

अंतराल जिसमें हल वैध है, को सावधानीपूर्वक निर्दिष्ट करते हुए निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण का एक प्राचल पर निर्भर हल के कुल को ज्ञात कीजिए।

1. $y' = 3y$
2. $\left(y^2+1\right)dx - \left(x^2+1\right)dy = 0$
3. $\dfrac{dr}{d\theta} = \cos\theta$
4. $dy + (x+1)(y+1)dx = 0$
5. $e^y dx + e^x dy = 0$
6. $\left(e^x + e^{-x}\right)dy = \left(e^x - e^{-x}\right)dx$
7. $(\sin x + \cos x)dy = (\cos x - \sin x)dx$
8. $y' = \left(1+x^2\right)\left(1+y^2\right)$
9. $\sec^2 x \tan y \; dx + \sec^2 y \tan x \; dy = 0$
10. $(x-1)y' = 2x^3 y$

निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्याओं को हल कीजिए और संगत हल-वक्रों को ज्ञात कीजिए।

11. $y' = y\tan x$, $y(0) = 1$
12. $2xy' = 5y$, $y(1) = 1$
13. $y' = 2e^{2x}y^2$, $y(0) = -1$
14. $y' + 2y^2 = 0$, $y(0) = \dfrac{\pi}{2}$
15. $y' + 2y^2 = 0$, $y(1) = 1$
16. $\sin x \cos y \, dx + \cos x \sin y \, dy = 0$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$
17. $dy = e^{2x+y}dx$, $y(0) = 0$
18. $xdy + ydx = xydx$, $y(1) = 1$
19. $x\left(xdy - ydx\right) = ydx$, $y(1) = 1$
20. $xy' + 1 = 0$, $y(-1) = 0$

14.5 **समघातीय अवकल समीकरण (*Homogeneous differential equations*)** दो चर राशियों का एक फलन f, k घात का समघातीय होना कहलाता है, यदि

$$f(x,y) = x^k g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{या} \quad y^k h\left(\frac{x}{y}\right)$$

इस अनुच्छेद में हम ऐसे अवकल समीकरणों पर विचार करते हैं, जब फलन f शून्य घात के समघातीय फलन हैं।

परिभाषा 8 प्रथम कोटि और प्रथम घात का अवकल समीकरण—

$$y' = f(x, y), x \in \mathrm{I} \text{ (अंतराल)} \tag{1}$$

समघातीय होना कहलाता है, यदि f शून्य घात का समघातीय फलन है,

अर्थात् $$f(x, y) = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

अर्थात् f, x और y पर आश्रित होने के अतिरिक्त $\frac{y}{x}$ पर आश्रित रहता है।

इस प्रकार $$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{2}$$

हम आश्रित चर राशि y को v में प्रतिस्थापन

$$y = vx \tag{3}$$

द्वारा परिवर्तित करते हैं।

तब $$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v \tag{4}$$

प्राप्त करते हैं।

समीकरण (2) में (3) और (4) के प्रयोग से हम पाते हैं कि

$$x\frac{dv}{dx} + v = g(v), \quad \text{या} \quad x\frac{dv}{dx} = g(v) - v$$

या $$\frac{dx}{x} = \frac{dv}{g(v) - v}, \text{ यदि } x \neq 0,\ g(v) - v \neq 0 \tag{5}$$

इस प्रकार समघातीय अवकल समीकरण (2) प्रतिस्थापन $y = vx$ द्वारा अवकल समीकरण (5) में परिवर्तित हो जाता है, जिसके चर पृथक्करणीय हैं।

(5) के समाकलन करने से हम पाते हैं कि

$$\log|x| = \int \frac{dv}{g(v) - v} + \mathrm{C} \quad (\mathrm{C} : \text{प्राचल}) \tag{6}$$

समीकरण (6) दिए गए अवकल समीकरण (2) का पूर्वग है, जो v को $\frac{y}{x}$ से प्रतिस्थापन द्वारा प्राप्त होता है।

उदाहरण 15 $xy' = x + y,\ x \neq 0$ को हल कीजिए। (1)

हल चूंकि $x \neq 0$, अत: अवकल समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}\ (x \neq 0) \tag{2}$$

स्पष्टत: इसका दाहिना पक्ष शून्य घात का समघातीय फलन है।

अत: हम (2) में $y = vx$ रखते हैं और इस प्रकार

$xv' + v = 1 + v$ या $xv' = 1$ प्राप्त करते हैं।

या $$dv = \frac{dx}{x} \qquad (x \neq 0)$$

अत: समाकलन द्वारा प्राप्त करते हैं कि

$$v = \log|x| + C \qquad (C : \text{प्राचल})$$

अर्थात् $$y = x[\log|x| + C],\ x \neq 0,\ (C : \text{प्राचल})$$

अवकल समीकरण (1) के अभीष्ट हल को निरूपित करता है। $\phi(x) = x[\log|x| + C],\ x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ द्वारा प्रदत्त फलन $\phi : \mathbf{R}\setminus\{0\} \to \mathbf{R}$, अवकल समीकरण (1) का, प्रत्येक वास्तविक संख्या C के लिए हल है।

उदाहरण 16 $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$ को हल कीजिए। (1)

हल दिए गए अवकल समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x},\ \text{यदि } x \neq 0 \tag{2}$$

(2) के दाहिने पक्ष को $\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}$, के रूप में लिख सकते हैं। यह शून्य घात का समघातीय फलन है, अत: (2) में $y = vx$ रखने पर प्राप्त होता है

$$x\frac{dv}{dx} + v = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2},\ \ x \neq 0$$

या $$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{x}$$

अतः समाकलन करने से हम पाते हैं कि

$$\log\left|v+\sqrt{1+v^2}\right| = \log|cx|, \qquad x \neq 0 \qquad (c : \text{प्राचल})$$

या $$\left|v+\sqrt{1+v^2}\right| = |cx|$$

या $$\left|\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right| = |cx|$$

या $$\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = c^2x^4,\ x \neq 0 \tag{3}$$

(3) का अवकल समीकरण (1) पूर्वग है।

उदाहरण 17 $\left(x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}\right)y-\left(y\sin\frac{y}{x}-x\cos\frac{y}{x}\right)x\frac{dy}{dx}=0$ को हल कीजिए। (1)

हल अवकल समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\ \frac{\cos\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}-\cos\frac{y}{x}} \tag{2}$$

अतः (2) या (1) एक समघातीय अवकल समीकरण है, इसलिए हम (1) में $y = vx$ रखकर प्राप्त करते हैं कि

$$x\frac{dv}{dx} = v\,\frac{\cos v + v\sin v}{v\sin v - \cos v} - v$$

$$= \frac{2v\cos v}{v\sin v - \cos v}$$

या $$\frac{dx}{x} = \left(\frac{v\sin v - \cos v}{2v\cos v}\right)dv = \left(\frac{1}{2}\frac{\sin v}{\cos v} - \frac{1}{2v}\right)dv, \quad \text{यदि } xv\cos v \neq 0$$

अतः समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\log|x| = -\frac{1}{2}\log|\cos v| - \frac{1}{2}\log|v| + \frac{1}{2}\log|c|, \ (c : \text{प्राचल})$$

या $\quad x^2|v\cos v| = |c|$

या $\quad \left|xy\cos\frac{y}{x}\right| = |c| \qquad (c : \text{प्राचल}), (x \neq 0) \qquad (3)$

समीकरण (3), अवकल समीकरण (1) का पूर्वग है।

उदाहरण 18 $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0 \qquad (1)$

हल हम अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)}{1 + e^{\frac{x}{y}}}, \qquad (y \neq 0) \qquad (2)$$

(2) का दाहिना पक्ष शून्य घात का समघातीय फलन है। इस प्रकार अवकल समीकरण (2) या (1) एक समघातीय अवकल समीकरण है। चूंकि (2) का दाहिना पक्ष $\frac{x}{y}$ का फलन है, अतः $x = vy$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{dx}{dy} = y\frac{dv}{dy} + v$$

इन्हें समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$y\frac{dv}{dy} + v = -\frac{e^v(1-v)}{1+e^v}$$

या $\quad y\frac{dv}{dy} = \frac{e^v(v-1)}{1+e^v} - v = \frac{-e^v - v}{1+e^v}$

या $$\frac{dy}{y} = \frac{-\left(1+e^{v}\right)}{e^{v}+v} dv, \text{ यदि } y\left(e^{v}+v\right) \neq 0$$

अंतिम समीकरण का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$\log\left| y\left(e^{v}+v\right)\right| = \log|c|, \quad (\text{c : प्राचल})$$

या $$ye^{\frac{x}{y}} + x = c \qquad (3)$$

समीकरण (3), अवकल समीकरण (1) का एक पूर्वग निरूपित करता है।

प्रश्नावली 14.5

दर्शाइए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक अवकल समीकरण समघातीय है और उनमें से प्रत्येक का एक पूर्वग ज्ञात कीजिए। जहाँ कहीं संभव हो, वहाँ हल स्थापित कीजिए।

1. $(x-y)y' = x+2y$
2. $\left(x^2+y^2\right)y' = 8x^2-3xy+2y^2$
3. $\left(3xy+y^2\right)dx = \left(x^2+xy\right)dy$
4. $2xy\,dx + \left(x^2+2y^2\right)dy = 0$
5. $\left(2x^2y+y^3\right)dx + \left(xy^2-3x^3\right)dy = 0$
6. $xy' - y + x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$
7. $(x+2y)dx - (2x-y)dy = 0$
8. $\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}dx - \left(\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}\right)dy = 0$
9. $2ye^{\frac{x}{y}}dx + \left(y - 2xe^{\frac{x}{y}}\right)dy = 0$
10. $y\,dx + x\left(\log\frac{y}{x}\right)dy - 2x\,dy = 0$

निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्याओं का हल ज्ञात कीजिए।

11. $\left(x^2+y^2\right)dx = 2xy\,dy,\ y(1) = 0$
12. $\left(x^2+y^2\right)dx + xydy = 0,\ y(1) = 1$

13. $\left(xe^{\frac{y}{x}}+y\right)dx = x\,dy,\ y(1)=1$

14. $xe^{\frac{y}{x}} - y + xy' = 0,\ y(e)=0$

15. $y' - \frac{y}{x} + \operatorname{cosec}\frac{y}{x} = 0,\ y(1)=0$

16. $2x^2y' - 2xy + y^2 = 0,\ y(e)=e$

17. $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0,\ y(1)=1$

18. $2xy + y^2 - 2x^2y' = 0,\ y(1)=2$

19. $xy'\sin\frac{y}{x} + x - y\sin\frac{y}{x} = 0,\ y(1)=\frac{\pi}{2}$

20. $xe^{\frac{y}{x}} - y\sin\frac{y}{x} + xy'\sin\frac{y}{x} = 0,\ y(1)=0$

14.7.3 *प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरण* (*First-order linear differential equations*)

परिभाषा 9 एक प्रथम कोटि का अवकल समीकरण को रैखिक होना तब कहते हैं यदि इसमें अज्ञात फलन y और इसके अवकलज y' के अऋणात्मक पूर्णांक घात, जो एक से अधिक न हों और न उसमें गुणनफल yy' ही उपस्थित हों।

इस प्रकार प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad (x \in \mathrm{I}) \tag{1}$$

के रूप के होते हैं, जहाँ p और q, I पर वास्तविक मान वाले फलन हैं। अवकल समीकरण

$$\frac{dx}{dy} + p(y)x = q(y) \ \ (y \in \mathrm{I}) \tag{2}$$

भी एक रैखिक अवकल समीकरण है, जहाँ y स्वतंत्र चर और x आश्रित चर है।

अब हम स्वेच्छया चुने गए $a \in \mathrm{I}$ के लिए $\mathrm{P}(x) = \int_a^x p(t)dt$, परिभाषित करते हैं। $e^{\mathrm{P}(x)}$ पद, अवकल समीकरण (1) का एक समाकलन गुणक [*Integrating factor* (I.F.)] कहलाता है, क्योंकि

$$\frac{d}{dx}[ye^{\mathrm{P}(x)}] = [y' + p(x)y]e^{\mathrm{P}(x)} = q(x)e^{\mathrm{P}(x)},\ (x \in \mathrm{I}) \tag{2}$$

जिसका सरलतापूर्वक समाकलन किया जा सकता है। (2) का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$ye^{P(x)} = \int_a^x q(u)e^{P(u)}du + C \qquad (C : \text{प्राचल}) \qquad (3)$$

(3) अवकल समीकरण (1) का एक पूर्वग है।

टिप्पणी

1. समाकलन गुणक को ज्ञात करने में बिंदु 'a' का चयन महत्त्वपूर्ण नहीं है, क्योंकि इससे दिए गए अवकल समीरकण (1) द्वारा निरूपित वक्रों का कुल परिवर्तित नहीं होता है। प्रयोग में एक समाकलन गुणांक को $e^{\int p(x)dx}$ के रूप में लिखते हैं।

   फलतः हल-वक्र निम्नलिखित रूप में लिखी जाती है :

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

2. समस्या के हल करने के लिए सर्वप्रथम एक समाकलन गुणक ज्ञात किया जाता है। दिए अवकल समीकरण को उससे गुणा करते हैं, उसके उपरांत उसका समाकलन करते हैं।

3. एक अवकल समीकरण से संबंधित एक से अधिक समाकलन गुणांक हो सकते हैं।

उदाहरण 19 $\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x, (x \in \mathbf{R})$ को हल कीजिए। (1)

हल यह प्रथम कोटि का रैखिक समीकरण है, जहाँ $p(x) = 1$

इसलिए एक समाकलन गुणांक $= e^{\int 1.dx} = e^x$

अवकल समीकरण के दोनों पक्षों में e^x से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$[y' + y]e^x = \frac{d}{dx}[ye^x] = e^x \sin x$$

अतः समाकलन करने पर प्राप्त होता है

$$ye^x = \int e^x \sin x \, dx + C \qquad (C : \text{प्राचल})$$

$$= \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C$$

या $$y=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+Ce^{-x},\quad (x\notin \mathbf{R}) \tag{2}$$

(2) अवकल समीकरण (1) द्वारा निरूपित कुल का हल–वक्र है। C एक प्राचल है।

उदाहरण 20 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{x}=e^{x},\quad (x>0)$ (1)

हल यहाँ हमारे पास प्रथम कोटि का रैखिक अवकल समीकरण है, जहाँ $p(x)=\dfrac{1}{x}$.

इस प्रकार एक समाकलन गुणक $=e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log x}=x,\ (x>0)$

(1) को x से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$x\frac{dy}{dx}+y=xe^{x}$$

अतः समाकलन द्वारा हम पाते हैं कि

$$xy=\int xe^{x}+C \qquad \text{(C : प्राचल)}$$

$$=(x-1)e^{x}+C$$

इस प्रकार (1) के हल–वक्रों के कुल का अभीष्ट समीकरण

$$y=\frac{1}{x}(x-1)e^{x}+\frac{C}{x},\qquad (x>0)$$

है, जहाँ C वास्तविक प्राचल है।

उदाहरण 21 $(x+y)\dfrac{dy}{dx}=1$ को हल कीजिए। (1)

हल यदि हम अवकल समीकरण (1) को निम्नलिखित रूप

$$\frac{dx}{dy}=x+y \ \text{ या } \ \frac{dx}{dy}-x=y \tag{2}$$

में पुनर्लिखित करते हैं, तो पाते हैं कि यह y स्वतंत्र चर तथा x आश्रित चर में एक रैखिक समीकरण बन जाता है। अवकल समीकरण (2) का एक समाकलन गुणांक $=e^{\int(-1)dy}=e^{-y}$

(2) को e^{-y} से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$e^{-y}\left[\frac{dx}{dy} - x\right] = ye^{-y}$$

या $$\frac{d}{dy}\left(xe^{-y}\right) = ye^{-y} \quad (3)$$

अतः (3) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$xe^{-y} = \int ye^{-y} + C \qquad (C : \text{प्राचल})$$

$$= (-y-1)e^{-y} + C$$

या $$x + y + 1 = Ce^{y} \quad (4)$$

जो (1) के हल-वक्रों के अभीष्ट कुल को निरूपित करता है।

टिप्पणी यहाँ हम अवकल समीकरणों के तीन प्रकार नामतः पृथक्करणीय चरों वाला अवकल समीकरण, समघातीय अवकल समीकरण, रैखिक अवकल समीकरण की व्याख्या कर चुके हैं। प्रथम कोटि तथा प्रथम घात के ऐसे अवकल समीकरण, जो इन तीनों रूपों में से किसी एक या अन्य रूप में परिणित किए जा सकते हैं उन्हें इस पुस्तक की सीमा से परे कर दिया गया है।

प्रश्नावली 14.6

निम्नलिखित अवकल समीकरणों के हल-वक्रों के कुल का एकल-प्राचल समीकरण ज्ञात कीजिए।

1. $y' + 2y = e^{3x}$
2. $y' + y = \cos x$
3. $y' + 3y = e^{mx}$ (m : एक दी गई वास्तविक संख्या)
4. $y' - y = \cos 2x$
5. $xy' - y = (x+1)e^{-x}$
6. $xy' + y = x^4$
7. $xy' + y = x \log x$
8. $xy' \log x + y = \log x$
9. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2x}{1+x^2} y = x^2 + 2$
10. $y' + y\cos x = e^{\sin x} \cos x$

निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्याओं को हल कीजिए।

11. $y' - y = e^x, \ y(0) = 1$

12. $y' + y = e^x, \ y(0) = \frac{1}{2}$

13. $xy' + y = x\log x, \ y(1) = \frac{1}{4}$

14. $xy' - y = \log x, \ y(1) = 0$

15. $xy' - y = (x+1)e^{-x}, \ y(1) = 0$

16. $\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{1}{(x^2+1)^2}, \ y(0) = 0$

17. $y' + y\tan x = 2x + x^2\tan x, \ y(0) = 1$

18. $xy' + y = x\cos x + \sin x, \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

19. $(x - \sin y)dy + (\tan y)dx = 0, \ y(0) = 0$

20. $y' + 2y = e^{-2x}\sin x, \ y(0) = 0$

21. $(1+y^2)dx = (\tan^{-1}y - x)dy, \ y(0) = 0$

22. $(1+y^2)dx + \left(x - e^{-\tan^{-1}y}\right)dy = 0, \ y(0) = 0$

23. $ye^y dx = (y^3 + 2xe^y)dy, \ y(0) = 1$

24. $\sqrt{1-y^2}\,dx = (\sin^{-1}y - x)dy, \ y(0) = 0$

14.8 एक विशिष्ट प्रकार के द्वितीय कोटि के अवकल समीकरण (A Special Type of Second-order Differential Equations)

यहाँ हम केवल एक विशिष्ट प्रकार के द्वितीय कोटि के अवकल समीरकण, नामत:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x) \qquad (x \in \mathrm{I}) \qquad (1)$$

पर विचार करेंगे।

(1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + \mathrm{A} \qquad (\mathrm{A} : \text{प्राचल}) \qquad (2)$$

$= \mathrm{F}(x) + \mathrm{A}$ मान लीजिए।

तब (2) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$y = \int F(x)dx + Ax + B, \qquad \text{(B : प्राचल)}$$

इस प्रकार $\quad y = F_1(x) + Ax + B, \qquad (x \in I) \qquad (3)$

जो (1) के हल-वक्रों के कुल को निरूपित करता है, जहाँ A और B प्राचल है।

उदाहरण 22 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \cos x$, $(x \in \mathbf{R})$ के दो प्राचल वाले हल के कुल को ज्ञात कीजिए। (1)

हल (1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \sin x + A, \qquad (x \in \mathbf{R}) \text{ (A : प्राचल)} \qquad (2)$$

(2) के पुनः समाकलन से हम (1) के हल-वक्रों के अभीष्ट समीकरण

$$y = -\cos x + Ax + B, \qquad (x \in \mathbf{R}) \qquad (3)$$

जहाँ A और B प्राचल हैं, प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 23 निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल कीजिए।

$$y''(x) = e^x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0 \qquad (1)$$

हल अवकल समीकरण (1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$y'(x) = e^x + A, \qquad \text{(A : प्राचल)} \qquad (2)$$

(2) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$y(x) = e^x + Ax + B, \qquad \text{(A, B : प्राचल)} \qquad (3)$$

अब $y(0) = 1$ के प्रयोग से हम पाते हैं कि $1 = 1 + B$ या $B = 0$

और $y'(0) = 0$, के प्रयोग से हम पाते हैं कि $0 = 1 + A$ या $A = -1$

अतः दी गई प्रारंभिक मान समस्या का हल फलन $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$\phi(x) = e^x - x \text{ (सभी } x \in \mathbf{R} \text{ के लिए)} \qquad (4)$$

द्वारा प्रदत्त है।

प्रश्नावली 14.7

निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण के लिए दो प्राचल वाले हलों के कुल को ज्ञात कीजिए:

1. $y'' = \sin 2x, \ (x \in \mathbf{R})$

2. $y'' = \sec^2 x, \ \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), x \neq 0$

3. $y'' = \operatorname{cosec}^2 x, \ (x \in (0, \pi))$

4. $y'' = a + bx, \ (x \in \mathbf{R})$ (a, b प्रदत्त वास्तविक संख्याएँ हैं)

5. $y'' = x^{18}, \ (x \in \mathbf{R})$

6. $y'' = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n, (x \in \mathbf{R})$

7. $y'' = \sin 2x + \cos 3x, \ (x \in \mathbf{R})$

8. $y'' = 2^2 \sin 2x + 4^2 \sin 4x + 6^2 \sin 6x, \quad (x \in \mathbf{R})$

9. $y'' = x \sin x, \ (x \in \mathbf{R})$

10. $y'' = x \cos x + x, \ (x \in \mathbf{R})$

निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्याओं को हल कीजिए।

11. $y'' = \cos x, \ (x \in \mathbf{R}), \ y(0) = 1, \ y'(0) = 0$

12. $y'' = \sec^2 x, \ \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \ y(0) = \log 2, \ y'(0) = 0$

13. $y'' = \sec x \tan x, \ \left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 1$

14. $y'' = \operatorname{cosec} x \cot x, \ (x \in (0, \pi)), \ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

15. $y'' = \cos x + \sin x, \ (x \in \mathbf{R}), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0$

16. $y'' = 6x, \ x \in \mathbf{R}, \ y(0) = 1, \ y'(0) = 1$

17. $y'' = 6x + 12x^2,\ x \in \mathbf{R},\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

18. $y'' = 6x + \sin x,\ x \in \mathbf{R},\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

19. $y'' = x + e^x,\ x \in \mathbf{R},\ y(0) = 1,\ y'(0) = 4$

20. $y'' = \sin x + e^x,\ x \in \mathbf{R},\ y(0) = 3,\ y'(0) = 4$

14.9 अनुप्रयोग (Applications)

आजकल, ज्ञान की कोई शाखा कठिनाई से मिलेगी, जहाँ समस्याओं से निपटने के लिए अवकल समीकरणों का प्रयोग न होता हो। यहाँ हम ज्ञान की विविध शाखाओं से कुछ समस्याओं को प्रस्तुत करते हैं, जहाँ अवकल समीकरणों के विविध अनुप्रयोग प्रदर्शित होते हैं। कुछ अनुप्रयोग और भी हैं, जिनका यहाँ उल्लेख नहीं है।

उदाहरण 24 1000 छात्रों के एक छात्रावास में एक छात्र विषाणु ग्रसित आया और तब उस छात्रावास को अलग कर दिया गया। यदि मान लिया जाए कि विषाणु केवल संक्रमित छात्रों की संख्या N_i के समानुपाती ही नहीं बल्कि असंक्रमित छात्रों की संख्या के भी समानुपाती फैलता है और यदि 4 दिनों पश्चात् संक्रमित छात्रों की संख्या 50 है, तो दर्शाइए कि 10 दिनों बाद 95% से अधिक छात्र विषाणु से संक्रमित हो जाएंगे।

हल समस्या की परिकल्पना के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{dN_i}{dt} = k\,N_i(1000 - N_i),\quad N_i(0) = 1 \qquad (1)$$

जहाँ k समानुपातिक (constant of proportionality) स्थिरांक है। (1) एक ऐसा अवकल समीकरण है, जिसके चर पृथक्करणीय हैं। इसे हम निम्नलिखित रूप में लिखते हैं :

$$k\,dt = \frac{dN_i}{N_i(1000 - N_i)} = \frac{1}{1000}\left[\frac{1}{N_i} + \frac{1}{1000 - N_i}\right] d\,N_i$$

इसके समाकलन से हम पाते हैं कि

$$\frac{N_i}{1000 - N_i} = Ae^{1000kt}, \qquad (\text{A : प्राचल}) \qquad (2)$$

पूरक प्रतिबंध $N_i(0) = 1$ से प्राचल A ज्ञात करने पर $A = \frac{1}{999}$ मिलता है।

इस प्रकार $$N_i\left(1 + 999e^{-1000kt}\right) = 1000 \qquad (3)$$

अब हम $N_i(4) = 50$ के प्रयोग से k ज्ञात करते हैं।

इस प्रकार $$50\left(1+999e^{-4000k}\right) = 1000$$

अत: $$k = \frac{1}{4000}\log\frac{999}{19} = 0.0009906 \text{ (लगभग)}$$

k के इस मान को (3) में प्रतिस्थापित करने तथा $t = 10$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$N_i(10) = \frac{1000}{1+999e^{-\frac{10}{4}\log\frac{999}{19}}}$$

$$= \frac{1000}{1+(19)^{\frac{5}{2}}(999)^{\frac{-3}{2}}} = 952 \text{ (लगभग)}$$

इस प्रकार 95% से अधिक छात्र 10 दिनों बाद संक्रमित हो जाएंगे।

उदाहरण 25 एक रेडियोधर्मी पदार्थ के विखंडन की दर उसकी वर्तमान मात्रा के समानुपाती है। 1600 वर्षों में उसकी मात्रा का 50% भाग विखंडित होता है। 10 वर्ष बाद उस पदार्थ का कितना प्रतिशत भाग विखंडित होता है? $\left[e^{-\frac{\log 2}{160}} = 0.9957 \text{ लीजिए}\right]$

हल मान लीजिए कि रेडियोधर्मी पदार्थ की किसी क्षण t पर उपस्थित मात्रा y द्वारा व्यक्त होती है, तब समस्या के अनुसार,

$$\frac{dy}{dt} \propto y \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -ky \qquad (1)$$

जहाँ k समानुपातिक स्थिरांक है,जो धनात्मक है, इसके पूर्व ऋण चिह्न विखंडन की प्रक्रिया व्यक्त करता है।

(1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$\log y = -kt + C, \qquad \text{(C : प्राचल)} \qquad (2)$$

मान लीजिए कि प्रारंभ में अर्थात् $t = 0$ पर रेडियोधर्मी पदार्थ की मात्रा y_0 है। इसका (2) में प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि $C = \log y_0$

इस प्रकार $$\log y = -kt + \log y_0$$

या $$\log \frac{y}{y_0} = -kt \tag{3}$$

प्रश्नानुसार , $y = \frac{y_0}{2}$, जब $t = 1600$

अत: (3) से हम पाते हैं कि

या $$\log \frac{1}{2} = -k\,1600$$

या $$k = \frac{1}{1600} \log 2 \tag{4}$$

(4) का (3) में प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\log \frac{y}{y_0} = -\frac{t \log 2}{1600}$$

या $$y = y_0\, e^{-\frac{t \log 2}{1600}} \tag{5}$$

इस प्रकार 10 वर्षों बाद उपस्थित मात्रा y_1 निम्नलिखित है :

$$y_1 = y_0\, e^{-\frac{\log 2}{160}} = (0.9957)\, y_0$$ (दिए आँकड़े के अनुसार)

इस प्रकार 10 वर्षों में विखंडित मात्रा 0.0043 y_0, अर्थात् रेडियोधर्मी पदार्थ के द्रव्यमान का 0.43% है।

उदाहरण 26 यह ज्ञात है कि यदि ब्याज सांतत्य विधि से संयोजित किया जाता है, तो मूलधन के परिवर्तन विधि की दर बैंक के वार्षिक ब्याज की दर और मूलधन के गुणनफल के समान होती है। यदि 5% वार्षिक की दर से ब्याज संतत संयोजित हो, तो 100 रु की राशि कितने वर्षों बाद अपने से दूनी हो जाएगी?

हल यदि A किसी क्षण t पर मूलधन व्यक्त करता है तो समस्या में दिए गए नियमानुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{dA}{dt} = (0.05)A \tag{1}$$

(1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$A = Ce^{(0.05)t} \tag{2}$$

चूंकि प्रथमतः रु 100 निवेश किया गया है, अर्थात् $A = 100$ जब $t = 0$

इस प्रकार (2) से हम पाते हैं कि $C = 100$ (3)

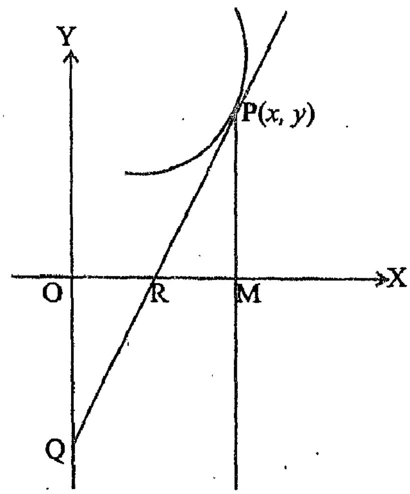
यदि रु 100 को दो गुना होने के लिए T वर्षों की आवश्यकता है, तो हम (2) और (3) से पाते हैं कि

$$200 = 100\, e^{(0.05)\,T}$$

अर्थात् $T = 20 \log_e 2$ वर्ष

उदाहरण 27 xy-तल में वह वक्र ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (1,1) से जाती है तथा इसके किसी स्पर्श रेखा के स्पर्श-बिंदु तथा y-अक्ष से खंडित रेखाखंड का मध्य-बिंदु x-अक्ष पर स्थित हो।

हल मान लीजिए कि अभीष्ट वक्र के किसी बिंदु $P(x,y)$ की स्पर्श रेखा y-अक्ष को Q तथा x-अक्ष को R बिंदु पर काटती है। प्रश्नानुसार PR = RQ । यदि O मूल-बिंदु और P से x-अक्ष पर डाले गए लंब का पाद M है, तो हम पाते हैं कि दो सर्वांगसम समकोण त्रिभुजों ORQ और MRP में OR = RM (आकृति 14.3)।



आकृति 14.3

अतः $$y' = \frac{dy}{dx} = \tan\angle PRM = \frac{y}{\frac{x}{2}} = \frac{2y}{x} \qquad (1)$$

स्पष्टतः (1) प्रथम कोटि का समीकरण है, जिसके चर पृथक्करणीय हैं। (1) के समाकलन से हम पाते हैं कि

$$y = C\,x^2 \qquad (C : \text{प्राचल}) \qquad (2)$$

यदि वक्रों का कुल (2) आवश्यक गुणधर्म वाला हो, तो वक्र जो (1,1) से जाती है, $y = x^2$ है। क्योंकि (2), $x = 1, y = 1$ द्वारा संतुष्ट होना चाहिए जिससे $C = 1$ निर्धारित होता है।

उदाहरण 28 एक डॉक्टर ने 11.30 अपराह्न में एक मृत शरीर का तापमान लिया, जो 94.6°F पाया गया। उसने एक घंटे बाद उसका पुनः तापमान लिया, जो 93.4° F प्राप्त हुआ। यदि कमरे का तापमान 70° F था, तो मृत्यु के समय का अनुमान लगाइए। (मानव शरीर का तापमान 98.6°F लीजिए)

हल न्यूटन के शीतलन नियम का कथन यह है कि किसी वस्तु के शीतल होने की दर उस वस्तु के परिवेशीय माध्यम के ताप तथा वस्तु के ताप के अंतर के समानुपाती होता है।

यदि समय t पर शरीर का ताप T है, तो न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार हम पाते हैं कि

$$\frac{dT}{dt} = k(T-70), \qquad \text{(जहाँ } k \text{ समानुपातिक स्थिरांक है)} \qquad (1)$$

जो प्रथम कोटि का अवकल समीकरण है, जिसके चर पृथक्करणीय हैं।

(1) का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$T = 70 + Ce^{kt} \qquad \text{(C : प्राचल)} \qquad (2)$$

चूंकि $t = 0$, पर $T = 94.6$, अतः $C = 24.6$

पुनः $T = 93.4$ जब $t = 60$ मिनट,

इस प्रकार $k = \frac{1}{60} \log \frac{117}{123} < 0$

अतः मृत्यु के उपरांत व्यतीत समय t_1 के लिए

$$98.6 = 70 + (24.6)\ e^{kt_1}$$

इसका अर्थ है कि

$$t_1 = \frac{1}{k} \log \frac{143}{123} \approx -3.01$$

अतः मृत्यु का अनुमानित समय $11.30 - 3.01 = 8.30$ (लगभग)

प्रश्नावली 14.8

1. मान लीजिए कि जनसंख्या वृद्धि उपस्थित जनसंख्या के समानुपाती है। यदि किसी कॉलोनी की जनसंख्या 50 दिनों में दूनी हो जाती है तो ज्ञात कीजिए कितने दिनों में तिगुनी हो जाएगी।

2. किसी जनसंख्या के वृद्धि की दर उपस्थित संख्या के समानुपाती है। यदि किसी नगर की जनसंख्या 25 वर्षों में दूनी होती है और वर्तमान जनसंख्या 1,00,000 है। ज्ञात कीजिए कि कब नगर की जनसंख्या 5,00,000 हो जाएगी।

   $\left(\log_e 5 = 1.609,\ \log_e 2 = 0.6931\right)$

3. यह दिया गया है कि दर जिससे कुछ जीवाणु वृद्धि करते हैं, वह उनके तात्कालिक उपस्थित संख्या के समानुपाती है। यदि जीवाणुओं की मूल संख्या दो घंटे में दूनी हो जाती है, तो कितने घंटों में यह पाँच गुनी हो जाएगी।

4. किसी जीवाणु-समूह में जीवाणुओं की संख्या 1,00,000 है। 2 घंटों में इनकी संख्या में 10% की वृद्धि होती है। कितने घंटों में जीवाणुओं की संख्या 2,00,000 हो जाएगी, यदि जीवाणुओं के वृद्धि की दर उनके उपस्थित संख्या के समानुपाती होती है।

5. यह दिया गया है कि रेडियम के विघटन की दर उसके उपस्थित द्रव्यमान के समानुपाती होती है। यदि l वर्षों में मौलिक रेडियम का p प्रतिशत विघटित हो जाता है, तो उसका कितना प्रतिशत $2l$ वर्षों में शेष रहेगा?

6. रेडियम ऐसी दर से विघटित होता है, जो रेडियम के उपस्थित द्रव्यमान के समानुपाती है। यदि यह ज्ञात होता है कि 25 वर्षों में रेडियम के दिए द्रव्यमान का लगभग 1.1 प्रतिशत रेडियम विघटित हो गया है, तो ज्ञात कीजिए कि लगभग कितने वर्षों में दिए द्रव्यमान का आधा भाग विघटित हो जाएगा?

$\left(\log_e .989 = 0.01106,\ \log_e 2 = 0.6931\right)$

7. यह ज्ञात है कि यदि ब्याज सांततः संयोजित होता हो, तो मूलधन के परिवर्तन की दर बैंक के वार्षिक ब्याज की दर तथा मूलधन के गुणनफल के बराबर होती है।

(i) यदि ब्याज सांततः संयोजित होता हो, तो किस ब्याज दर पर 100 रु, 10 वर्षों में दूना हो जाएगा? $\left(\log_e 2 = 0.6931\right)$

(ii) यदि ब्याज सांततः संयोजित होता हो, तो 1000 रु,5% वार्षिक ब्याज की दर पर 10 वर्षों में कितना हो जाएगा? $\left(e^{.5} = 1.648\right)$

शीतलन के नियम का कथन यह है कि किसी वस्तु के ताप के परिवर्तन की दर वस्तु तथा उसके पर्यावरण के ताप के अंतर के समानुपाती होती है। इसका प्रयोग करते हुए निम्नलिखित प्रश्न को हल कीजिए।

8. 100^0C का जल 10 मिनट में 80^0C तक ठंडा होता है। यदि कमरे का ताप 25^0C हो, तो ज्ञात कीजिए

(i) 20 मिनट बाद जल का ताप

(ii) समय जब जल का ताप 40^0C है।

$$\left[\log_e \frac{11}{15} = 0.3101,\ e^{-.62} = .5379\right]$$

9. बिंदु (0,1) से जाने वाली वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए। यदि वक्र के प्रत्येक बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता (slope) उस बिंदु के भुज तथा भुज और कोटि के गुणनफल के योग के बराबर हो।

10. उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिंदु (3,−4) से जाती है तथा उसके (x, y) बिंदु पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\frac{2y}{x}$ के समान है।

11. उस वक्र का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिंदु $(0, a)$ से जाती है, तथा इसके किसी बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता तथा बिंदु के कोटि का गुणनफल उसके भुज के बराबर है।

12. दर्शाइए कि ऐसे सभी वक्र जिसके बिंदु (x, y) पर स्पर्श रेखा की प्रवणता $\dfrac{x^2+y^2}{2xy}$ है, समकोणिक अति परवलय है।

विविध उदाहरण
(MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 29 समीकरण $(x-a)^2+2y^2=a^2$, a प्राचल है, द्वारा निरूपित वक्रों के कुल का अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए।

हल दिया गया समीकरण

$$(x-a)^2+2y^2=a^2 \tag{1}$$

(1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$2(x-a)+4y\frac{dy}{dx}=0$$

या $$x-a=-2y\frac{dy}{dx} \tag{2}$$

या $$a=x+2y\frac{dy}{dx} \tag{3}$$

(1) में (2) और (3) के प्रयोग करके हम 'a' को विलुप्त करने पर पाते हैं कि

$$\left(-2y\frac{dy}{dx}\right)^2+2y^2=\left(x+2y\frac{dy}{dx}\right)^2$$

या $$2y^2=x^2+4xy\frac{dy}{dx}$$

या $$2y^2-x^2=4xy\frac{dy}{dx},$$

जो वक्रों के दिए गए कुल (Family) का अवकल समीकरण है।

उदाहरण 30 $y.e^{x/y}dx=\left(x.e^{x/y}+y^2\right)dy,\ y\neq 0$ को हल कीजिए।

हल प्रदत्त अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{xe^{\frac{x}{y}} + y^2}{ye^{\frac{x}{y}}} = \frac{x}{y} + ye^{-\frac{x}{y}} \qquad (1)$$

ध्यान दीजिए कि यह न तो समघातीय अवकल समीकरण है और न ही रैखिक अवकल समीकरण है, फिर भी यदि हम $x = vy$ प्रतिस्थापित करते हैं, तो पाते हैं कि

$$\frac{dx}{dy} = v + y\frac{dv}{dy} \qquad (2)$$

(2) का (1) में प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$v + y\frac{dv}{dy} = v + ye^{-v}$$

या $$\frac{dv}{dy} = e^{-v},\ y \neq 0$$

या $$e^{v}dv = dy$$

इसके समाकलन से हम पाते हैं कि

$$e^{v} = y + c \qquad \text{(c : प्राचल)}$$

अत: प्रदत्त समीकरण (1) का एक पूर्वग

$$e^{\frac{x}{y}} = y + c \text{ है।}$$

उदाहरण 31 $\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1,\ x \neq 0$ को हल कीजिए।

हल प्रदत्त अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}},\ x \neq 0 \qquad (1)$$

यह अवकल समीकरण (1) रैखिक है, जिसके लिए $p(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

इस प्रकार $$P(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$$

इसलिए एक समाकलन गुणांक $= e^{2\sqrt{x}}$

अत: (1) में $e^{2\sqrt{x}}$ से गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$e^{2\sqrt{x}}\left(\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

अत: समाकलन करने पर हम पाते हैं कि

$$ye^{2\sqrt{x}} = \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt + C = 2\sqrt{x} + C \qquad \text{(C : प्राचल)}$$

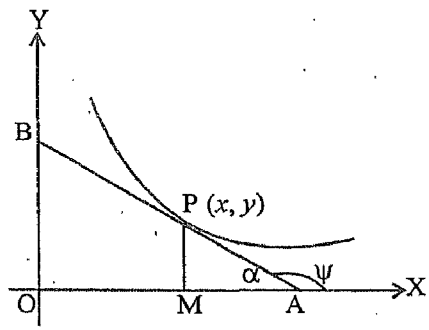
इस प्रकार (1) के हल-वक्रों का अभीष्ट समीकरण

$$y = e^{-2\sqrt{x}}\left(2\sqrt{x} + C\right) \text{ है।} \qquad (2)$$

उदाहरण 32 दिखाइए कि वह वक्र जिसके प्रत्येक बिंदु पर स्पर्शी द्वारा अक्षों के बीच अंत: खंडित भाग का मध्य-बिंदु, $xy = c$ स्पर्शी का स्पर्श बिंदु है, समकोणिक अतिपरवलय है।

हल मान लीजिए कि वक्र के किसी बिंदु $P(x, y)$ पर की स्पर्शी x-अक्ष तथा y-अक्ष से क्रमश: बिंदुओं A तथा B पर मिलती है। अत: दिए प्रश्न के अनुसार $AP = PB$ मान लीजिए कि P से x-अक्ष पर लंब का पाद M है। समरूप त्रिभुजों APM और ABO द्वारा हम पाते हैं कि (आकृति 14.4)

$$\frac{OA}{MA} = \frac{BA}{PA} = \frac{BO}{PM}$$



आकृति 14.4

चूंकि $BA = 2PA$, अत: हम पाते हैं कि $BO = 2PM = 2y$ और $OA = 2MA = 2(OA - x)$ या $OA = 2x$

अत:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\psi = \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha = -\frac{OB}{OA} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$$

या $$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \quad (1)$$

यह ऐसा अवकल समीकरण है, जिसके चर पृथक्करणीय हैं, अर्थात् $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$

इसके समाकलन से हम पाते हैं कि

$$\log|xy| = \log|c| \qquad (c \neq 0 : \text{ प्राचल})$$

अतः अभीष्ट वक्रों का समीकरण $xy = c$: समकोणिक अति परवलय है।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 14)

1. निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण की कोटि और घात (यदि परिभाषित है) ज्ञात कीजिए।

$$\left(y' = \frac{dy}{dx},\ y'' = \frac{d^2y}{dx^2},\ y''' = \frac{d^3y}{dx^3},\ y^{iv} = \frac{d^4y}{dx^4} \text{ इत्यादि} \right)$$

   (i) $(y'')^2 + (y')^3 + \sin y = 0$ **(ii)** $y' + e^y = 0$

   (iii) $y^{iv} + \sin y''' = 0$ **(iv)** $y''' + y'' + y' + y \sin y = 0$

2. उस अवकल समीकरण को प्राप्त कीजिए, जो निम्नलिखित समीकरणों द्वारा निरूपित वक्रों के कुल को निरूपित करता है $(a, b : \text{प्राचल})$।

   (i) $y = ax^3$. **(ii)** $x^2 + y^2 = ax^3$ **(iii)** $y = e^{ax}$

3. सत्यापन कीजिए कि निम्नलिखित फलनों $\phi : \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$, में से प्रत्येक अपने संगत प्रदत्त प्रारंभिक मान समस्या के हल हैं।

   (i) $\phi(x) = \sin x + \cos x$: $y'' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

   (ii) $\phi(x) = e^x + e^{-x}$: $y'' - y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

   (iii) $\phi(x) = e^x + e^{2x}$; $y'' - 3y' + 2y = 0,.\ y(0) = 1,\ y'(0) = 3$

   (iv) $\phi(x) = xe^x + e^x$: $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

4. निम्नलिखित प्रत्येक अवकल समीकरण के एक-प्राचल हलों के कुल को ज्ञात कीजिए :

(i) $y' = e^{x+y} + e^{-x+y}$

(ii) $y' = \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)\cos^2 y$

(iii) $\left(xy^2 + 2x\right)dx + \left(x^2 y + 2y\right)dy = 0$

(iv) $xyy' = 1 + x + y + xy$

(v) $y^2 + x^2 y' = xyy'$

(vi) $\left(y^2 - 2xy\right)dx = \left(x^2 - 2xy\right)dy$

(vii) $y^2 dx + \left(x^2 - xy + y^2\right)dy = 0$

(viii) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$

(ix) $y'\cos^2 x = \tan x - y$

(x) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y\cos x}{1 + \sin x}$

(xi) $e^{-y}\sec^2 y\, dy = dx + x dy$

(xii) $\left(x + 2y^3\right)y' = y$

5. निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्याओं को हल कीजिए :

(i) $y - xy' = 2\left(1 + x^2 y'\right),\ y(1) = 1$

(ii) $(x+1)y' = 2e^{-y} - 1,\ y(0) = 0$

(iii) $\cos(x+y)dy = dx,\ y(0) = 0$

(iv) $(x + y + 1)^2 dy = dx,\ y(-1) = 0$

(v) $(x - y)(dx + dy) = dx - dy,\ y(0) = -1$

(vi) $\frac{dy}{dx} = \frac{y(x+2y)}{x(2x+y)},\ y(1) = 2$

(vii) $\left(y^4 - 2x^3 y\right)dx + \left(x^4 - 2xy^3\right)dy = 0,\ y(1) = 1$

(viii) $x\left(x^2 + 3y^2\right)dx + y\left(y^2 + 3x^2\right)dy = 0,\ y(1) = 1$

(ix) $\left(x^2 + 1\right)y' - 2xy = \left(x^4 + 2x^2 + 1\right)\cos x,\ y(0) = 0$

(x) $ye^y dx = \left(y^3 + 2xe^y\right)dy,\ y(0) = 1$

(xi) $y' + y\cot x = 4x\,\text{cosec}\,x,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

(xii) $(1 + xy)y dx + (1 - xy)x dy = 0,\ y(1) = 1$ (संकेत : $xy = t$ रखें)

6. निम्नलिखित अवकल समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $x^2y'' = \log x$ (ii) $y'' = \sin^2 x$

7. निम्नलिखित प्रारंभिक मान समस्या को हल कीजिए।

$$x^3 \frac{d^2y}{dx^2} = a^2,\ y(1) = a^2,\ y'(1) = 0$$

8. किसी जीवाणु समूह में जीवाणुओं की संख्या में वृद्धि की दर उनकी उपस्थित संख्या के समानुपाती है। ज्ञात है कि उनकी संख्या 5 घंटों में तीन गुनी हो जाती है, तो बताइए कि 10 घंटों में उनकी उपस्थित संख्या कितनी हो जाएगी? यह भी ज्ञात कीजिए कि प्रारंभिक मूल संख्या से 10 गुने जीवाणुओं के होने में कितना समय लगेगा?

$\left(\log_e 3 = 1.0986,\ e^{2.1972} = 9\right)$ (लगभग)

9. किसी नगर की जनसंख्या वृद्धि की दर किसी क्षण t पर उस नगर के निवासियों की संख्या पर निर्भर करती है। यदि उस नगर की जनसंख्या सन् 1990 में 2,00,000 और सन् 2000 में 2,50,000 थी, तो ज्ञात कीजिए कि सन् 2010 में नगर की जनसंख्या कितनी हो जाएगी?

10. किसी रेडियोधर्मी पदार्थ के क्षण t पर विखंडित होने की दर दिए गए नमूने में उस समय उपस्थित नाभिकों की संख्या के समानुपातिक होती है, तब

(a) यदि किसी एक नमूने में रेडियोधर्मी पदार्थ के मौलिक नाभिकों के 10% भाग 100 वर्षों में विखंडित हो गए हैं, तो ज्ञात कीजिए कि 1000 वर्षों में मौलिक नाभिकों की संख्या के कितने प्रतिशत अवशिष्ट रहेंगे?

(b) यदि रेडियोधर्मी पदार्थ निर्मित होने के 1 वर्ष बाद 100 ग्राम अवशिष्ट रहता है और निर्मित होने के 2 वर्ष बाद 75 ग्राम अवशिष्ट रहता है, तो ज्ञात कीजिए कि पदार्थ का कितना द्रव्यमान निर्मित किया गया था।

11. यदि ब्याज सांतत: 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से संयोजित होता है, तो 1000 रु, 10 वर्षों बाद कितना हो जाएगा? 1000 रु को दो गुना होने में कितने वर्ष लगेंगे?

$\left(e^{.6} = 1.822\right)$ (लगभग)

12. कमरे से बाहर तापमापी का पाठ्यांक 80^0F है। 5 मिनट बाद तापमापी का पाठ्यांक 60^0F हो जाता है। इसके 5 मिनट और बाद पाठ्यांक 50^0F हो जाता है। बाहर का तापमान कितना है?

13. किसी वक्र के प्रत्येक बिंदु पर स्पर्शी की प्रवणता उस बिंदु के निर्देशांकों के योगफल के बराबर है। इस कुल की वह वक्र ज्ञात कीजिए जो मूल बिंदुगामी है।

14. किसी वक्र के प्रत्येक बिंदु पर स्पर्शी की प्रवणता उस बिंदु के भुज के वर्ग के बराबर है। (–1, 1) से जाने वाली विशिष्ट वक्र ज्ञात कीजिए।

15. एक वक्र के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा का x-अक्ष पर अंत:खंड स्पर्श बिंदु के कोटि के (1, 1) से जाने वाली विशिष्ट वक्र ज्ञात कीजिए।

ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

अवकल समीकरण विज्ञान की प्रमुख भाषाओं में से एक है। रोचक तथ्य यह है कि अवकल समीकरणों की जन्म-तिथि नवंबर 11, 1675 है, जब मान्य गाटफ्रायड विलहेल्म फ्रेहर लैबनीज [Gottfried Wilhelm Freiherr Leibnitz (1646 – 1716)] ने सर्वप्रथम सर्वसमिका, $\int y dy = \frac{1}{2} y^2$, को लिखित रूप में प्रस्तुत किया तथा उनसे दोनों प्रतीकों $\int$ और dy से परिचित कराया। वस्तुत: लैबनीज ऐसी वक्र को ज्ञात करने की समस्या में मग्न थे जिसकी स्पर्श रेखा निर्दिष्ट हो। इस समस्या ने सन् 1691 में उन्हें 'चरों के पृथक्करणीय विधि' के अन्वेषण का मार्ग-दर्शन कराया। एक वर्ष पश्चात् उन्होंने 'प्रथम कोटि के समघातीय समीकरणों के हल करने की विधि' का सूत्रीकरण किया। वे आगे बढ़े और अल्प समय में उन्होंने 'प्रथम कोटि के रैखिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधि' का अन्वेषण किया। कितना आश्चर्यजनक है कि उपर्युक्त सभी विधियों की खोज अकेले एक व्यक्ति द्वारा अवकल समीकरणों के जन्म के पच्चीस वर्षों के अल्पावधि के अंतर्गत संपन्न हुई।

प्रारंभ में अवकल समीकरणों के 'हल' करने की प्रविधि को अवकल समीकरणों के 'समाकलन' के रूप में निर्दिष्ट किया गया था। यह शब्द सन् 1690 में प्रथमत: जेम्स बरनौली (James Bernoulli, 1654 – 1705) द्वारा प्रचलन में लाया गया। शब्द 'हल (Solution)' का सर्वप्रथम प्रयोग जोसेफ लुईस लैगरेंज [Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)] द्वारा सन् 1774 में किया गया। यह घटना अवकल समीकरणों के जन्म से लगभग 100 वर्षों बाद घटित हुई। ये जुल्स हेनरी प्वाइनकारे महोदय [Jules Henri Poincare (1854 – 1912)] थे, जिन्होंने शब्द 'हल' के प्रयोग के लिए अकाट्य तर्क प्रस्तुत किया, फलत: आधुनिक शब्दावली में शब्द 'solution' (हल) को अपना उचित स्थान प्राप्त हुआ। 'चरों के पृथक्करणीय विधि' का नामकरण जॉन बरनौली (1667 – 1748), जेम्स बरनौली के अनुज द्वारा किया गया।

ज्यामितीय समस्याओं में इनके अनुप्रयोग पर भी विचार किया गया। ये जॉन बरनौली थे, जिन्होंने सर्वप्रथम अवकल समीकरणों के जटिल रूप को प्रकाश में लाए। दिनांक 20 मई, 1716 को लैबनीज को संबोधित एक पत्र में उन्होंने प्रदर्शित किया कि अवकल समीकरण

$$x^2 y'' = 2y$$

के हल तीन प्रकार की वक्रों नामत: परवलय, अतिपरवलय और घनीय वक्रों के एक समूह का मार्ग-दर्शन कराते हैं। यह दर्शाता है कि ऐसे सरल दिखाई पड़ने वाले अवकल समीकरणों के हल कैसे नाना रूप धारण करते हैं। 20 वीं शताब्दी के उतरार्ध में 'अवकल समीकरणों के गुणात्मक विश्लेषण' शीर्षक के अंतर्गत अवकल समीकरणों के हलों की जटिल प्रकृति के आविष्कार हेतु ध्यान आकर्षित किया गया। आजकल इसने लगभग सभी आविष्कारों हेतु अत्यंत आवश्यक प्रविधि के रूप में प्रमुख स्थान प्राप्त कर लिया है।

प्रारंभिक स्थिति विज्ञान (ELEMENTARY STATICS) 15

15.1 भूमिका (Introduction)

इस पुस्तक के 1 से 14 तक के अध्यायों में हमनें बीजगणित, कलन (कैलकुलस), सदिश, ज्यामिति, अवकल समीकरणों आदि विषयों का अध्ययन किया है। यह अध्याय और अगला अध्याय आपको यंत्र विज्ञान (यांत्रिकी) की दो शाखाओं अर्थात् स्थिति विज्ञान और गति विज्ञान के प्रारंभिक ज्ञान देने के उद्देश्य से लिखे गए हैं। हमारे मन में दो प्रश्नों का उठना स्वाभाविक है :

(i) *स्थिति विज्ञान* और *गति विज्ञान* क्या हैं? और

(ii) हम *यंत्र विज्ञान* का अध्ययन क्यों करते हैं?

बलों और उनके पारस्परिक प्रतिक्रियाओं के एक पिंड (पिंडों) पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन करने वाले विज्ञान को *यंत्र विज्ञान* कहते हैं। *स्थिति विज्ञान*, यंत्र विज्ञान की वह शाखा है, जिनके अंतर्गत हम उस अवस्था पर विचार करते हैं, जिसमें कार्यरत बलों के प्रभाव में पिंड / पिंड समूह स्थिर दशा में रहते हैं। यंत्र विज्ञान की वह शाखा जिसके अंतर्गत गतिमान पिंडों पर कार्यरत बलों के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है, *गति विज्ञान* कहलाता है।

हमारे द्वारा यंत्र विज्ञान के अध्ययन करने के कम से कम तीन कारण हैं। प्रथम, यह कि हम यंत्रों के युग में रह रहे हैं जिनकी (यंत्रों की) रूपरेखा यंत्र विज्ञान के ज्ञान के बिना नहीं की जा सकती है। वास्तव में अभियांत्रिकी के पाठ्यक्रम में यह सबसे अधिक मौलिक विषय है। द्वितीय कारण यह है कि यंत्र विज्ञान भौतिक शास्त्र का आधार है, जिसका अध्ययन प्रकृति की प्रक्रियाओं को समझने में सहायक होता है। तृतीय, यह कि यंत्र विज्ञान के आधारभूत तर्क और इसमें प्रयुक्त विधियों, दोनों में ही, गणितज्ञ रुचि लेते हैं। यंत्र विज्ञान का प्रत्येक विद्यार्थी दो प्रकार से चिंतन करना सीख जाता है – भौतिक विधि से और गणितीय विधि से। अभियंता और भौतिक–विज्ञानी, भौतिक विधि (परीक्षण, आरेख या मॉडल द्वारा) से चिंतन करते हैं, पर जब एक प्रमेय या परिणाम सिद्ध करना होता है तो वे अवचेतन रूप से गणितीय विधि (समीकरणों और सूत्रों आदि के पदों में) से चिंतन करने लगते हैं। दूसरी ओर, एक गणितज्ञ प्रारंभ में गणितीय विधि से चिंतन करता है, किंतु जब किसी को अपने विचारों का आरेखों द्वारा संपूरण करना होता है तब चिंतन भौतिक विधि में परिवर्तित हो जाता है।

इस अध्याय के अनुच्छेद 15.2 में, हम पहले स्थिति विज्ञान के मौलिक अवधारणाओं पर विचार करेंगे। अनुच्छेद 15.3 में बल और बलों के निकाय, बल-संयोजन एवं बल-वियोजन पर विचार किया गया है। अगला अनुच्छेद अर्थात् अनुच्छेद 15.4 एक कण पर लगे तीन बलों के संतुलन के अध्ययन हेतु समर्पित है। इस अनुच्छेद में हमने, विशेष रूप से, बल त्रिभुज का नियम और उसके विलोम तथा लामी का प्रमेय और उसके विलोम का कथन दिया है और उनको सिद्ध किया है। समांतर बल, किसी बिंदु के परितः और किसी रेखा के परितः एक बल के आघूर्ण साथ ही साथ एक बल-युग्म और उसके आघूर्ण की परिचर्चा अनुच्छेद 15.5 में की गई है। अंत में यंत्र विज्ञान के विकास से संबंधित ऐतिहासिक टिप्पणी प्रस्तुत की गई है। अवधारणाओं और उनके अनुप्रयोगों को स्पष्ट करने के लिए सरल किए हुए उदाहरण दिए गए हैं। लगभग सभी अनुच्छेदों में, आपके द्वारा अर्जित ज्ञान के अभ्यास के किए कुछ प्रश्न (प्रश्नावली) दिए गए हैं।

15.2 मौलिक अवधारणाएँ (Basic Concepts)

किसी विषय के अध्ययन में, कुछ ऐसे पद (शब्द) होते हैं, जिनका प्रयोग बार-बार होता है, जैसे बिंदु, रेखा, अक्ष आदि पद ज्यामिति के अध्ययन में बारंबार आते रहते हैं। इन तकनीकी शब्दों के अतिरिक्त कुछ ऐसे शब्द (पद) भी प्रयोग में आते रहते हैं, जिनका अर्थ हमें ज्ञात होना चाहिए। जब हम किसी नवीन विषय या उसकी शाखा का अध्ययन प्रारंभ करते हैं, तो यह अपेक्षित नहीं है कि हम इन तकनीकी शब्दों के अर्थ जानते हों। इन शब्दों को औपचारिक रूप से प्रस्तुत किया जाता है, वास्तव में हम इनकी परिभाषा देते हैं। सामान्यतः प्रयास होता है कि नवीन बातों की व्याख्या उन बातों के पदों में की जाए जिनसे हम पूर्व परिचित हैं।

नीचे हम स्थिति विज्ञान की मौलिक अवधारणाओं के कुछ उपादानों का विवरण दे रहे हैं।

15.2.1 ***कण, पिंड और दृढ़ पिंड (Particles, bodies and rigid bodies)*** द्रव्य के इतने छोटे टुकड़े को, जिसमें कोई आकार नहीं होता है, अपितु एक निश्चित स्थिति होती है, *कण* कहते हैं। एक पिंड द्रव्य का वह अंश है जो आकाश (समष्टि) के एक परिबद्ध क्षेत्र को घेरता है। अतः एक कण एक इतना सूक्ष्म पिंड है, जिसके आकार की, तर्क के उद्देश्य से, उपेक्षा की जा सकती है। दूसरे शब्दों में, एक कण अत्यंत सूक्ष्म आकार वाला पिंड होता है और एक पिंड असंख्य कणों से मिलकर बनता है। एक पिंड को *दृढ़ पिंड* कहते हैं, यदि उसके किन्हीं भी दो कणों के बीच की दूरी सदैव अचर रहती है अर्थात्, जिसके भागों (अंशों) की स्थितियाँ, एक दूसरे के सापेक्ष सदैव, अपरिवर्ती रहती है।

15.2.2. ***द्रव्यमान और घनत्व (Mass and density)*** जिस प्रकार व्यापार (लेन-देन) में हम वस्तु का मूल्य निर्धारित कर देते हैं, उसी प्रकार हम द्रव्य के प्रत्येक टुकड़े (खंड) के प्रति एक संख्या निर्धारित कर सकते हैं। इस प्रकार, वास्तव में हम निश्चित (स्थिर) द्रव्यमान (मात्रा) के नियम को स्वीकार करते हैं, अर्थात् प्रत्येक कण के संगत एक अद्वितीय वास्तविक संख्या होती है, जिसे कण का *द्रव्यमान* कहते हैं, और कण का यह द्रव्यमान सदैव स्थिर (अपरिवर्ती) रहता है।

एक पिंड का द्रव्यमान, उसमें समाहित (अंतर्विष्ट) कणों के द्रव्यमान के योगफल के तुल्य होता है।

मापन के मीटरी पद्धति में, द्रव्यमान की इकाई एक ग्राम कहलाती है और यह (एक ग्राम) 4° सेंटीग्रेड के तापमान पर एक घन सेंटीमीटर आसुत पानी के द्रव्यमान के समतुल्य होता है। किसी वस्तु का घनत्व उसके प्रति इकाई आयतन के द्रव्यमान को कहते हैं। अत: यदि किसी पिंड का आयतन तथा द्रव्यमान क्रमश: V तथा m से निरूपित हो, तो $m = V\rho$, जहाँ ρ पिंड के पदार्थ का घनत्व है।

15.2.3 *विरामावस्था (विश्रामावस्था) (Rest)* किसी पिंड की विरामावस्था और गतिक अवस्था सापेक्ष पद हैं। एक गतिमान ट्रेन में बैठे एक व्यक्ति के सापेक्ष, बगल में बैठा उसका एक सहयात्री विरामावस्था में है, जबकि धरती पर खड़े एक व्यक्ति के सापेक्ष वही यात्री, ट्रेन सहित, गतिक अवस्था में है। इसी प्रकार, हमारे यह कहने का, कि सड़क के एक चौराहे पर, एक कार विरामावस्था में आ गई है, अर्थ है कि विरामावस्था में आने के पश्चात् पृथ्वी के धरातल पर उसके चारों ओर स्थित वस्तुओं के सापेक्ष वह कार एक ही स्थिति में रहती है। तथापि, यह कार सौर-मंडल के सापेक्ष एक ही स्थिति में नहीं रहती है।

एक कण *विरामावस्था* में कहलाता है, यदि वह अपने चारों ओर के वस्तुओं के सापेक्ष अपनी स्थिति बदलता नहीं है और एक पिंड विरामावस्था में कहलाता है यदि उसमें अंतर्विष्ट प्रत्येक कण विरामावस्था में हैं।

15.3 बल (Force)

एक ऐसे कर्ता / ऐसे कारण को जो किसी कण / पिंड के विरामावस्था अथवा गतिक अवस्था में परिवर्तन उत्पन्न करे या परिवर्तन उत्पन्न करने की चेष्टा / प्रयास करे, *बल* कहते हैं।

वह बल, जिससे पृथ्वी किसी पिंड को अपने केंद्र की ओर आकर्षित करती है, पिंड का *भार* कहलाता है। बल एक मौलिक अवधारणा है। एक बल का विचार करने के लिए, हमें एक ऐसे पिंड युग्म पर विचार करना होगा, जिनमें से प्रत्येक, परस्पर प्रतिक्रिया करते हुए, दूसरे के विरामावस्था या गतिक अवस्था में परिवर्तन उत्पन्न करता है अथवा परिवर्तन उत्पन्न करने की चेष्टा करता है।

आइए, हम पतंग उड़ाने की समस्या पर विचार करें। जब हम तेज (झोंकेदार) हवा में उड़ती हुई एक पतंग की डोर पकड़े रहते हैं, तब हमें इस डोर में हाथ से अलग होने वाले स्थान (बिंदु) पर एक खिंचाव या 'तनाव' का बोध होता है और हमें अनुभूति होती है कि यह 'बल' एक ऐसी वस्तु है जिसका मापन किया जा सकता है तथा यह कि भिन्न-भिन्न समय पर इसका मान परिवर्तित होता रहता है।

पुन: पतंग के साथ-साथ इस डोर के इधर-उधर हिलने के कारण यह बल किसी समय पर एक दिशा में तो किसी अन्य समय पर दूसरी दिशा में कार्य करता है। इससे यह स्पष्ट होता है कि एक बल में परिमाण होता है और यह एक सुनिश्चित रेखा में कार्य करता है (इस दशा में डोर की दिशा)। पुन:, यह माना जा सकता है कि यह बल एक निश्चित बिंदु पर क्रियारत है (वह बिंदु जहाँ डोर हाथ से अलग होती है)।

अत: एक विशिष्ट पिंड पर कार्यरत बल की मात्रा को '*बल का परिमाण*' कहते हैं। पिंड के उस बिंदु को, जिस पर बल कार्य करता है, '*बल का क्रिया बिंदु*' कहते हैं। अंतत: बल की क्रिया रेखा द्वारा '*बल की दिशा*' प्राप्त होती है। अत: एक बल पूर्णतया निर्धारित हो जाता है, यदि हमें उसका (i) परिमाण, (ii) दिशा

और (iii) क्रिया बिंदु ज्ञात है। अत: बल एक सदिश राशि है क्योंकि बल की एक क्रिया रेखा तथा एक क्रिया बिंदु भी होते हैं, इसलिए बल एक '*स्थानिक सदिश*' होता है।

15.3.1 *बलों के प्रकार* (*Type of forces*)

(अ) क्रिया और प्रतिक्रिया जब दो पिंड, मान लीजिए कि A और B, एक दूसरे को स्पर्श करते हैं, तो उनमें से प्रत्येक, स्पर्श क्षेत्र के आर-पार, एक दूसरे पर एक बल प्रयोग करते हैं। यदि पिंड A द्वारा पिंड B पर लगाए गए बल को *क्रिया* कहा जाए तो पिंड B द्वारा पिंड A पर लगाए गए बल को *प्रतिक्रिया* कहते हैं। न्यूटन के क्रिया-प्रतिक्रिया नियम के अनुसार, बलों का यह जोड़ा परिमाण में बराबर किंतु दिशा में विपरीत होते हैं।

(ब) तनाव और प्रणोद यदि एक बल एक डोर या एक स्प्रिंग (कमानी) के माध्यम द्वारा क्रिया करता है, तो बल को *खिंचाव* या *तनाव* कहते हैं और यदि बल एक छड़ के माध्यम द्वारा क्रिया करता है तो उसे *प्रणोद* या *धक्का* कहते हैं।

(स) आकर्षण और विकर्षण यदि दो पिंड, बिना स्पर्श किए या बिना किसी दृष्टिगोचर / स्पर्शनीय माध्यम के, एक दूसरे पर बल प्रयोग करते हैं, तो इस प्रकार के बलों को *आकर्षण* या *विकर्षण* कहतें हैं। यदि पिंडों की प्रवृत्ति एक दूसरे के समीप आने की हो, तो दोनों पिंड परस्पर आकर्षित होते हैं और यदि उनकी प्रवृत्ति एक दूसरे से दूर जाने की हो, तो वे परस्पर प्रतिकर्षित या विकर्षित होते हैं। गुरुत्वीय (गुरुत्वाकर्षण) बल या एक चुंबक द्वारा लौह-कणों पर प्रयुक्त बल आकर्षण बल के उदाहरण हैं। किसी चुंबक के उत्तर-ध्रुव द्वारा दूसरे चुंबक के उत्तर-ध्रुव पर या दक्षिण-ध्रुव द्वारा दक्षिणी ध्रुव पर प्रयुक्त बल प्रतिकर्षण बल होते हैं।

इस अध्याय में हम बल की इकाई को न्यूटन के रूप में प्रयोग करेंगे जो अंतर्राष्ट्रीय मानक (S.I. Unit) है और जिसे प्रतीक N से निरूपित किया जाता है।

15.3.2 *बलों का निकाय* (*System of forces*) किसी भौतिक स्थिति में इस बात की संभावना बहुत कम है, कि हमें केवल एक बल का सामना करना पड़े। बहुधा एक से अधिक बल पिंड पर कार्यरत होते हैं।

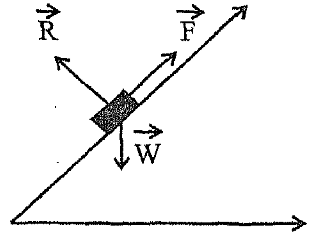
उदाहरणार्थ, मान लीजिए कि एक पिंड किसी चिकने नत समतल पर रखा है और इस पर एक बल $\vec{F}$ कार्य कर रहा है। पिंड पर कार्यरत बल

(i) पिंड का भार, $\vec{W}$

(ii) समतल की पिंड पर प्रतिक्रिया $\vec{R}$ और

(iii) लगाया गया बल, $\vec{F}$ (आकृति 15.1) है।

अत: एक कण या एक पिंड पर कार्यरत बलों के समुच्चय को *बलों का निकाय* कहते हैं।

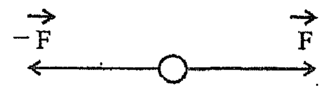


आकृति 15.1

एक बल निकाय *समतलीय* कहलाता है, यदि निकाय के सभी बलों की *क्रिया रेखाएँ* एक ही तल पर स्थित हों; अन्यथा उनको *असमतलीय* कहते हैं।

एक बल निकाय संरेख कहलाता है यदि सभी बलों की क्रिया रेखाएँ सर्वनिष्ठ हों।

यदि एक बल निकाय के सभी बलों की क्रिया रेखाएँ एक दूसरे के समांतर हों, तो उसे *समांतर बल निकाय* कहते हैं। जब दो या अधिक बल एक कण (पिंड) पर कार्य कर रहे हों और कण (पिंड) स्थिर अवस्था में बना रहे, तो कहा जाता है कि बल *संतुलन* में है। उदाहरणार्थ, यदि दो बराबर (समान) और विपरीत बल एक कण पर कार्यरत हों तो कहा जाता है कि बल 'संतुलन' में है (आकृति 15.2)। तथापि एक दृढ़ पिंड पर कार्यरत बराबर और विपरीत बल संतुलन में होंगे यदि और केवल यदि दोनों बलों की क्रिया रेखाएँ समान हों।



आकृति 15.2

अब हम बल निकायों के संयोजन (निष्कासन) के अलग-अलग और सम्मिलित प्रभाव पर विचार करेंगे। हमें ज्ञात है कि यदि एक दृढ़ पिंड के किसी बिंदु पर हम दो बराबर और विपरीत बलों को लगाएँ, तो उनका दृढ़ पिंड के संतुलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। अतः यदि एक पिंड के किसी बिंदु पर दो बराबर और विपरीत बल कार्यरत हों, तो उन्हें हम निकाल (हटा) सकते हैं। व्यापक रूप से, हमें अध्यारोपण नियम ज्ञात है, जिसका कथन है कि 'एक बल-निकाय को जो संतुलन में है, एक दूसरे बल निकाय में जोड़ या उसमें से निकाल सकते हैं, बिना दूसरे बल निकाय की स्थिर अवस्था या गतिक अवस्था को प्रभावित किए हुए।'

15.3.3 ***बलों का परिणामी बल (Resultant of forces)*** यदि दो या दो से अधिक बल $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots,$ किसी पिंड पर लगे हैं और यदि कोई एक अकेला बल $\vec{R}$ इस प्रकार का प्राप्त किया जा सके, जिसका पिंड पर वही प्रभाव हो जो उस पर लगे सभी बलों $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots,$ का है, तो अकेले बल $\vec{R}$ को दिए हुए बलों का *परिणामी बल* कहते हैं और दिए हुए बल $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}, \ldots,$ बल $\vec{R}$ के *घटक* बल कहलाते हैं।

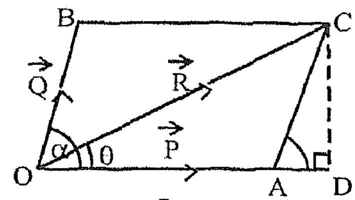
एक पिंड पर समान दिशा में लगे दो बलों पर विचार कीजिए; स्पष्ट है कि उनका परिणामी बल उन दोनों बलों के योग के बराबर होगा और उसकी दिशा दिए हुए दोनों बलों की दिशा के समान होगी, उदाहरणार्थ 5 N और 9 N के, किसी पिंड पर, कार्यरत दो बल, दिए हुए बलों की दिशा में कार्यरत 14 N के एक अकेले बल के समतुल्य होते हैं।

अब एक पिंड पर विपरीत दिशाओं में लगे दो बलों पर विचार कीजिए; उनका परिणामी बल उन दोनों बलों के अंतर के बराबर होगा और उसकी दिशा दिए हुए बलों में से बड़े बल की दिशा के समान होगी, उदारहणार्थ, विपरीत दिशाओं में कार्यरत दो बल जिनके परिमाण क्रमशः 5 N और 9 N हैं, समतुल्य हैं। एक 4 N के अकेले बल के जो दिए हुए 9 N के बल की दिशा के समान दिशा में कार्य करता है।

जब दो बल एक बिंदु पर (एक कण पर या एक दृढ़ पिंड पर) कार्य करते हैं, तो उनका परिणामी बल 'बलों के समांतर चतुर्भुज नियम' द्वारा ज्ञात किया जाता है, जिसका कथन इस प्रकार है : "यदि एक बिंदु पर लगे दो बलों को, परिमाण तथा दिशा में, किसी समातंर चतुर्भुज की उन दो भुजाओं से निरूपित किया जाए, जिन्हें चतुर्भुज के किसी कोणीय बिंदु से खींचा गया हो, तो उनका परिणामी बल परिमाण तथा दिशा में, समांतर चतुर्भुज के उस विकर्ण द्वारा निरूपित होगा, जो उस कोणीय बिंदु से होकर जाता है।"

किसी बिंदु पर दो दिशाओं में कार्यरत दो बलों के परिणामी बल का परिमाण और दिशा ज्ञात करना।

मान लीजिए दो बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ क्रमशः रेखाखंडों OA और OB से निरूपित होते हैं, इस प्रकार कि $\angle AOB = \alpha$ है। चतुर्भुज OACB को पूरा बनाइए (आकृति 15.3)। तब बल चतुर्भुज नियम से, OC, बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ के परिणामी बल को निरूपित करती है। मान लीजिए कि $\vec{OC} = \vec{R}$ और $\angle COA = \theta$ OA (बढ़ी हुई) पर CD लंब खींचिए। तब



आकृति 15.3

$$OD = OA + AD = OA + AC.\cos\angle CAD \text{ (आकृति 15.3 द्वारा)}$$

$$= P + Q\cos\angle BOD = P + Q\cos\alpha$$

इसके अतिरिक्त $\quad DC = AC\sin\angle CAD = Q\sin\alpha$

अतः $\quad R^2 = OC^2 = OD^2 + CD^2 = (P + Q\cos\alpha)^2 + (Q\sin\alpha)^2$

$$= P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$$

अथवा $\quad R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

तथा $\quad \tan\theta = \tan\angle COA = \dfrac{DC}{OD} = \dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

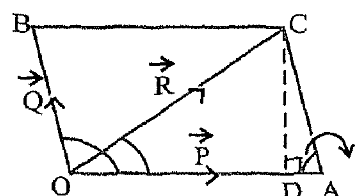
उपर्युक्त दो सूत्रों द्वारा परिणामी बल के परिमाण और दिशा ज्ञात होते हैं।

टिप्पणी यदि $\angle BOA$ एक अधिक कोण हो, तो D की स्थिति O और A के मध्य होगी (आकृति 15.4)।

और $\quad OD = OA - DA = OA - AC\cos\angle DAC$

$$= P - Q\cos(\pi - \alpha) = P + Q\cos\alpha$$

अतः दिए हुए बलों के बीच चाहे न्यून कोण हो या अधिक कोण हो, परिणामी बल के परिमाण और दिशा के लिए प्राप्त व्यंजक समान रहते हैं।



आकृति 15.4

दशा 1 यदि बल परस्पर समकोण बनाते हों, तो

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \text{अतएव } R = \sqrt{P^2 + Q^2} \text{ और } \tan\theta = \frac{Q}{P}$$

दशा 2 यदि बलों के परिमाण समान हों और दोनों $\vec{p}$ के बराबर हों, तो

$$R = \sqrt{P^2(1+1+2\cos\alpha)} = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$$

और $$\tan\theta = \frac{P\sin\alpha}{P + P\cos\alpha} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

अत: परिमाण में समान दो बलों का परिमाणी बल दोनों बलों के बीच के कोण को समद्विभाजित करता है।

उदाहरण 1 8 N और 6 N के दो बल एक बिंदु पर लगे हैं और उनके बीच का परस्पर झुकाव 60° है। उनके परिणामी बल का परिमाण और दिशा ज्ञात कीजिए।

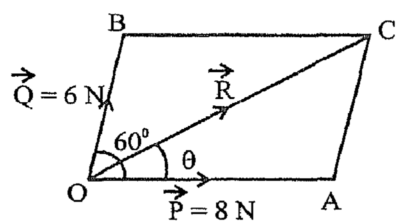
हल मान लीजिए कि परिणामी बल का परिमाण R हो और दो बलों में से एक से (मान लीजिए कि 8 N वाले बल से) कोण θ बनाता है (आकृति 15.5)।

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} \qquad (\text{दिया है } P = 8, Q = 6, \alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3})$$

$$= \sqrt{8^2 + 6^2 + 2(8)(6)\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{64 + 36 + 2(8)(6)\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{148} = 2(\sqrt{37})\text{ N}$$



आकृति 15.5

और $$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

$$= \frac{6\sin(\pi/3)}{8 + 6\cos\pi/3} = \frac{6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{8 + 6\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{11}$$

अर्थात् $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right)$

अत: परिणामी बल का परिमाण $2\sqrt{37}$ N है और यह 8 N वाले बल से $\tan^{-1}\left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right)$ कोण पर झुका है।

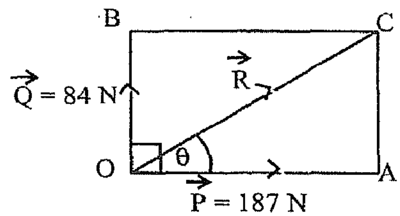
उदाहरण 2 187 N और 84 N के दो बल एक दूसरे पर लंबवत् कार्यरत हैं। इनका परिणामी बल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि परिणामी बल का परिमाण R हो और यह 187 N वाले बल से कोण θ बनाता है (आकृति 15.6)। तब

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{84^2 + 187^2} = 205\text{N} \text{ (यहाँ } P = 187, Q = 84)$$

और $$\tan\theta = \frac{Q}{P} = \frac{84}{187}, \text{ i.e., } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{84}{187}\right)$$

अत: परिणामी बल का परिमाण 205 N और यह 187 N वाले बल से $\tan^{-1}\left(\frac{84}{187}\right)$ का कोण बनाता है।



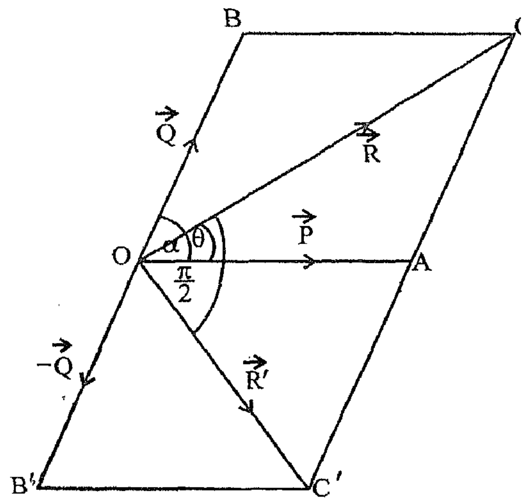
आकृति 15.6

उदाहरण 3 एक बिंदु पर लगे दो बल ऐसे हैं कि यदि उनमें से एक की दिशा विपरीत कर दी जाए, तो परिणामी बल एक समकोण घूम जाता है। दर्शाइए कि दिए हुए दोनों बल परिमाण में बराबर हैं।

हल मान लीजिए दो बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ एक बिंदु O पर OA और OB दिशाओं में कार्यरत हैं तथा एक दूसरे से कोण α बनाते हैं। मान लीजिए कि उनके परिणामी बल $\vec{R}$ का बल $\vec{P}$ की दिशा से झुकाव θ है (आकृति 15.7)। तब

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \qquad (1)$$

जब दोनों में से एक बल मान लीजिए कि बल $\vec{Q}$ की दिशा विपरीत कर दी जाती है, तो प्रश्नानुसार



आकृति 15.7

$$\tan\ (\pi/2-\theta)=\frac{Q\sin(\pi-\alpha)}{P+Q\cos(\pi-\alpha)}$$

अतः $$\cot\theta=\frac{Q\sin\alpha}{P-Q\cos\alpha} \qquad (2)$$

फल (1) और (2) से, हमें ज्ञात होता है कि

$$\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}=\frac{P-Q\cos\alpha}{Q\sin\alpha},$$

अथवा $$Q^2\sin^2\alpha=P^2-Q^2\cos^2\alpha$$

अथवा $$Q^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=P^2$$

अथवा $$Q^2=P^2$$

अथवा $$|Q|=|P|$$

अतः अभीष्ट फल प्राप्त हुआ।

आप अब निम्नलिखित प्रश्नों को सरल करने का प्रयास करें।

प्रश्नावली 15.1

1. एक दूसरे से $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ के कोण पर झुके हुए 10 N और 15 N के दो बलों का परिणामी बल ज्ञात कीजिए।
2. क्रमशः 12 N और 8 N के दो बलों का महत्तम तथा न्यूनतम परिणामी बलों को ज्ञात कीजिए।
3. लंबवत् कार्यरत क्रमशः 5 N और 12 N के दो बलों का परिणामी बल ज्ञात कीजिए।
4. कोण θ पर कार्यरत दो बलों $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $(2m+1)\sqrt{P^2+Q^2}$ के बराबर है और जब वे $(\pi/2-\theta)$ कोण पर कार्य करते हैं तब परिणामी बल $(2m-1)\sqrt{P^2+Q^2}$ के तुल्य होता है। दर्शाइए कि $\tan\theta=(m-1)/(m+1)$
5. एक बिंदु पर कार्यरत दो बलों $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $\vec{R_1}$ है। यदि उनमें से एक की दिशा विपरीत कर दी जाए, तो परिणामी बल $\vec{R_2}$ हो जाता है। दर्शाइए कि
$$R_1^2+R_2^2=2(P^2+Q^2)$$

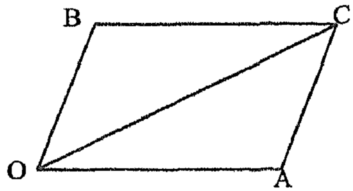
6. एक दूसरे से कोण α पर झुके हुए दो बलों का परिणामी बल उन दोनों के कोण β पर झुके होने पर प्राप्त परिणामी बल का दो गुना है। सिद्ध कीजिए कि

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)$$

7. एक बिंदु पर कार्यरत दो बलों $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल परिमाण में $\sqrt{3}\vec{Q}$ है और यह $\vec{P}$ की दिशा से 30° का कोण बनाता है। सिद्ध कीजिए कि या तो P तुल्य है Q के या उसके दुगुने के तुल्य है।

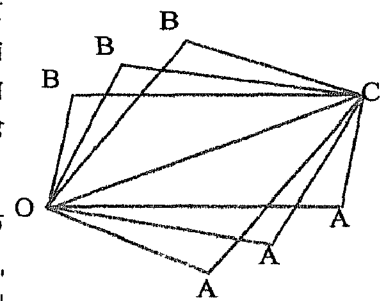
15.3.4 ***एक बल के घटक तथा वियोजित भाग (Components and resolved parts of a force)***

हमें ज्ञात है कि दी गई संगत भुजाओं OA और OB से केवल एक समांतर चतुर्भुज की रचना की जा सकती है और इस चतुर्भुज का विकर्ण OC अद्‌वितीय रूप से निर्धारित होगा (आकृति 15.8)।



आकृति 15.8

हमें यह भी ज्ञात है कि OC विकर्ण वाले असंख्य समांतर चतुर्भुजों की रचना की जा सकती है और इनमें से प्रत्येक समांतर चतुर्भुज की दो संगत भुजाओं द्‌वारा घटकों का एक जोड़ा प्राप्त होगा। अत: एक बल को दो घटकों में असंख्या तरीकों (प्रकार से) से वियोजित किया जा सकता है (आकृति 15.9)।



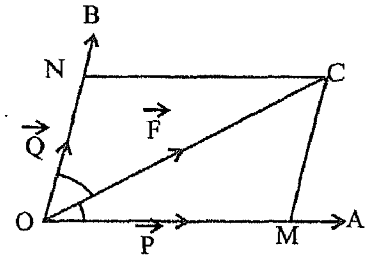
आकृति 15.9

यदि हमें एक बल दिया हो और हम दी हुई दिशाओं में उस बल के घटकों को ज्ञात करें जिनका प्रभाव दिए गए बल के प्रभाव के तुल्य हो, तो इस प्रक्रिया को बल का वियोजन या संक्षेप में बल-वियोजन कहते हैं।

हम अब दो दी गई दिशाओं के अनुदिश एक दिए हुए बल के घटकों को ज्ञात करेंगे।

मान लीजिए कि OC एक दिए हुए बल $\vec{F}$ को निरूपित करती है। मान लीजिए कि OA और OB दो निर्धारित दिशाएँ जो दिए हुए बल से क्रमशः α और β कोण बनाती हैं। C से, OA के समांतर एक रेखा खींचिए, जो OB से N पर मिलती है। पुन: C से, OB के समांतर एक रेखा तथा खींचिए, जो OA से M पर मिलती है। इस प्रकार OM तथा ON दिए हुए बल $\vec{F}$ के अभीष्ट घटक हैं। मान लीजिए हम इन घटकों को क्रमशः $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ से प्रकट करते हैं (आकृति 15.10)।

अब MC, जो कि ON के बराबर और समांतर है, बल Q को निरूपित करती है।



आकृति 15.10

हमें ज्ञात है कि

$$\angle COM = \alpha, \angle CON = \beta$$

अतः $\angle OMC = 180° - \angle NOM = 180° - (\alpha + \beta)$

क्योंकि, त्रिभुज OMC की भुजाएँ क्रमशः सम्मुख कोणों के sine के समानुपाती हैं, अतः

$$\frac{OM}{\sin\angle OCM} = \frac{MC}{\sin\angle MOC} = \frac{OC}{\sin\angle OMC},$$

अथवा $\dfrac{P}{\sin\beta} = \dfrac{Q}{\sin\alpha} = \dfrac{F}{\sin(\pi - (\alpha+\beta))}$

अथवा $P = \dfrac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ और $Q = \dfrac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

ये दिए हुए बल के अभीष्ट घटक हैं और दिए हुए α और β के लिए अद्‌वितीय हैं।

बलों के वियोजन की सबसे महत्त्वपूर्ण दशा वह है जिसमें हम एक बल को उसके दो लंबवत् घटकों में वियोजित करते हैं।

अतः, यदि $\alpha + \beta = 90°$, तो उपर्युक्त सूत्रों से बल $\vec{F}$ के वियोजित भाग निम्न प्रकार होंगे :

$$P = \frac{F\sin(\pi/2-\alpha)}{\sin\pi/2} = F\cos\alpha \quad \text{और} \quad Q = \frac{F\sin\alpha}{\sin\pi/2} = F\sin\alpha$$

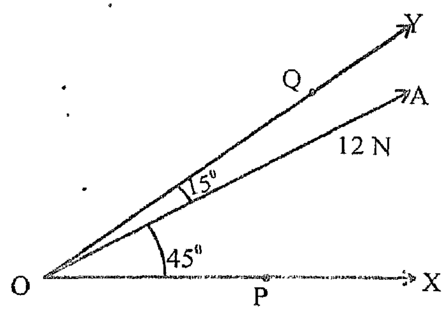
किसी दी गई दिशा में एक दिए हुए बल का वियोजित भाग, दिए हुए बल को बल और और दी हुई दिशा के बीच के कोण के cosine से गुणा करने पर प्राप्त होता है। उदाहरणार्थ एक बल $\vec{F}$ का, $\vec{F}$ से कोण α बनाने वाली दिशा में $F\cos\alpha$ होता है।

उपर्युक्त से यह नोट कीजिए कि किसी बल का उससे समकोण बनाने वाली दिशा में वियोजित भाग शून्य होता है (क्योंकि $\alpha = 90°$, $F\cos(\pi/2) = 0$) अर्थात् लंब दिशा में किसी बल का प्रभाव शून्य होता है। उदाहरण के लिए रेलगाड़ी के उस डिब्बे पर विचार कीजिए जो पटरी पर विरामावस्था में खड़ा है। डिब्बे को, एक ऐसे क्षैतिज बल द्वारा, जो पटरी से लंबवत् दिशा में कार्यरत हो, पटरी के अनुदिश नहीं चलाया जा सकता है, क्योंकि पटरी के अनुदिश बल का वियोजित भाग शून्य है।

उदाहरण 4 12 N परिमाण के एक बल का बल के प्रत्येक ओर क्रमशः 45° और 15° कोण बनाने वाली दिशाओं में घटक ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि 12 N वाले बल की दिशा OA के प्रत्येक ओर 45° और 15° कोण बनाने वाली दिशाएँ क्रमशः OX और OY हैं। मान लीजिए कि OX और OY के अनुदिश बल के घटक क्रमशः P और Q हैं (आकृति 15.11)। एक दिए हुए बल की दो दी गई दिशाओं में घटक ज्ञात करने वाले सूत्र द्वारा

$$P = \frac{F\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad \text{और} \quad Q = \frac{F\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$



आकृति 15.11

इस उदाहरण में, F = 12 N, α = 45° और β = 15°,

इसलिए

$$P = \frac{12\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{12\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\right)\right)}{\sqrt{3}/2} = 12.\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\Big/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\right) \text{ N.}$$

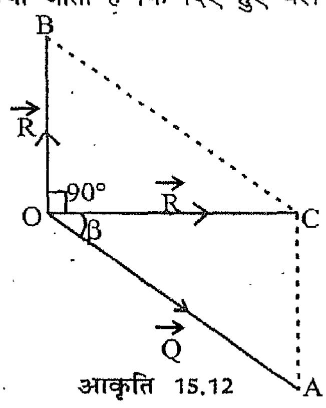
और $$Q = \frac{12\sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{12\left(1/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}/2} = 4\sqrt{6}\text{ N}$$

उदाहरण 5 एक दिए हुए बल $\vec{R}$ को दो घटकों में इस प्रकार वियोजित किया जाता है कि दिए हुए बल के लंबवत् घटक का परिमाण $\vec{R}$ के तुल्य है। दूसरे घटक और उसकी दिशा को ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि दूसरा घटक Q है और यह दिए हुए बल $\vec{R}$ से कोण β पर झुका हुआ है (आकृति 15.12)।

अतः प्रश्नानुसार

$$R = \frac{R\sin\beta}{\sin(\pi/2+\beta)} \text{ [यहाँ } P = R,\ \alpha = 90°]$$



आकृति 15.12

अर्थात् $1 = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$, या $\tan\beta = 1$, अथवा $\beta = 45°$

अतः $Q = \frac{R\sin 90°}{\sin(90° + \beta)} = \frac{R}{\cos\beta} = \frac{R}{\cos 45°} = \frac{R}{1/\sqrt{2}} = R\sqrt{2}$

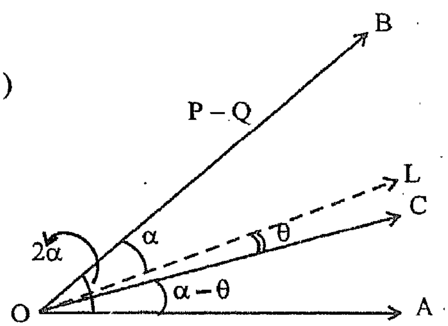
उदाहरण 6 परिमाण P + Q और P − Q के दो बल एक दूसरे से 2α का कोण बनाते हैं और उनका परिणामी बल उनके बीच के कोण के अर्धक से θ कोण बनाता है। सिद्ध कीजिए कि $P\tan\theta = Q\tan\alpha$

हल मान लीजिए कि परिमाण (P + Q) और (P − Q) के बल क्रमशः OA और OB के अनुदिश कार्य करते हैं। मान लीजिए कि उनके परिणामी बल की दिशा OC है। $\angle AOB = 2\alpha$ (दिया है)।

मान लीजिए कि ∠AOB, का अर्धक OL है, तब $\angle LOC = \theta$, $\angle BOC = \alpha + \theta$ और $\angle COA = \alpha - \theta$ (आकृति 15.13)।

यदि दिए हुए बलों के परिणामी बल का परिमाण F है तो

$$P + Q = \frac{F\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha+\theta+\alpha-\theta)} = \frac{F\sin(\alpha+\theta)}{\sin 2\alpha} \qquad (1)$$



आकृति 15.13

और
$$P - Q = \frac{F\sin(\alpha-\theta)}{\sin 2\alpha} \qquad (2)$$

(1) और (2) द्वारा

$$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)},$$

या $P\sin(\alpha-\theta) + Q\sin(\alpha-\theta) = P\sin(\alpha+\theta) - Q\sin(\alpha+\theta)$

या $P[-\sin(\alpha-\theta) + \sin(\alpha+\theta)] = Q[\sin(\alpha-\theta) + \sin(\alpha+\theta)]$

या $P[-\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta]$

$$= Q[\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta]$$

या $2\cos\alpha\sin\theta\, P = 2\sin\alpha\cos\theta\, Q$

या $P\tan\theta = Q\tan\alpha$, ($\cos\alpha, \cos\theta \neq 0$, क्योंकि $\alpha > 0, \theta < \pi/2$)

अतः अभीष्ट फल प्राप्त हुआ।

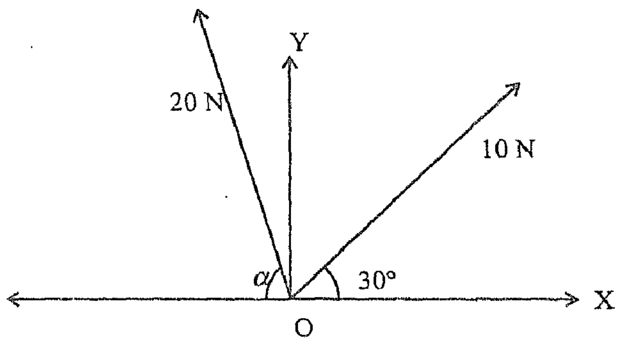
प्रश्नावली 15.2

1. 10 N परिमाण का एक बल क्षैतिज से $30°$ के कोण पर झुका है। इस बल के क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर दिशाओं में वियोजित भाग ज्ञात कीजिए।

2. 50 N के एक बल को उसके प्रत्येक ओर क्रमश: $60°$ और $45°$ के कोणों की दिशाओं में वियोजित कीजिए।

3. एक 25 N के बल का एक दो गई दिशा में वियोजित भाग का परिमाण 20 N है। दूसरे वियोजित भाग को ज्ञात कीजिए और दोनों वियोजित भागों का परिणामी बल से झुकाव ज्ञात कीजिए।

4. आकृति 15.14 में प्रदर्शित बिंदु O पर कार्यरत 10 N और 20 N के दो बलों का परिणामी बल OY के अनुदिश है। कोण α ज्ञात कीजिए।



आकृति 15.14

5. एक बल मूल बिंदु पर कार्य करता है और x-अक्ष और y-अक्ष के अनुदिश इसके वियोजित भाग समान (बराबर) हैं। बल की दिशा क्या है?

6. 20 N के एक ऊर्ध्वाधर ऊपर की ओर बलों में इस प्रकार वियोजित किया जाता है कि इनमें से एक बल क्षैतिज है और उसका मान 10 N है; दूसरे बल की दिशा और परिमाण क्या है?

7. दो बलों $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $\vec{R}$ है। $\vec{R}$ का $\vec{P}$ की दिशा में वियोजित भाग $\vec{Q}$ है। यदि बलों के बीच का कोण α हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{P/(2Q)}$

8. एक कण पर कार्यरत दो बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ एक दूसरे से θ कोण पर झुके हैं। यदि किसी दिशा में उनके वियोजित भागों का योग X और इसके लंबवत् दिशा में योग Y हो, तो दर्शाइए कि

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{X^2 + Y^2 - P^2 - Q^2}{2PQ}\right)$$

15.4 कण का संतुलन (कण की साम्यावस्था) (Equilibrium of a Particle)

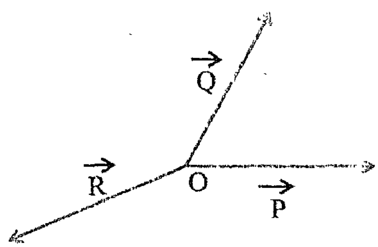
यदि एक कण पर अनेक (बहुत से) बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \ldots$, कार्यरत हों, तो कण पर बलों के संतुलन के लिए अनिवार्य और पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि कण पर कार्य करने वाला परिणामी बल $\vec{F}$ शून्य हो, अर्थात्

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \ldots = \vec{0}$$

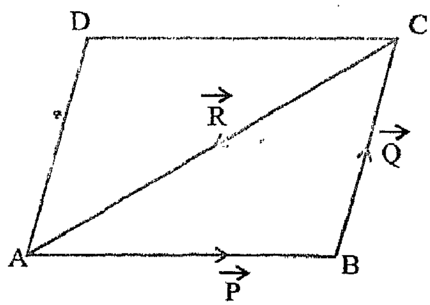
अब हम तीन बलों के प्रभाव में एक कण के संतुलन पर विचार करेंगे और इस प्रयोजन के लिए हम निम्नलिखित फलों को सिद्ध करेंगे :

15.4.1 ***बल त्रिभुज नियम (Triangle law of forces)*** यदि एक बिंदु पर लगे तीन बल, चक्रीय क्रम में ली गई किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा, परिमाण और दिशा में निरूपित होते हैं, तो वे बल संतुलन में होंगे।

उपपत्ति हमें बिंदु O पर स्थित एक कण पर कार्यरत तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ दिए हुए हैं और ये बल, परिमाण तथा दिशा में, क्रमशः Δ ABC की भुजाओं AB, BC और CA द्वारा निरूपित होते हैं। हमें सिद्ध करना है कि बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ संतुलन में हैं।



आकृति 15.15



आकृति 15.16

समांतर चतुर्भुज ABCD को पूर्ण कीजिए। क्योंकि AD, BC के बराबर और समांतर है, अतः AD भी बल Q को निरूपित करती है (आकृति 15.15 और 15.16)।

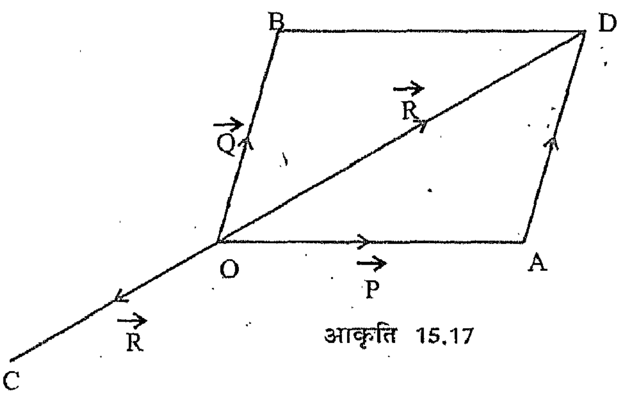
अब बल समांतर चतुर्भुज नियम से, AB के अनुदिश कार्यरत बल $\vec{p}$ और AD के अनुदिश कार्यरत बल $\vec{Q}$ का परिणामी $\overrightarrow{AC}$ द्वारा निरूपित बल है।

अतः, $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ बल क्रमशः $\overrightarrow{AC}$ और $\overrightarrow{CA}$ द्वारा निरूपित दो बलों के तुल्य हैं; किंतु ये बराबर और विपरीत बल हैं, जिनकी क्रिया रेखाएँ समान हैं, अतएव ये संतुलन में हैं। अतः बिंदु O पर कार्यरत तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं।

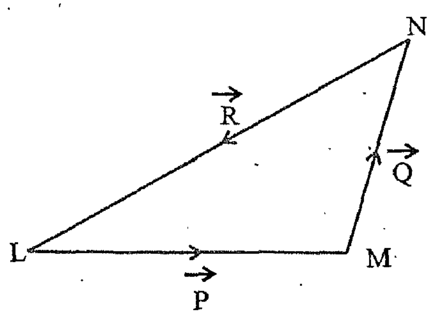
बल त्रिभुज नियम का विलोम यदि तीन बलों के प्रभाव में एक कण संतुलन में हों, तो परिमाण और दिशा में उन बलों का निरूपण, चक्रीय क्रम में ली गई, किसी त्रिभुज की भुजाओं द्वारा किया जा सकता है, जिसकी भुजाएँ क्रमशः बलों की दिशाओं के समांतर हैं।

हमें, बिंदु O पर स्थित एक कण पर कार्यरत तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ क्रमशः $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ और $\overrightarrow{OC}$ द्वारा निरूपित दिए हैं, जो संतुलन में हैं, अर्थात्

$$\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = \vec{0} \qquad (1)$$



आकृति 15.17



आकृति 15.18

समांतर चतुर्भुज OADB को पूर्ण कीजिए (आकृति 15.17)। बल समांतर चतुर्भुज नियम द्वारा $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ द्वारा निरूपित $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ बलों का परिणामी बल $\overrightarrow{R'}$, $\overrightarrow{OD}$ द्वारा निरूपित होता है, अर्थात्

$$\overrightarrow{R'} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{Q} \qquad (2)$$

(1) और (2) से हमें प्राप्त होता है कि

$$\overrightarrow{R} + \overrightarrow{R'} = \overrightarrow{O}$$

अर्थात् बल $\vec{R}$ परिमाण में बल $\overrightarrow{R'}$ के तुल्य है, परंतु विपरीत दिशा में है, अतः बल $\vec{R}$ निश्चय ही $\overrightarrow{DO}$ द्वारा निरूपित होगा।

अत: बिंदु O पर कार्यरत बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ (जो संतुलन में हैं) ΔOAD की चक्रीय क्रम में ली गई भुजाओं OA, AD और DO द्वारा निरूपित होते हैं।

मान लीजिए कि LMN कोई अन्य त्रिभुज है, जिसकी भुजाएँ LM, MN और NL क्रमश: OA, AD और DO के समांतर हैं (आकृति 15.18)। तब

$$\Delta LMN \sim \Delta OAD$$

अत:
$$\frac{LM}{OA} = \frac{MN}{AD} = \frac{NL}{DO}$$

अतएव बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ परिमाण और दिशा में क्रमश: किसी त्रिभुज LMN की, चक्रीय क्रम में ली गई, भुजाओं द्वारा निरूपित होते हैं, जहाँ त्रिभुज LMN की भुजाएँ क्रमश: OA, OB और OC अर्थात् बलों की दिशाओं के समांतर हैं।

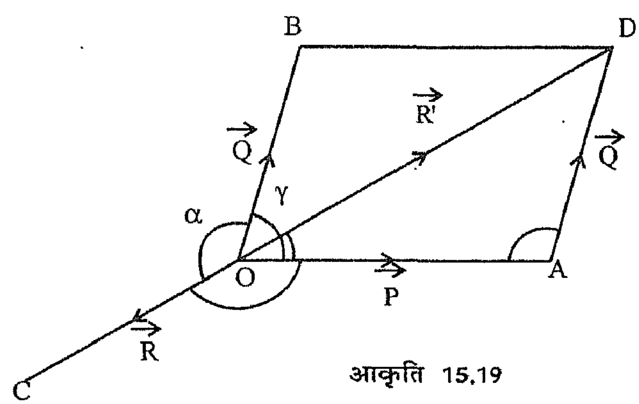
अत: अभीष्ट फल प्राप्त होता है।

टिप्पणी ध्यान दीजिए कि तीन बल जो परिमाण तथा दिशा में, किसी त्रिभुज की, चक्रीय क्रम में ली गई, भुजाओं से निरूपित हैं, तभी संतुलन में होंगे जब वे एक बिंदु पर कार्यरत हों ऐसी दशा में जब ये (बल), वास्तव में, त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश कार्य करते हों (अर्थात् एक बिंदु पर कार्यरत नहीं हैं) तो वे संतुलन नहीं उत्पन्न करेंगे अपितु वे एक ऐसा बल निकाय बनाएंगे जिसे बल युग्म कहते हैं।

अब हम एक बिंदु पर कार्यरत तीन बलों के संतुलन से संबंधित एक अन्य महत्त्वपूर्ण परिणाम (फल) पर विचार करेंगे।

15.4.2 *लामी का प्रमेय* (*Lami's theorem*) यदि एक कण पर लगे तीन बल संतुलन में हों, तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के बीच के कोण के sine के समानुपाती होता है।

उपपत्ति मान लीजिए कि बिंदु O पर कार्यरत तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं। मान लीजिए कि $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ बल, $\overrightarrow{OA}$ और $\overrightarrow{OB}$ द्वारा निरूपित है। समांतर चतुर्भुज OADB को पूरा कीजिए।



आकृति 15.19

क्योंकि $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं, अत:

$\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $\vec{R'}$ बल $\vec{R}$ के बराबर और विपरीत होगा, अर्थात् $\vec{R'}$ बल, परिमाण और दिशा में $\vec{OD}$ द्वारा निरूपित होगा (बल त्रिभुज नियम से)। इसके अतिरिक्त, क्योंकि AD और OB बराबर और समांतर हैं, बल $\vec{Q}$ परिमाण और दिशा में $\vec{AD}$ द्वारा भी निरुपित होता है (आकृति 15.19)।

हमें sine सूत्र द्वारा यह ज्ञात है कि Δ OAD की भुजाएँ क्रमशः सम्मुख कोण के sine के समानुपाती हैं। अतः

$$\frac{OA}{\sin\angle ODA}=\frac{AD}{\sin\angle DOA}=\frac{OD}{\sin\angle OAD}$$

परंतु $\sin\angle ODA=\sin\angle DOB$

$$=\sin(\pi-\angle BOC)=\sin\angle BOC;$$

$$\sin\angle DOA=\sin(\pi-\angle AOC)=\sin\angle AOC$$

और $\sin\angle OAD=\sin(\pi-\angle AOB)=\sin\angle AOB$

अतः $$\frac{OA}{\sin\angle BOC}=\frac{AD}{\sin\angle AOC}=\frac{OD}{\sin\angle AOB}$$

या $$\frac{OA}{\sin\alpha}=\frac{OB}{\sin\beta}=\frac{OD}{\sin\gamma}$$

या $$\frac{P}{\sin(Q,R)}=\frac{Q}{\sin(R,P)}=\frac{R}{\sin(P,Q)}$$, जो कि अभीष्ट था।

यहाँ sin (Q, R) का अर्थ $\vec{Q}$ और $\vec{R}$ बलों के बीच के कोण का sin है।

लामी के प्रमेय का विलोम यदि एक कण पर कार्य कर रहे समतलीय तीन बल इस प्रकार हैं कि प्रत्येक बल शेष दो बलों के बीच के कोण के sine (ज्या) का समानुपाती है, तो वे बल संतुलन में होंगे।

मान लीजिए कि बिंदु O पर स्थित एक कण पर कार्य कर रहे सहसमतलीय तीन बल $\vec{P}$, $\vec{Q}$ और $\vec{R}$ इस प्रकार हैं कि

$$\frac{P}{\sin(Q,R)} = \frac{Q}{\sin(R,P)} = \frac{R}{\sin(P,Q)} \qquad (1)$$

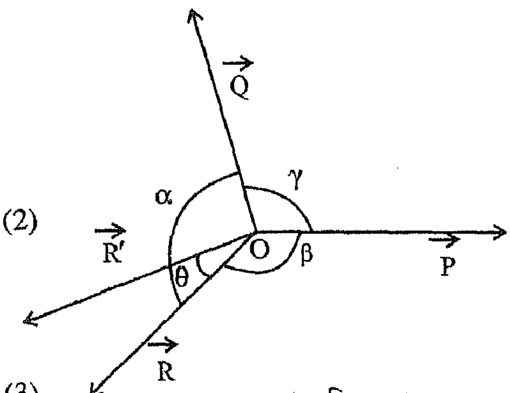
हमें सिद्ध करना है कि $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं।

यदि संभव हो तो मान लीजिए कि $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में नहीं हैं, तब $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $\vec{R}$ को संतुलित नहीं करेगा। मान लीजिए कि बल $\vec{R}$ से θ कोण पर झुका हुआ एक बल $\vec{R}'$ बलों $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ के परिणामी बल को संतुलित करता है (आकृति 15.20)।

मान लीजिए कि $\vec{Q}$ और $\vec{R}$ के बीच α, $\vec{R}$ और $\vec{P}$ के बीच β तथा $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ के बीच γ कोण है।

तब ऊपर सिद्ध किए हुए लामी के प्रमेय द्वारा

$$\frac{P}{\sin(\alpha\ \ \theta)} = \frac{Q}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{R'}{\sin\gamma} \qquad (2)$$



आकृति 15.20

फल (1) द्वारा

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

(2) और (3) द्वारा

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{R}{R'} \qquad (4)$$

फल (4) के प्रथम दो भागों से

$$\sin\alpha\ [\sin\beta\cos\theta + \cos\beta\sin\theta] = \sin\beta\ [\sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta]$$

अर्थात् $\qquad \sin(\alpha+\beta)\sin\theta = 0$

अर्थात् $\qquad \theta = 0$. (चूंकि $\alpha+\beta \neq 0$ या π)

तब (4) द्वारा $\vec{R} = \vec{R'}$, अर्थात् बिंदु O पर कार्यरत बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं।

अब हम एक कण पर लगे बलों के संतुलन पर विचार करेंगे।

बल बहुभुज नियम यदि एक कण पर कार्य कर रहे अनेक बल, परिमाण तथा दिशा में, एक बंद (बद्ध) बहुभुज की क्रमानुसार ली गई भुजाओं से निरूपित होते हैं, तो वे बल संतुलन में होंगे।

उस नियम की उपपत्ति इस पुस्तक के विचार क्षेत्र से परे (बाहर) है।

बल बहुभुज नियम का विलोम सत्य नहीं होता है, एक बहुभुज की भुजाओं का अनुपात ज्ञात नहीं होता, जब उसकी भुजाओं की दिशाएँ ज्ञात होती हैं।

आइए अब हम उपर्युक्त सिद्धांत / नियमों को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 7 एक कण पर कार्य कर रहे तीन बल संतुलन में हैं। यदि पहले और दूसरे बलों के बीच का कोण 120° तथा दूसरे और तीसरे बलों के बीच का कोण 135° हो, तो बलों के परिमाण का अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ हैं, जो क्रमश: OA, OB और OC के अनुदिश कार्य करते हैं। प्रश्नानुसार, $\angle AOB = 120°$, $\angle BOC = 135°$ (आकृति 15.21)।

अत: $\angle COA = 360° - 120° - 135° = 105°$

लामी के प्रमेय द्वारा (P, Q, R साम्यावस्था में हैं)

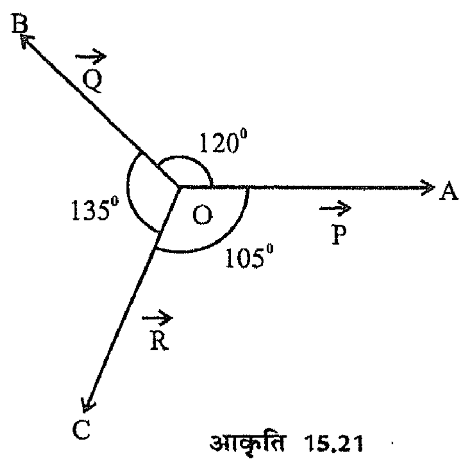
$$\frac{P}{\sin(135°)} = \frac{Q}{\sin(105°)} = \frac{R}{\sin(120°)}$$

अथवा $$\frac{P}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{Q}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

[क्योंकि $\sin(105°) = \sin(60° + 45°)$

$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$]



आकृति 15.21

अतः $\frac{P}{2}=\frac{Q}{\sqrt{3}+1}=\frac{R}{\sqrt{6}}$

अतः $P : Q : R :: 2 : \sqrt{3}+1 : \sqrt{6}$

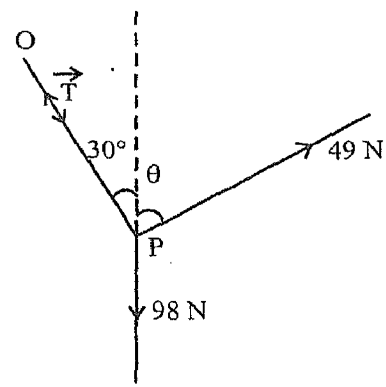
उदाहरण 8 10 किग्रा परिमाण का एक पिंड किसी स्थिर बिंदु से एक डोरी द्वारा लटकाया गया है। इस पिंड पर एक 49 N का बल लगाया जाता है फलस्वरूप भार से बंधी डोरी की ऊर्ध्वाधर स्थिति बदलकर तिरछी (तिर्यक) हो जाती है। इस बल की दिशा क्या होगी यदि साम्यवस्था में डोरी ऊर्ध्वाधर से 30° का कोण बनाती है? डोरी का तनाव भी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि डोरी का तनाव T है और θ व कोण है जो 49 N के बल की दिशा ऊर्ध्वाधर से बनाती है। पिंड P निम्नलिखित तीन बलों के प्रभाव में है (आकृति 15.22) :

(i) 10 किग्रा का बल ऊर्ध्वाधरत: (नीचे की ओर) कार्यरत अर्थात् 98 N

(ii) 49 N का बल ऊर्ध्वाधर से θ कोण के दिशा के अनुदिश

(iii) डोरी का तनाव $\vec{T}$



आकृति 15.22

क्योंकि कण साम्यावस्था में है, अतः लामी के प्रमेय द्वारा

$$\frac{T}{\sin(\pi-\theta)}=\frac{98}{\sin(30°+\theta)}=\frac{49}{\sin(\pi-30°)}$$

या $$\frac{T}{\sin\theta}=\frac{98}{\sin(30°+\theta)}=\frac{49}{\sin 30°}$$

या $$\sin(30°+\theta)=\frac{98\sin 30^0}{49}=1$$

अतः $T = 98\sin\theta$

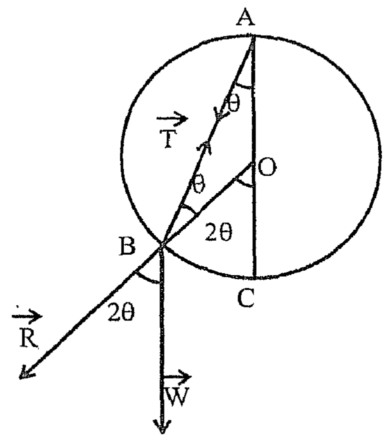
अब $\sin(30°+\theta) = 1 = \sin 90°$

या $30°+\theta = 90°$, अर्थात् $\theta = 60°$

और $T = 98\sin 60° = 98\frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}$ N

अतएव डोरी का तनाव $(49\sqrt{3})$ N है और लगाए गए बल की दिशा *ऊर्ध्वाधर* से 60° का कोण बनाती है।

उदाहरण 9 W भार का एक मनका (दाना) *ऊर्ध्वाधर* तल में स्थित एक चिकने गोल (वृत्ताकार) तार पर फिसल सकता है। मनका तार के उच्चतम बिंदु से एक भारहीन डोरी द्वारा बंधा है और साम्यावस्था में है। डोरी तनी हुई है और *ऊर्ध्वाधर* से θ कोण बनाती है। डोरी का तनाव और तार की मनका पर प्रतिक्रिया ज्ञात कीजिए।



आकृति 15.23

हल मान लीजिए कि B मनका की स्थिति, AB डोरी है तथा AOC वृत्त का ऊर्ध्वाधर व्यास और O वृत्त का केंद्र है। वृत्त के ज्यामितीय गुणों द्वारा

$\angle OAB = \angle OBA = \theta$ और $\angle BOC = 2\theta$ (आकृति 15.23)।

मान लीजिए कि डोरी का तनाव $\vec{T}$ और तार की मनका पर प्रतिक्रिया $\vec{R}$ है। साम्यावस्था में लामी के प्रमेय द्वारा

$$\frac{T}{\sin(R,W)} = \frac{R}{\sin(W,T)} = \frac{W}{\sin(T,R)}$$

$$\frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{R}{\sin(\pi - 2\theta + \theta)} = \frac{W}{\sin(\pi - \theta)}$$

या $$\frac{T}{\sin 2\theta} = \frac{R}{\sin\theta} = \frac{W}{\sin\theta}$$

अत: $$R = W \text{ and } T = W.\frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = 2W\cos\theta$$

प्रश्नावली 15.3

1. एक कण पर कार्य कर रहे तीन बल संतुलन में हैं। यदि बलों के प्रत्येक जोड़े के बीच का कोण समान है, तो सिद्ध कीजिए कि बल परिमाण में बराबर हैं।

2. एक 60 किग्रा का एक द्रव्यमान दो पतली हलकी डोरियों द्वारा जो ऊर्ध्वाधर से क्रमश: 60° और 45° के कोण बनाती हैं, लटका हुआ है। डोरियों के तनाव ज्ञात कीजिए।

3. W किग्रा द्रव्यमान के एक कण से 4 सेमी और 5 सेमी लंबाई की दो डोरियाँ बंधी हैं। डोरियों के दूसरे सिरे एक ही समतल पर स्थित दो बिंदुओं से बंधे हैं जिनके बीच की दूरी 6 सेमी है। डोरियों के तनाव ज्ञात कीजिए।

4. किसी कण पर लगे तीन बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$, संतुलन में हैं और $\vec{P}$ तथा $\vec{Q}$ के बीच का कोण $\vec{P}$ तथा $\vec{R}$ के बीच के कोण का दुगुना है। दर्शाइए कि $P = (Q^2 - R^2)/Q$

5. $\vec{W}$ भार का एक छल्ला, जो एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर स्वतंत्रतापूर्वक फिसल सकता है, एक डोरी द्वारा वृत्त के उच्चतम बिंदु से बंधा हुआ संतुलन में है। यदि डोरी वृत्त के केंद्र पर θ कोण अंतरित करती है, तो डोरी का तनाव और वृत्त की छल्ले पर प्रतिक्रिया ज्ञात कीजिए।

6. $\vec{W}_1$ भार का एक पिंड, एक चिकने नत समतल पर समतल के अनुदिश लगे बल $\vec{P}$ से संभला हुआ है (रुका हुआ है) जबकि बल $\vec{P}$ क्षैतिज दिशा में कार्य करते हुए तल पर भार $\vec{W}_2$ को संभाल सकता है। सिद्ध कीजिए कि $P^2 = W_1^2 - W_2^2$

7. किसी त्रिभुज ABC की क्रमानुसार ली गई भुजाओं के अनुदिश तीन समान बल $\vec{P}$ एक बिंदु पर कार्यरत हैं। सिद्ध कीजिए कि परिणामी बल $\vec{R}$ नीचे दिए संबंध से प्राप्त होता है

$$R^2 = P^2\,(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$$

8. 50 किग्रा द्रव्यमान का एक पिंड, किसी क्षैतिज रेखा में परस्पर 50 सेमी दूर स्थित, दो बिंदुओं से क्रमशः 30 सेमी और 40 सेमी लंबी डोरियों से बंधा हुआ संतुलित अवस्था में, लटक रहा है। प्रत्येक डोरी में तनाव ज्ञात कीजिए।

9. ABC एक त्रिभुज है। HA, HB और HC के अनुदिश लगे बल क्रमशः $\vec{P}, \vec{Q}$ और $\vec{R}$ संतुलन में हैं। यदि H बिंदु ΔABC का लंब केंद्र है, तो सिद्ध कीजिए कि,

$$P : Q : R :: a : b : c$$

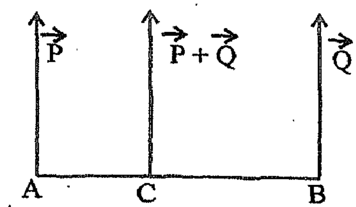
जहाँ a, b और c, ΔABC की भुजाओं के परिमाण हैं।

15.5 समांतर बल (Parallel Forces)

पिछले अनुच्छेदों में, हम एक बिंदु (कण) पर कार्यरत बलों पर विचार करते रहे हैं। अब हम एक पिंड पर लगे बलों पर विचार करेंगे।

ऐसी दशा में जब दो बल किसी पिंड के दो भिन्न-भिन्न बिंदुओं पर लगे हों और यदि उनकी क्रिया रेखाएँ सहसमतलीय हों, किंतु समांतर नहीं हों, तो हम बलों को उनकी क्रिया रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु पर स्थित एक कण पर कार्य करते हुए मान सकते हैं। ऐसी दशा में उनके परिणामी बल को बल समांतर चतुर्भुज नियम द्वारा ज्ञात किया जा सकता है, परंतु ऐसी दशा में जब पिंड पर दो या अधिक समांतर बल लगे हों, तो हम परिणामी बल को बल समांतर चतुर्भुज नियम से नहीं ज्ञात कर सकते हैं, क्योंकि समांतर बलों की क्रिया रेखाएँ किसी बिंदु पर मिलती नहीं है। यहाँ पर, हम विचार करेंगे कि समांतर बलों का परिणामी बल किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है।

15.5.1 *समदिश और विपरीत दिश समांतर बल (Like and unlike parallel forces)* जब दो समांतर बल एक ही दिशा में कार्य करते हों, तो उन्हें समदिश समांतर बल कहते हैं और जब वे विपरीत दिशाओं में कार्यरत हों, तो वे विपरीत दिश समांतर बल कहलाते हैं।



आकृति 15.24

15.5.2 समांतर बलों का परिणामी बल (*Resultant of parallel forces*) किसी दृढ़ पिंड के दो भिन्न-भिन्न बिंदुओं A तथा B पर लगे परिमाण P तथा Q के दो समदिश समांतर बलों का परिणामी बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ बलों की दिशा के समांतर दिशा में कार्य करने वाला एक ऐसा बल है, जिसका परिमाण P + Q है और यह AB के बिंदु C पर कार्य करता है जहाँ P. AC = Q.BC, अर्थात् C रेखाखंड AB का अंतः विभाजन P और Q के व्युत्क्रमानुपात में करता है (आकृति 15.24)।

अब हम उपर्युक्त फल (परिणाम) को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे।

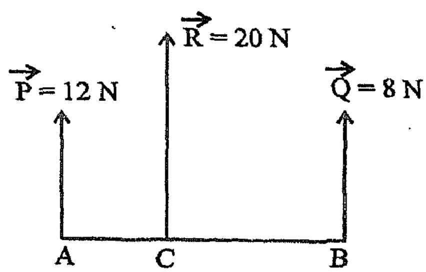
उदाहरण 10 एक मीटर दूरी पर स्थित दो बिंदुओं पर लगे, परिमाण में 12 N और 8 N के, दो समदिश समांतर बलों का परिणामी बल ज्ञात कीजिए।

हल परिणामी बल का परिमाण = (12 + 8) N = 20 N और इसकी दिशा दी हुई बलों की दिशा के समांतर है। यदि 12 N और 8 N के बल क्रमशः A और B बिंदुओं पर कार्यरत हों और उनका परिणामी बल बिंदु C पर कार्य कर रहा हो (आकृति 15.25), तो

$$\frac{12}{CB}=\frac{8}{AC}=\frac{20}{AB}$$

या $$\frac{12}{CB}=\frac{8}{AC}=\frac{20}{1} \quad (AB = 1 \text{ मी, दिया है})$$

अतः $$AC = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ मी और } CB = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \text{ मी}$$



आकृति 15.25

अतः परिणामी बल 12 N के बल से $\frac{2}{5}$ मी की दूरी पर कार्य करता है।

उदाहरण 11 8 सेमी की दूरी पर स्थित A और B दो बिंदुओं पर दो समदिश समांतर बल क्रमशः $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ कार्य कर रहे हैं, जिनका परिणामी बल 40 N है। यदि परिणामी बल की क्रिया रेखा बिंदु C से होकर जाती है, जहाँ AC = 3 सेमी, तो दिए हुए बलों के परिमाण ज्ञात कीजिए। यह भी दर्शाइए कि यदि बलों को परस्पर बदल दिया जाए, तो परिणामी बल 2 सेमी की दूरी से स्थानांतरित हो जाता है।

हल दिया गया है कि

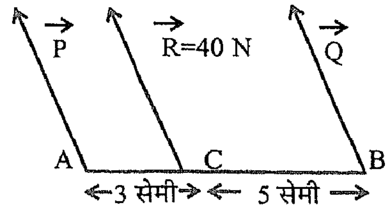
$$P + Q = 40 = R \text{ (मान लीजिए)} \qquad (1)$$

क्योंकि यह बल बिंदु C से जाता है

अत: $P. AC = Q. BC$ (आकृति 15.26)

परंतु $AC = 3$ सेमी, $AB = 8$ सेमी, अत: $BC = 5$ सेमी

इसलिए $P.3 = Q.5$ अर्थात् $P = \frac{5}{3}Q$



आकृति 15.26

P के इस मान को (1) में रखने पर

$$\frac{5Q}{3} + Q = 40, \text{ अर्थात् } Q = \frac{40\times3}{8} = 15 \text{ N}$$

और $P = 40 - Q = 40 - 15 = 25$ N

यदि बलों को परस्पर बदल दिया है, तो मान लीजिए कि परिणाम बल की क्रिया रेखा बिंदु C' से होकर जाती है (आकृति 15.27)।

मान लीजिए कि $CC' = x$ सेमी।

अब C', इस प्रकार है कि,

$Q. AC' = P.BC'$

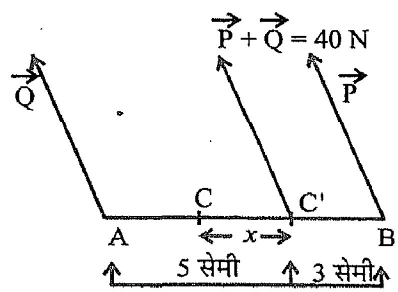
या $Q (AC + CC') = P(BC - CC')$

या $Q (3 + x) = P (5 - x)$

या $15 (3 + x) = 25 (5 - x)$ (क्योंकि $P = 25, Q = 15$)

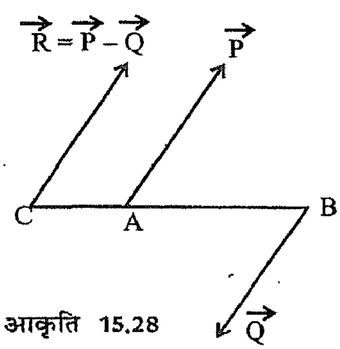
या $40x = 80$

अत: $x = 2$ सेमी, जो कि अभीष्ट था।



आकृति 15.27

किसी दृढ़ पिंड के A और B बिंदुओं पर लगे क्रमश: दो विपरीत दिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ $(P > Q)$ का परिणामी बल परिमाण में दिए हुए बलों के परिमाण के अंतर $(P - Q)$ के तुल्य होता है और उसकी दिशा दिए हुए बलों की क्रिया रेखा के समांतर, बड़े बल की दिशा की ओर होती है तथा परिणामी बल बिंदु C पर कार्य करता है, जो रेखा खंड AB को बाह्यत: $Q : P$ के अनुपात में विभाजित करता है। अर्थात् बिंदु C बढ़ी हुई BA पर इस प्रकार स्थित है कि $Q. BC = P. AC$ (आकृति 15.28)।



आकृति 15.28

टिप्पणी ध्यान देने योग्य है कि उस दशा में, जब विपरीत दिश समांतर बलों के परिमाण बराबर हों $(P = Q)$ तो हम एक अकेला बल इस

प्रकार का नहीं प्राप्त कर सकते हैं, जिसका प्रभाव वही हो जैसा कि दोनों दिए हुए बलों का सम्मिलित प्रभाव है। वास्तव में बलों के इस प्रकार का जोड़ा एक बल युग्म कहलाता है, जिसका अध्ययन हम अगले अनुच्छेद में करेंगे।

उदाहरण 12 18 N और 10 N के दो प्रतिदिश (विपरीत दिश) समांतर बलों का परिणामी बल एक ऐसी रेखा के अनुदिश कार्य करता है, जो छोटे बल की क्रिया रेखा से 12 सेमी की दूरी पर है। दिए हुए दो बलों की क्रिया रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि 18 N और 10 N के दो प्रतिदिश समांतर बल क्रमशः A और B बिंदुओं पर कार्य करते हैं और मान लीजिए कि C वह बिंदु है, जिससे होकर उनका परिणामी बल जाता है (आकृति 15.29)।

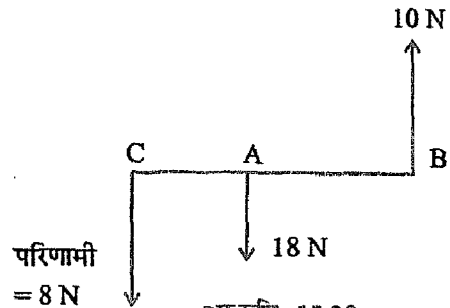
यह दिया हुआ है कि BC = 12 सेमी।

अब प्रश्नानुसार

$18 \times AC = 10 \times BC = 10 \times 12$ (क्योंकि BC = 12 सेमी)

अर्थात् $AC = \frac{10\times12}{18} = 6\frac{2}{3}$ सेमी।

अतः $AB = BC - AC = 12 - 6\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}$ सेमी।



आकृति 15.29

उदाहरण 13 $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ दो प्रतिदिश समांतर बल हैं। जब $\vec{P}$ का परिमाण दुगना कर दिया जाता है, तो देखा जाता है कि $\vec{Q}$ की क्रिया रेखा नए परिणामी और मूल परिणामी बलों की क्रिया रेखाओं के ठीक मध्य में है। P और Q का अनुपात ज्ञात कीजिए।

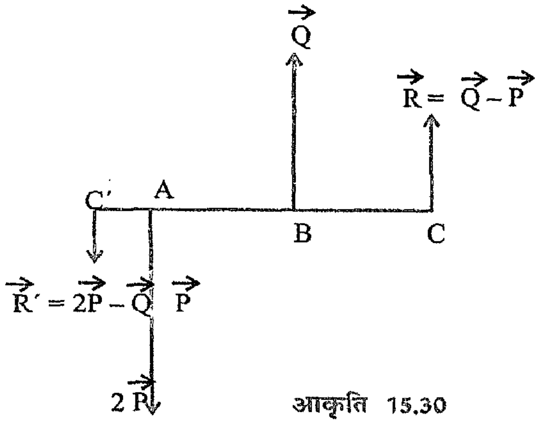
हल मान लीजिए कि दो प्रतिदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ क्रमशः दो बिंदुओं A और B पर कार्य करते हैं। यह दिया है कि यदि P को दुगुना कर दिया जाता है तो Q की क्रिया रेखा नए और मूल परिणामी बलों के मध्य में होती है। यह केवल तभी संभव है, जब

$$P < Q < 2P$$

मान लीजिए कि दो प्रतिदिश समांतर बल P और Q का परिणामी बल R (अर्थात् Q – P क्योंकि Q > P) बिंदु C पर कार्य करता है, तो

$$\frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{Q-P}{AB} \text{ या } BC = \frac{P}{Q-P} AB \qquad (1)$$

जब P को दुगना कर दिया जाता है, तो मान लीजिए कि नया परिणामी $R'(R' = 2P - Q)$ बिंदु C' पर कार्य करता है (आकृति 15.30)।



आकृति 15.30

इस प्रकार $$\frac{2P}{C'B} = \frac{Q}{C'A} = \frac{2P - Q}{AB} \Rightarrow C'B = \frac{2P}{2P - Q}AB \qquad (2)$$

क्योंकि Q की क्रिया रेखा R और R′ के ठीक मध्य में है, अत: $BC = C'B$

या $$\frac{P}{Q - P}AB = \frac{2P}{2P - Q}AB \qquad [(1) \text{ और } (2) \text{ द्वारा}]$$

या $$\frac{P}{Q - P} = \frac{2P}{2P - Q}$$

या $$2(Q - P) = 2P - Q$$

या $$4P = 3Q$$

अत: $P : Q : : 3 : 4$

अनेक (दो से अधिक) समांतर बलों का परिणामी ज्ञात करने के लिए एक समय में दो बलों का परिणामी बल निकाल लेते हैं और इस प्रक्रिया को बारंबार करते जाते हैं, जब तक अंतिम परिणामी बल प्राप्त नहीं हो जाता है।

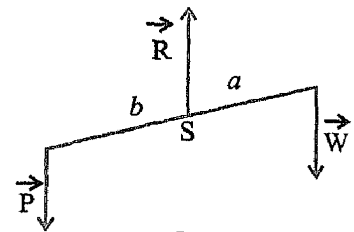
प्रश्नावली 15.4

1. परस्पर 10 सेमी दूर उन दो प्रतिदिश समांतर बलों को ज्ञात कीजिए, जिनका परिणामी बल 100 N है, और जो बड़े बल से 6 सेमी की दूरी पर कार्य करता है।
2. एक 1.6 मी लंबे सर्वत्रसम पटरे का द्रवमान 112 कि.ग्रा. है। यदि 44 कि.ग्रा. और 68 कि.ग्रा. द्रवमान के दो बालक क्रमश: पटरे के दोनों सिरों पर बैठे हों, तो आलंब की स्थिति ज्ञात कीजिए।

[संकेत ऐसा मान लिया जाता है कि सर्वत्रसम पटरे का भार उसके मध्य बिंदु पर कार्य करता है। अतः इस निकाय में तीन बल हैं, जो क्रमशः पटरे के एक सिरे पर 44×9.8 N उसके मध्य बिंदु पर 112×9.8 N और दूसरे सिरे पर 68×9.8 N हैं।]

3. एक व्यक्ति अपने कंधे पर रखे हुए दंड के एक सिरे पर लटका हुआ एक बोझ ले जा रहा है। यदि बोझ का भार $\vec{W}$ है और a तथा b क्रमशः कंधे से बोझ तथा उसके हाथ की दूरियाँ हैं तो दर्शाइए कि उसके कंधे पर दबाव $\vec{W}(1+\frac{a}{b})$ है।

[संकेत $\vec{P}+\vec{W}=\vec{R}$, $\vec{P}.b=\vec{W}.a$] (आकृति 15.31)।



आकृति 15.31

4. दो समदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ एक दृढ़ पिंड पर कार्य करते हैं। यदि दोनों बलों के परस्पर स्थातंरण से उनके परिणामी बल का स्थान अपरिवर्तित रहता है, तो दर्शाइए कि $P=Q$

5. परस्पर 20 सेमी की दूरी पर कार्यरत दो विपरीतदिश समांतर बल निर्धारित कीजिए, जो 26 N के एक दिए हुए बल के समतुल्य है। यह दिया है कि दोनों बलों में से बड़ा बल एक ऐसी रेखा के अनुदिश कार्य करता है, जो दिए हुए बल की क्रिया रेखा से 6 सेमी की दूरी पर है।

6. दो समदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ क्रमशः बिंदुओं A और B पर लगे हैं $(P>Q)$। यदि $\vec{P}$ तथा $\vec{Q}$ दोनों का ही परिमाण x द्वारा बढ़ा दिया जाए, तो दर्शाइए कि परिणामी बल $\frac{x.AB}{P-Q}$ दूरी द्वारा खिसक (हट) जाएगा।

7. दो समदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल बिंदु O से होकर जाता है। जब P का परिमाण R द्वारा और Q का परिमाण S द्वारा बढ़ा दिया जाता है तो भी परिणामी बल O से जाता है। इसके अतिरिक्त जब $\vec{Q}$ और $\vec{R}$ क्रमशः $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ को प्रतिस्थापित करते हैं तो भी परिणामी बल O से ही होकर जाता है। दर्शाइए कि

$$S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$$

8. दो प्रतिदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ $(P>Q)$ परस्पर x इकाई की दूरी पर कार्य कर रहे हैं। यदि $\vec{P}$ की दिशा विपरीत कर दी जाए, तो दर्शाइए कि परिणामी बल $\frac{2PQx}{P^2-Q^2}$ इकाई दूरी द्वारा खिसक (हट) जाता है।

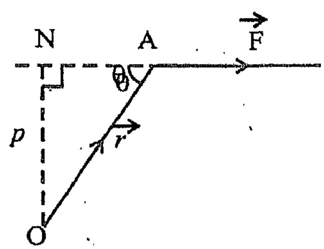
15.5.3 *एक बल का आघूर्ण* (*Moment of a force*) यदि हम किसी दृढ़ पिंड पर एक बल लगाएँ, जिससे पिंड का प्रत्येक कण बराबर दूरी तय करे, तो हम कहते हैं कि पिंड स्थानांतरण की गति के प्रभाव में चलता है। इसके अतिरिक्त, यदि एक बल के लगाए जाने पर पिंड का प्रत्येक कण पिंड के एक स्थिर बिंदु के परितः एक वृत्त बनाए, जो पिंड घूर्णन की गति के प्रभाव में चलता है। अब यदि किसी दृढ़ पिंड का एक बिंदु स्थिर हो और हम पिंड पर एक ऐसा बल लगाएँ, जो उस स्थिर बिंदु से होकर नहीं जाता है, तो पिंड में उस स्थिर बिंदु के परितः घूमने की प्रवृत्ति होती है। पिंड की, इस प्रकार, किसी स्थिर बिंदु के परितः (किसी रेखा के परितः) घूमने की प्रवृत्ति को *आघूर्ण* कहते हैं। एक बिंदु के परितः (या एक रेखा के परितः) किसी बल के आघूर्ण की परिभाषा व्यक्त करने के लिए हम सदिश का प्रयोग करेंगे।

एक बिंदु के परितः किसी बल का सदिश आघूर्ण (Vector Moment of a Force About a Point)

मान लीजिए कि $\vec{F}$ बिंदु A पर कार्यरत एक बल है और O आकाश (समष्टि) में स्थित कोई स्थिर बिंदु है। हम O के परितः बल $\vec{F}$ के सदिश आघूर्ण (या संक्षेप में O के परितः $\vec{F}$ के आघूर्ण) को सदिश $\vec{M}$ के तुल्य परिभाषित करते हैं, जहाँ

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

तथा $\vec{r} = \vec{OA}$, O के सापेक्ष A का स्थिति सदिश है (आकृति 15.32)।



आकृति 15.32

यहाँ $\vec{M}$ उस समतल के लंबवत् सदिश है, जिसमें $\vec{r}$ और $\vec{F}$ स्थित होते हैं और इसका परिमाण

$$M = |\vec{M}| = r\,F \sin\theta = p\,F$$

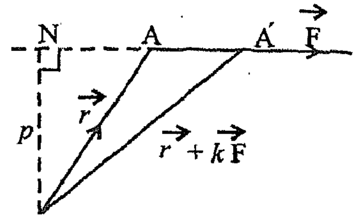
जहाँ θ सदिश $\vec{r}$ और $\vec{F}$ के बीच का कोण है तथा p बिंदु O की $\vec{F}$ की क्रिया रेखा से लंबवत् दूरी है।

किसी बल का आघूर्ण धनात्मक या ऋणात्मक है यदि उसके प्रभाव में पिंड के घूमने की प्रवृत्ति क्रमशः वामावर्ती (anticlockwise) या दक्षिणावर्ती (clockwise) है।

आइए, अब हम एक बिंदु O के परितः किसी बल $\vec{F}$ के आघूर्ण पर बल $\vec{F}$ के उसकी क्रिया रेखा के अनुदिश सरकने (स्लाइड) के कारण, पड़ने वाले प्रभाव पर विचार करें।

अपनी क्रिया रेखा के अनुदिश सरकने के कारण मान लीजिए कि बल $\vec{F}$ का क्रिया बिंदु A′ हो जाता है, जहाँ $\vec{OA'} = \vec{r} + k\,\vec{F}$ यहाँ k एक अदिश राशि है।

तब बिंदु O के परितः, बिंदु A′ पर कार्यरत बल $\vec{F}$ का आघूर्ण (आकृति 15.33) निम्न प्रकार है :



आकृति 15.33

$$\vec{M}' = \vec{OA}' \times \vec{F} = \left(\vec{r} + k\vec{F}\right) \times \vec{F}$$

$$= \vec{r} \times \vec{F} \text{ (क्योंकि } \vec{F} \times \vec{F} = \vec{0}\text{)} = \vec{M}$$

अतः किसी बल के अपनी क्रिया रेखा के अनुदिश सरकने से, किसी बिंदु के परितः उस बल का आघूर्ण अपरिवर्तित रहता है।

इसलिए सार्व (सार्वनिष्ठ) क्रिया बिंदु A वाले, $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}, \ldots$ *बलों का, एक बिंदु O के परितः, सदिश आघूर्णों का योग बिंदु* A पर *कार्यरत उनके परिणामी बल* $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \ldots$ *का बिंदु* O के परितः सदिश आघूर्ण के तुल्य होता है। इस फल (परिणाम) को वेरिग्नान (Varignon) का प्रमेय कहते हैं।

एक रेखा के परितः किसी बल का आघूर्ण (Moment of a Force About a Line)

मान लीजिए कि $\vec{F}$ बिंदु A पर कार्यरत एक बल है और L एक दी हुई रेखा है। मान लीजिए कि रेखा L के अनुदिश, धनात्मक अर्थ में, $\hat{\lambda}$ एकक सदिश है।

मान लीजिए कि रेखा L पर O कोई बिंदु है। तब रेखा L के परितः बल $\vec{F}$ का सदिश आघूर्ण (या संक्षेप में बल $\vec{F}$ का रेखा L के परितः आघूर्ण), बल $\vec{F}$ का बिंदु O के परितः सदिश आघूर्ण M का, रेखा L की धनात्मक दिशा के अनुदिश घटक, परिभाषित किया गया है। प्रतीक रूप में

$$M_{\lambda} = \hat{\lambda} . \vec{M} = \hat{\lambda} . (\vec{OA} \times \vec{F})$$

यह ध्यान योग्य है कि M_{λ} का मान, रेखा L पर लिए गए बिंदु O की स्थिति से, स्वतंत्र होता है, क्योंकि यदि A′ रेखा L पर कोई अन्य बिंदु इस प्रकार हो कि $\vec{OA}' = \mu\hat{\lambda}$, तो बल $\vec{F}$ का रेखा L के परितः आघूर्ण निम्न प्रकार होता है :

$$M'_{\lambda} = \hat{\lambda} . \left(\vec{A'A} \times \vec{F}\right) = \hat{\lambda} . \left(\left(\vec{OA} - \vec{OA}'\right) \times \vec{F}\right)$$

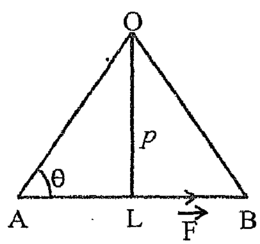
$$= \hat{\lambda} . \left[\left(\vec{OA} - \mu\hat{\lambda} \right) \times \vec{F} \right] = \hat{\lambda} . \left(\vec{OA} \times \vec{F} \right) - \hat{\lambda} . \left(\mu\hat{\lambda} \times \vec{F} \right)$$

$$= \hat{\lambda} . \left(\vec{OA} \times \vec{F} \right) - 0$$

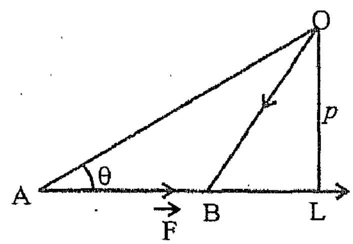
$$= M_{\lambda}$$

किसी बल का एक बिंदु के परितः आघूर्ण का ज्यामितीय अर्थ (महत्त्व) (Geometrical significance of moment of a force about a point)

मान लीजिए कि बल $\vec{F}$ परिमाण और दिशा में रेखाखंड AB द्वारा निरूपित है। मान लीजिए कि O दिष्ट बिंदु है और बिंदु O से AB या बढ़ाई गई AB पर OL लंब है (आकृति 15.34 और 15.35)।



आकृति 15.34



आकृति 15.35

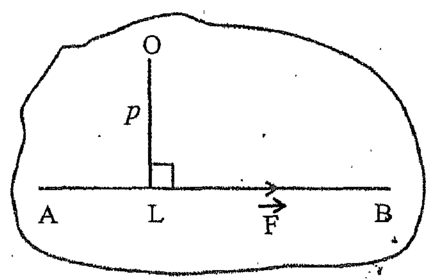
परिभाषा से, O के परितः $\vec{F}$ का आघूर्ण $\vec{M} = \vec{OA} \times \vec{F}$

अर्थात् $|\vec{M}| = OA . |\vec{F}| . \sin\theta$

$= AB.OL = 2 \times$ (Δ OAB का क्षेत्रफल)

एक बिंदु के परितः किसी बल के आघूर्ण का भौतिक अर्थ (Physical meaning of the moment of a force about a point)

एक समतल पिंड (पटल) पर विचार कीजिए और मान लीजिए कि O इस पटल का एक स्थिर बिंदु है। पिंड पर कार्य कर रहे बल $\vec{F}$ का प्रभाव, बिंदु O को केंद्र रूप में रखकर, पटल को O के परितः घुमाने का होगा, और इस प्रभाव का मान शून्य नहीं होगा, जब तक कि (i) बल $\vec{F}$ शून्य न हो या (ii) बल $\vec{F}$ बिंदु O से होकर जाता हो और इस दशा में OL = 0 (आकृति 15.36)।

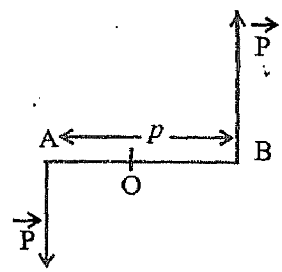


आकृति 15.36

अतः, $|\vec{M}| = OL.|\vec{F}|$ बल $\vec{F}$ का पिंड को O के परितः घुमाने की प्रवृत्ति का उपयुक्त माप है।

15.5.4 *बल युग्म* (*Couple*) हमें ज्ञात है कि ऐसे दो बराबर विपरीत दिश समांतर बलों का, जिनकी क्रिया रेखाएँ समान (एक ही सीध में) नहीं है, परिणामी बल एक अकेला बल नहीं हो सकता है। किसी दृढ़ पिंड पर क्रियारत, इस प्रकार के बल, पिंड में स्थांतरीय गति नहीं उत्पन्न कर सकते हैं। ऐसे बल पिंड में केवल घूर्णी (चक्रीय) गति या घूर्णन ही उत्पन्न कर सकते हैं। दो बराबर और प्रतिदिश समांतर बलों द्वारा इस प्रकार घूर्णन उत्पन्न करने का अनुभव किसी ताले की चाबी घुमाने के लिए लगाए गए बलों या किसी दरवाजे की मूठ (हेंडिल) घुमाने के लिए लगाए गए बलों या किसी पेंचकश के हत्थे पर लगाए गए बलों द्वारा किया जा सकता है।

दो बराबर विपरीत दिश समांतर बल, जिनकी क्रिया रेखाएँ एक सीध में नहीं है, एक बल युग्म की रचना करते हैं, बल युग्म की प्रवृत्ति पिंड को घुमाने (घूर्णन) की होती है।



आकृति 15.37

बल युग्म के दोनों बलों की क्रिया रेखाओं के बीच लंबवत् दूरी को बल युग्म की बाहु कहते हैं, उदाहरणार्थ, आकृति 15.37 में दिए गए बल युग्म की बाहु $AB = p$ है।

बल युग्म बनाने वाले बलो में से एक बल तथा बल युग्म की बाहु का गुणनफल बल युग्म का आघूर्ण होता है, आकृति 15.37 में बल युग्म का आघूर्ण $|\vec{P} \times \vec{AB}|$, अर्थात् Pp है।

बल युग्म का आघूर्ण धनात्मक या ऋणात्मक होता है यदि बल युग्म द्वारा पिंड को घुमाने की प्रवृत्ति क्रमशः वामावर्ती या दक्षिणावर्ती होती है।

बल युग्म को कभी-कभी बल-आघूर्ण (torque) भी कहते हैं, बल-आघूर्ण शब्द का प्रयोग बल-युग्म के आघूर्ण को प्रकट करने के लिए भी किया जाता है।

एक बल युग्म को सामान्यतः (P, p), से प्रकट करते हैं, जहाँ P, बल युग्म रचने वाले बलों में से किसी एक का परिमाण है और p बल युग्म के बाहु की लंबाई है।

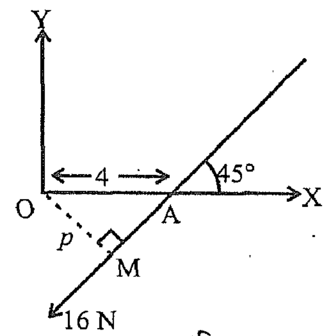
अब हम निम्नलिखित प्रमेयों में बल युग्म के कुछ महत्त्वपूर्ण गुणों का वर्णन करते हैं :

प्रमेय 1 "एक बल युग्म की रचना करने वाले बलों के समतल में स्थित किसी बिंदु के परितः बलों के आघूर्णों का बीजीय योग स्थिर होता है और इसका मान बल युग्म के आघूर्ण के तुल्य होता है।"

प्रमेय 2 "एक ही समतल में किसी दृढ़ पिंड पर कार्यरत ऐसे दो बल युग्म, जिनके आघूर्ण बराबर और विपरीत हैं, एक दूसरे को संतुलित करते हैं।"

प्रमेय 3 "एक पिंड पर कार्यरत सहसमतलीय कई बल युग्म अकेले एक ऐसे बल युग्म के समतुल्य होते हैं, जिसका आघूर्ण दिए हुए बल युग्मों के आघूर्णों के बीजीय योग के बराबर होता है।

उदाहरण 14 16 N का एक बल, OX पर स्थित बिंदु A से होकर जाते हुए XY-तल में कार्य करता है और बल की दिशा x-अक्ष की दिशा से 45° का कोण बनाती है। यदि OA = 4 मी हो, तो मूल बिंदु के परितः बल का आघूर्ण ज्ञात कीजिए।



आकृति 15.38

हल मान लीजिए कि दिए हुए बल की क्रिया रेखा की O (मूल बिंदु) से लंबवत् दूरी p है (आकृति 15.38)। इस प्रकार

$$p = OM = OA \sin 45° = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \text{ मी।}$$

अतः बिंदु O के परितः दिए हुए बल का आघूर्ण

$$= -16 \times 2\sqrt{2}$$

$$= -32\sqrt{2}$$

यहाँ बल क्योंकि वामावर्ती आघूर्ण उत्पन्न करता है अतः ऋण चिह्न लिया गया है।

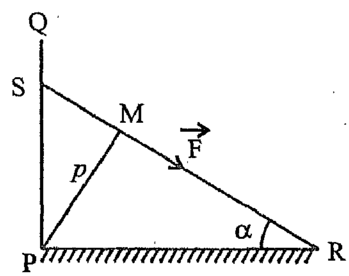
उदाहरण 15 a लंबाई की रस्सी का एक सिरा किसी पेड़ के किस बिंदु पर बांधा जाए, जिससे कि रस्सी के दूसरे सिरे से रस्सी को खींचने वाला एक व्यक्ति, पेड़ को गिराने के लिए, पेड़ पर लगाए गए बल का महत्तम प्रभाव उत्पन्न कर सके।

हल मान लीजिए कि PQ दिया हुआ पेड़ है, जिसके S बिंदु से रस्सी RS का एक सिरा बंधा है। मान लीजिए कि पृथ्वी से रस्सी का झुकाव α है। मान लीजिए कि वह व्यक्ति रस्सी के दूसरे सिरे R पर रस्सी के अनुदिश $\vec{F}$ बल लगाता है। पेड; को उखाड़ने की प्रवृत्ति का माप बिंदु P के परितः बल $\vec{F}$ के आघूर्ण फे परिमाण द्वारा किया जाता है (आकृति 15.39)। अब यह आघूर्ण

$$= Fp = F.\ PM = F\ PR \sin\alpha$$

$$= F.\ (RS \cos\alpha) \sin\alpha$$

$$= \frac{1}{2} F\ a \sin 2\alpha \ . \quad (\text{क्योंकि } RS = a)$$



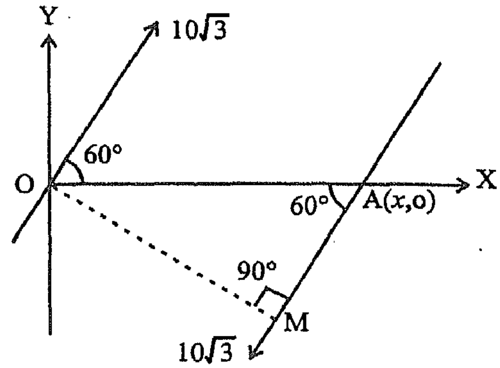
आकृति 15.39

यह आघूर्ण महत्तम तब होगा जब $\sin 2\alpha$ महत्तम हो। $\sin 2\alpha$ का महत्तम मान 1 है, जब $2\alpha = 90°$ अर्थात् $\alpha = 45°$।

अतः $$PS = (RS) \sin 45° = a \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

उदाहरण 16 दो बल जिनमें से प्रत्येक का परिमाण $10\sqrt{3}$ इकाई है, एक बल युग्म की रचना करते हैं इनमें से एक बल x-अक्ष की धनात्मक दिशा से 60° पर झुका हुआ मूल बिंदु पर कार्य करता है, ज्ञात कीजिए कि दूसरे बल की क्रिया रेखा x-अक्ष को कहाँ काटती है, यह दिया है कि बल युंग्म का आघूर्ण -45 है।

हल क्योंकि बल युग्म का आघूर्ण -45 दिया है, इसलिए यह बलों के दक्षिणावर्ती घूमने की दशा है। स्पष्ट है कि दूसरी बल x-अक्ष को उसके धनात्मक भाग में काटेगा, मान लीजिए कि बिंदु A $(x, 0)$ पर काटता है।



आकृति 15.40

बल युग्म के बलों की दिशाएँ आकृति 15.40 में दर्शित हैं। मूल बिंदु O से, A बिंदु से जाने वाले बल की क्रिया रेखा पर, OM लंब खींचिए।

समकोण Δ OAM से

$$OM = OA \sin 60° = x.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

क्योंकि बल युग्म का आघूर्ण -45 दिया है,

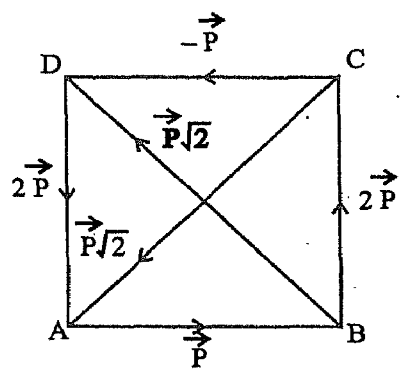
अत: $\quad -10\sqrt{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}x = -45$

या $\quad 15x = 45$ या $x = 3$

अत: दूसरे बल की क्रिया रेखा x-अक्ष को बिंदु (3,0) पर काटती है।

उदाहरण 17 वर्ग ABCD की भुजाओं AB, BC, CD और DA के अनुदिश क्रमशः बल $\vec{P}, 2\vec{P}, -\vec{P}$ और $2\vec{P}$ कार्य करते हैं और बल $\vec{P}\sqrt{2}$ प्रत्येक विकर्ण BD और CA के अनुदिश कार्य करते हैं। दर्शाइए कि दिए गए बल घटकर एक $2a$P आघूर्ण का बल युग्म के तुल्य रह जाता है, जहाँ a वर्ग की भुजा का माप है।

हल दिया हुआ बल निकाय आकृति 15.41 में प्रदर्शित है।



आकृति 15.41

हम CA के अनुदिश कार्यरत बल $\vec{P}\sqrt{2}$ को दो घटकों में वियोजित करते हैं, जो क्रमशः

$\vec{P}\sqrt{2}\cos 45° \; (= \vec{P})$ CD के अनुदिश तथा

$\vec{P}\sqrt{2}\sin(45°), \; (= \vec{P})$ CB के अनुदिश हैं।

इसी प्रकार, हम BD के अनुदिश लगे $\vec{P}\sqrt{2}$ के बल का वियोजन $\vec{P}\sqrt{2}\cos 45° (= \vec{P})$ BA के अनुदिश तथा $\vec{P}\sqrt{2}\sin 45° (= \vec{P})$ BC के अनुदिश करते हैं।

इस प्रकार दिए गए बलों का यह निकाय निम्न प्रकार हो जाता है :

(i) एक बल $\vec{P}$, AB के अनुदिश और BA के अनुदिश बल $\vec{P}$

(ii) BC के अनुदिश एक बल $2\vec{P}$, BC, के अनुदिश एक बल $\vec{P}$ तथा CB के अनुदिश एक बल $\vec{P}$

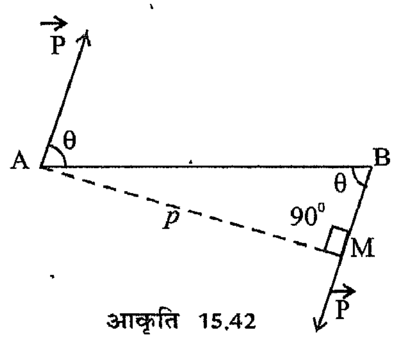
(iii) CD के अनुदिश एक बल $-\vec{P}$ और CD के अनुदिश एक बल $\vec{P}$

(iv) DA के अनुदिश एक बल $2\vec{P}$

अतः दिया हुआ बल निकाय BC और DA के अनुदिश कार्यरत दो बराबर और समांतर बल क्रमशः $2\vec{P}$ और $2\vec{P}$ के समतुल्य हैं, किंतु यह दोनों बल बराबर और विपरीत दिशा में समांतर बल हैं जिनकी क्रिया रेखाएँ एक ही सीध में नहीं हैं और इसलिए एक ऐसे बल युग्म की रचना होती है जिनका आघूर्ण $2aP$ है, जहाँ दिया हुआ है कि a वर्ग की भुजा की लंबाई है, जो इस बल युग्म की बाहु है।

उदाहरण 18 A और B दो बिंदुओं पर कार्यरत दो बराबर विपरीत दिशा समांतर बल, एक G आघूर्ण का बल-युग्म बनाते हैं। यदि इन बलों की क्रिया रेखाएँ एक समकोण घुमा दी जाए तो वे एक H आघूर्ण का बल युग्म बनाते हैं। दर्शाइए कि जब दोनों बल रेखा AB से समकोण बनाते हैं, तो वे $\sqrt{G^2 + H^2}$ आघूर्ण का बल युग्म बनाते हैं।

हल मान लीजिए कि A और B पर कार्यरत दोनों बराबर विपरीत दिशा समांतर बलों में से प्रत्येक P के बराबर हैं और प्रत्येक AB से कोण θ पर झुके हैं (आकृति 15.42)।



आकृति 15.42

दिया है कि बल G आघूर्ण का बल युग्म बनाते हैं,

अतः $G = Pp = P.\ AB \sin\theta$ (1)

जब इन बलों की क्रिया रेखाओं को एक समकोण से घुमा दिया जाता है तो प्रत्येक बल $\vec{P}$ का AB से झुकाव $(\theta + 90°)$ हो जाता है। अतः प्रश्नानुसार

$$H = P.\ AB \sin(\theta + 90°) = P.AB \cos\theta \quad (2)$$

और जब दोनों बल AB से समकोण बनाते हैं तब वे एक P.AB आघूर्ण का बल युग्म बनाते हैं।

पुनः $$P.AB = P.\sqrt{\left(\frac{G}{P}\right)^2 + \left(\frac{H}{P}\right)^2}$$ [(1) और (2) के वर्गों को जोड़ने पर]

$$= \sqrt{G^2 + H^2}$$

अतः अभीष्ट उत्तर प्राप्त हुआ।

प्रश्नावली 15.5

1. ABCD एक वर्ग है। इसकी भुजाओं AB, CB, DC और DA के अनुदिश क्रमशः 6, 5, 8 और 12 N के बल कार्य करते हैं। यदि वर्ग की भुजाएँ 4 मी लंबी हैं, तो इसके केंद्र O के परितः इन बलों के आघूर्णों का बीजीय योग ज्ञात कीजिए।

2. एक समभुज ΔABC, जिसकी प्रत्येक भुजा 11 सेमी लंबी है, की भुजाओं BC, CA और AB के अनुदिश क्रमशः 4, 5 और 6 N के बल कार्य करते हैं। BC पर एक बिंदु ऐसा ज्ञात कीजिए, जिसके परितः BC और CA के अनुदिश कार्यरत बलों के आघूर्णों का योग, उस बिंदु के परितः तीसरे बल के आघूर्ण के बराबर हो।

3. अक्ष OX के समांतर बिंदु (2,3) से जाने वाली रेखा के अनुदिश 20 N का एक बल कार्य कर रहा है। XY-तल में बिंदु (1,7) के परितः उस बल का आघूर्ण ज्ञात कीजिए।

4. ABCDEF एक सम षट्भुज है; इसकी भुजाओं AB, CB, DE और FE के अनुदिश क्रमशः 5, 11, 5, 11 N के बल कार्य करते हैं और CD तथा FA के अनुदिश दो बल, प्रत्येक x N के तुल्य, कार्य करते हैं। यदि बलों का यह निकाय साम्यावस्था में है, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

5. एक बल-युग्म, जिसका प्रत्येक बल 10 N है और बाहु 3 मी है, एक 5 मी बाहु के बल-युग्म द्वारा प्रतिस्थापित किया जाता है। इस बल-युग्म का प्रत्येक बल ज्ञात कीजिए।

6. ABCD एक समचतुर्भुज है, जिसकी भुजा a और कोण α है। CD पर एक वर्ग CEFD की रचना इस प्रकार करते हैं कि यह CD के उस तरफ स्थित हो जिसमें AB नहीं है। एक बल $\vec{P}$ क्रमशः AB, BC, DA, DF, FE, और EC प्रत्येक के अनुदिश कार्य करता है और बल $2\vec{P}$, CD के अनुदिश कार्य करता है। दर्शाइए कि बलों का यह निकाय समानयित होकर (घटकर) केवल एक अकेले $2aP(1-\sin\alpha)$ आघूर्ण के बल युग्म के बराबर हो जाता है।

7. दर्शाइए कि किसी दृढ़ पिंड पर कार्यरत तीन बल यदि परिमाण और दिशा में किसी त्रिभुज की, क्रमानुसार ली गई, भुजाओं द्वारा निरूपित होते हैं, तो वे एक ऐसे बल-युग्म के समतुल्य हैं, जिसका आघूर्ण उस त्रिभुज के क्षेत्रफल के दुगुने से निरूपित हैं।

विविध उदाहरण (MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 19 एक समतल में स्थित किसी कण पर क्रमशः 2 N, $2\sqrt{2}$ और 1 N के तीन बल कार्य कर रहे हैं, पहला बल क्षैतिज दिशा में, दूसरा क्षैतिज से 45° के कोण की दिशा में और तीसरा ऊर्ध्वाधर दिशा में कार्य कर रहे हैं। इन बलों का परिणामी बल ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि परिणामी बल $\vec{F}$ है और यह क्षैतिज दिशा से कोण θ पर झुका है। यदि बल $\vec{F}$ के क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर दिशाओं में वियोजित करने पर, हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होते हैं,

$$X = 2 + 2\sqrt{2}\cos 45° + 1.\cos 90° = 2 + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1.0 = 4$$

अतः $$Y = 2.\sin 0° + 2\sqrt{2}\sin 45° + 1.\sin 90° = 2(0) + 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 1(1) = 3$$

अतः $$F\cos\theta = X = 4, \text{ और } F\sin\theta = Y = 3$$

और $$F = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5, \text{ और } \tan\theta = \frac{3}{4}$$

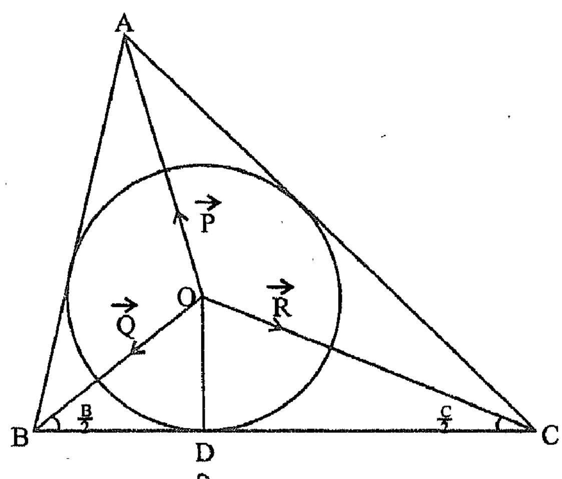
अतः परिणामी बल 5 N है और यह क्षैतिज दिशा से एक ऐसे कोण पर कार्य करता है जिसके tangent का मान (3/4) है।

उदाहरण 20 किसी वृत्त के केंद्र पर स्थित एक कण पर $\vec{P}$, $\vec{Q}$ और $\vec{R}$ तीन ऐसे बल लगे हैं, जो क्रमशः वृत्त के परिगत एक त्रिभुज के शीर्ष A, B और C की ओर अभिमुख है। सिद्ध कीजिए कि यदि बल-समूह साम्यावस्था में हैं, तो

$$\frac{P}{\cos(A/2)} = \frac{Q}{\cos(B/2)} = \frac{R}{\cos(C/2)}$$

जहाँ A, B और C त्रिभुज ABC के कोणों के मान हैं।

हल मान लीजिए कि O वृत्त का केंद्र है। OD भुजा BC पर लंब खींचा गया है (आकृति 15.43)।



आकृति 15.43

अतः $$\angle DOC = 90° - \angle OCD = 90° - \frac{C}{2}$$

इसके अतिरिक्त $\angle BOD = 90° - \angle OBD = 90° - \frac{B}{2}$

अत: $\angle BOC = 180° - (\frac{B}{2} + \frac{C}{2})$

$$= 180° - \left(\frac{180°}{2} - \frac{A}{2}\right) = 90° + \frac{A}{2}$$

इसी प्रकार $\angle AOC = 90° + \frac{B}{2}$ और $\angle AOB = 90° + \frac{C}{2}$

लामी के प्रमेय के प्रयोग द्वारा

$$\frac{P}{\sin \angle BOC} = \frac{Q}{\sin \angle COA} = \frac{R}{\sin \angle AOB}$$

या
$$\frac{P}{\sin (90° + A/2)} = \frac{Q}{\sin (90° + B/2)} = \frac{R}{\sin (90° + C/2)}$$

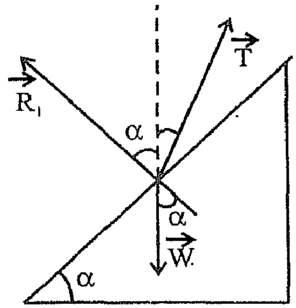
अत:
$$\frac{P}{\cos A/2} = \frac{Q}{\cos B/2} = \frac{R}{\cos C/2}$$

उदाहरण 21 क्षैतिज से α कोण पर नत किसी चिकने समतल पर एक भार ऐसी डोरी से संभला हुआ है, जो ऊर्ध्वाधर से γ कोण बनाती है। यदि समतल का झुकाव (प्रावण्य) बढ़ा कर β कर दिया जाए और डोरी तथा ऊर्ध्वाधर दिशा के बीच का कोण अपरिवर्तित रहे, तो भार को संभालने के लिए डोरी का तनाव दुगुना हो जाता है। सिद्ध कीजिए कि

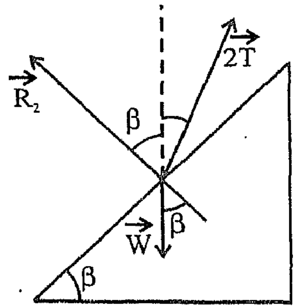
$$\cot\alpha - \cot\gamma = 2 \cot \beta$$

हल मान लीजिए कि संभला हुआ भार $\vec{W}$ है। मान लीजिए कि समतल की भार पर प्रतिक्रियाएँ, जब उसका (समतल) झुकाव (आनति) α और β है, क्रमशः $\vec{R_1}$ और $\vec{R_2}$ हैं (आकृति 15.44 और 15.45)।

क्योंकि समतल चिकना है, इसलिए दोनों दशाओं में प्रतिक्रियाएँ $\vec{R_1}$ और $\vec{R_2}$ समतल पर लंबवत् होंगी। मान लीजिए कि डोरी का तनाव क्रमशः $\vec{T}$ और $2\vec{T}$ है जैसा चित्र में दिखाया है।



आकृति 15.44



आकृति 15.45

पहली दशा में $\vec{R_1}$ और $\vec{T}$ के बीच का कोण $\alpha+\gamma$ है और दूसरी दशा में $\vec{R_2}$ और $2\vec{T}$ के बीच का कोण $\beta+\gamma$ है।

इसके अतिरिक्त $\vec{R_1}$ और $\vec{W}$ के बीच का कोण $(\pi-\alpha)$ है तथा $\vec{R_2}$ और $\vec{W}$, के बीच का कोण $(\pi-\beta)$ है।

अब पहली दशा में, $\vec{R_1}$, $\vec{T}$ और $\vec{W}$ बल साम्यावस्था में है, अतः

लामी के प्रमेय द्वारा

$$\frac{W}{\sin(\alpha+\gamma)}=\frac{R_1}{\sin(2\pi-\overline{\pi-\alpha}-\overline{\alpha+\gamma})}=\frac{T}{\sin(\pi-\alpha)}$$

या $\quad T\sin(\alpha+\gamma)=W\sin(\pi-\alpha)$, या $T\sin(\alpha+\gamma)=W\sin\alpha$ (1)

पुनः दूसरी दशा में $\vec{R_2}$, $2\vec{T}$ और $\vec{W}$ बल साम्यावस्था में है। अतः

$$\frac{W}{\sin(\beta+\gamma)}=\frac{R_2}{\sin(2\pi-\overline{\beta+\gamma}-\overline{\pi-\beta})}=\frac{2T}{\sin(\pi-\beta)}$$

या $\quad 2T\sin(\beta+\gamma)=W\sin(\pi-\beta)$

या $\quad 2T\sin(\beta+\gamma)=W\sin\beta$ (2)

(1) को (2) से भाग करने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{2\sin(\beta+\gamma)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

या $\sin\beta \sin(\alpha+\gamma) = 2\sin\alpha \sin(\beta+\gamma)$

या $\sin\beta(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) = 2\sin\alpha(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)$

या $\sin\beta\cos\alpha\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma = 2\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma$

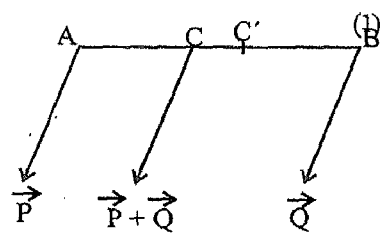
या $\cot\alpha - \cot\gamma = 2\cot\beta$

उदाहरण 22 दो समदिश समांतर बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ $(P>Q)$ एक दृढ़ पिंड के क्रमशः A और B बिंदुओं पर लगे हैं। यदि $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ की स्थितियों को परस्पर बदल दिया जाए, तो दर्शाइए कि परिणामी बल का क्रिया बिंदु $\frac{P-Q}{P+Q}\cdot AB$ दूरी द्वारा हट (खिसक) जाता है।

हल मान लीजिए कि बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ क्रमशः A और B बिंदुओं पर कार्य करते हैं। मान लीजिए कि रेखाखंड AB पर C एक बिंदु है जिससे होकर परिणामी बल जाता है (आकृति 15.46)। तब, समदिश समांतर बलों के सूत्र द्वारा

$$\frac{P}{CB} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$$

या $$AC = \frac{Q.AB}{P+Q} \quad (1)$$



आकृति 15.46

जब बलों की स्थितियाँ परस्पर बदल दी जाती हैं, तब मान लीजिए कि रेखाखंड AB पर C' वह बिंदु है जिससे नया परिणामी बल जाता है। अतः (1) के अनुसार,

$$AC' = \frac{P.AB}{P+Q} \quad (2)$$

क्योंकि $P>Q$ इसलिए (1) और (2) द्वारा

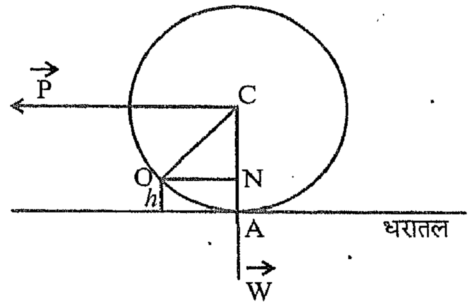
$$CC' = AC' - AC = \frac{P.AB}{P+Q} - \frac{Q.AB}{P+Q} = \frac{P-Q}{P+Q}AB$$

उदाहरण 23 एक भारी वाहन के पहिए का भार $\vec{W}$ और त्रिज्या r है। इस पहिए के केंद्र पर लगे क्षैतिज बल $\vec{P}$ द्वारा (पहिया) एक h ऊँचाई की बाधा पार करता है। दर्शाइए कि P का मान $\frac{W\sqrt{2hr-h^2}}{r-h}$ से थोड़ा अधिक होना चाहिए।

हल मान लीजिए कि C पहिए का केंद्र है, जिससे होकर उसका भार $\vec{W}$ ऊर्ध्वाधर नीचे की ओर कार्य करता है। मान लीजिए पहिए का धरातल से स्पर्श बिंदु A है। मान लीजिए कि O वह बाधा है जिसकी धरातल से ऊँचाई h है। मान लीजिए कि ON ⊥ CA, जहाँ CA ऊर्ध्वाधर है।

पहिए के केंद्र पर लगाए गए बल $\vec{P}$ का बिंदु O के परित: आघूर्ण, इसी बिंदु O के परित: भार $\vec{W}$ के आघूर्ण से कुछ अधिक होना चाहिए।

सीमांत संतुलन की स्थिति में, जब कि पहिया बाधा O को लगभग पार ही करने वाला है, धरातल की A से जाने वाली प्रतिक्रिया शून्य है (आकृति 15.47)।



आकृति 15.47

अत: बिंदु O के परित: $\vec{P}$ और $\vec{W}$ के आघूर्ण निकालने पर

$$P.NC > W.ON$$

अब $$NC = CA - NA = r - h$$

और $$ON = \sqrt{OC^2 - CN^2} = \sqrt{r^2 - (r-h)^2} = \sqrt{2hr - h^2}$$

अत: $$P(r-h) > \sqrt{2hr - h^2}.W$$

या $$P > \frac{W\sqrt{2hr - h^2}}{(r-h)}$$

अत: फल प्राप्त हुआ।

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 15)

1. परस्पर 105° पर झुके हुए 5 N और 3 N के दो बलों का परिणामी बल ज्ञात कीजिए और वह कोण भी निर्धारित कीजिए जो परिणामी बल बड़े बल से बनाता है।

2. एक कण पर कार्यरत तीन बल साम्यावस्था में हैं। पहले और दूसरे बलों के बीच का कोण 90° है तथा दूसरे और तीसरे बलों के बीच का कोण 120° हैं। बलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. 12 N के एक बल को दो घटकों में वियोजित किया जाता है; जिनमें से एक 5 N का है और यह परिणामी बल

4. परस्पर α कोण बनाती हुई दो रेखाओं के अनुदिश दो बल क्रमशः $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ कार्यरत हैं और इन बलों का परिणामी बल $\vec{R}$ है। उन्हीं दोनों रेखाओं के अनुदिश दो अन्य बल क्रमशः $\vec{P'}$ और $\vec{Q'}$ का परिणामी बल $\vec{R'}$ है। दोनों परिणामी बलों की क्रिया रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

5. $\vec{W}$ भार का एक पिंड किसी नत समतल पर स्थित है। पिंड को एक क्षैतिज बल $\vec{P}$ द्वारा विरामावस्था में रखा जा सकता है। यदि समतल के अनुदिश कार्यरत एक बल $\vec{Q}$ द्वारा भी पिंड को विरामावस्था में रखा जा सकता हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{1}{Q^2} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{W^2}$$

6. किसी प्रदत्त कोण पर झुके हुए (नत) दो बल $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल $\vec{R}$, बल $\vec{P}$ की दिशा से θ कोण बनाता है। दर्शाइए कि उसी (प्रदत्त) कोण पर कार्यरत दो बल $(\vec{P} + \vec{R})$ और $\vec{Q}$ का परिणामी बल, $(\vec{P} + \vec{R})$ की दिशा से $\left(\frac{\theta}{2}\right)$ का कोण बनाता है।

7. $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ दो बलों के मध्य आनति कोण θ है। यदि $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ की स्थितियाँ परस्पर बदल दी जाती हैं, तो दर्शाइए कि परिणामी बल कोण ϕ घूम जाता है, जहाँ

$$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{P-Q}{P+Q}\tan\frac{\theta}{2}$$

8. एक त्रिभुज ABC की क्रमानुसार ली गई भुजाओं के समांतर तीन बल एक बिंदु पर कार्यरत हैं और इन बलों के परिमाण क्रमशः सम्मुख कोणों के cosine (कोज्या) के समानुपाती हैं। दर्शाइए कि इन बलों का परिणामी बल $(1 - 8\cos A \cos B \cos C)^{1/2}$ के समानुपाती है।

9. 65 किग्रा का एक पिंड, एक ही क्षैतिज रेखा पर स्थित, परस्पर 13 मी दूर, दो बिंदुओं से बंधी, 5 मी तथा 12 मी लंबी दो डोरियों द्वारा लटक रहा है। डोरियों के तनाव ज्ञात कीजिए।

10. 1.8 मी लंबी एक क्षैतिज छड़, जिसके भार की उपेक्षा की जा सकती है, अपने दोनों सिरों पर, दो आधारों पर टिकी है। इस छड़ के एक सिरे से 0.75 मी की दूरी पर, 300 किग्रा द्रवमान का एक पिंड लटका दिया जाता है। प्रत्येक आधार बिंदु पर प्रतिक्रियाएँ ज्ञात कीजिए।

11. ABCD एक आयत है, जिसमें $AB = CD = a$ और $BC = DA = b$, AD और CB के अनुदिश एक बल P कार्यरत है तथा AB और CD के अनुदिश बल Q कार्यरत है। सिद्ध कीजिए कि बिंदु A पर लगे $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ बलों के परिणामी बल तथा बिंदु C पर लगे $\vec{P}$ और $\vec{Q}$ बलों के परिणामी बलों के बीच की लंबवत् दूरी $\dfrac{Pa - Pb}{\sqrt{P^2 + Q^2}}$ है।

12. 3 N, 6 N, 9 N और 12 N के चार समांतर बल किसी छड़ पर समान दूरियों पर कार्य करते हैं। दर्शाइए कि इन बलों का परिणामी बल, तीसरे बल के हटाए जाने के बाद भी, उसी बिंदु पर कार्य करता रहेगा।

13. तीन समदिश समांतर बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ एक त्रिभुज ABC के शीर्षों पर कार्य करते हैं और इनका परिणामी बल त्रिभुज के परिकेंद्र पर स्थित है। दर्शाइए कि

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

14. समदिश समांतर बल $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ एक ΔABC के शीर्षों पर कार्य करते हैं। यदि इन बलों का परिणामी बल त्रिभुज के लंब केंद्र से होकर जाता है, तो दर्शाइए कि $P : Q : R :: \tan A : \tan B : \tan C$

ऐतिहासिक टिप्पणी

ऐतिहासिक रूप से यांत्रिकी, यथार्थ विज्ञान के रूप में विकसित होने वाली, भौतिक विज्ञान की सबसे प्रारंभिक शाखा है। यूनानियों को, ईसा पूर्व तेरहवीं शताब्दी से ही उत्तोलक और तरल पदार्थों के नियमों का ज्ञान था। स्थैतिकी के मूल प्रमेय अर्थात् बल–त्रिभुज के प्रमेय का प्रतिपादन सर्वप्रथम ब्रूजेस के स्टीविनस (Stevinus of Bruges) ने वर्ष 1586 में किया था। तथापि यांत्रिकी के नियमों का सूत्रीकरण गैलिलियो (Galileo) (1564 – 1642) तथा न्यूटन (Newton) (1642 – 1727) द्वारा किया गया और उन्होंने यांत्रिकी को यथार्थ विज्ञान के रूप में एक सुदृढ़ आधार पर प्रतिष्ठापित किया। न्यूटन ने ही सर्वप्रथम गुरुत्वाकर्षण के सार्वभौम (व्यापक) नियम को उचित प्रकार से सूत्रबद्ध किया। न्यूटन के पश्चात यूलर (Euler), डी एलंबर्ट (D' Alembert), लैगरेंज (Lagrange), लाप्लास (Laplace), पॉयसोट (Poinsot), तथा कोरियोलिस (Coriolis) ने यांत्रिकी में महत्त्वपूर्ण योगदान किया है। अभी तक विकसित यांत्रिकी में अनुमानित पूर्व कथन वास्तविक प्रेक्षण से भली–भाँति सामंजस्य रखते हैं।

प्रारंभिक गति विज्ञान (ELEMENTARY DYNAMICS)

16

16.1 भूमिका (Introduction)

गति विज्ञान, सामान्यतः गति का विज्ञान है। यदि हम एक कण की गति पर विचार करें तो इसे एक कण का गति विज्ञान कहते हैं। इसी प्रकार, यदि हम एक दृढ़ पिंड की गति का अध्ययन करते हों, तो इसे एक दृढ़ पिंड का गति विज्ञान कहते हैं। अतः गति विज्ञान में हम समय के परिवर्तन के साथ किसी निकाय (एक कण, कणों का एक निकाय, दृढ़ पिंड, प्रत्यस्थ पिंड, द्रव, गैस, विद्युत आवेश इत्यादि) के स्थान परिवर्तन (विस्थापन) से संबंधित स्थितियों पर विचार करते हैं। ये निकाय भौतिक हो सकते हैं या भौतिक नहीं भी हो सकते हैं; तथापि इस अध्याय में, हम प्रारंभिक गति विज्ञान के अध्ययन को केवल भौतिक निकायों तक ही सीमित रखेंगे अर्थात् एक कण का गति विज्ञान।

कण गति विज्ञान अनुप्रयुक्त गणित की, एक सबसे सरल और आकर्षक शाखा है। इसकी मौलिक अवधारणाओं का विस्तृत प्रयोग होता है। इसका अध्ययन अभियंताओं के लिए आवश्यक है, क्योंकि उनकी रुचि, कणों, पिंडों, प्रत्यस्थ पिंडों, द्रवों और गैसों आदि की गति से और जहाजों तथा वायुयानों के द्रवों और गैसों के माध्यम में गति से होती है। उसका अध्ययन खगोलज्ञों के लिए आवश्यक होता है, क्योंकि इसकी सहायता से, वे ग्रहों की गति का अध्ययन कर सकते हैं और ग्रहण के सही समय तथा स्थान की भविष्यवाणी कर सकते हैं। सुरक्षा से संबंधित व्यक्तियों के लिए इसका अध्ययन आवश्यक है, जिससे प्रक्षेपास्त्रों और रॉकेटों की गति पर विचार कर सकें। गति विज्ञान उनके लिए भी अनिवार्य है जिन्हें अंतरिक्ष उड़ानों में रुचि है, जिससे वे उपग्रहों और अन्य सभी अंतरिक्ष यानों के पथ, का गणना द्वारा, निर्धारण कर सकें, जिन्हें चंद्रमा या बाह्य अंतरिक्ष में भेजा जाता है।

गति विज्ञान का अध्ययन गणितज्ञों के लिए एक अन्य प्रकार से भी लाभप्रद रहा है। कलन की खोज, किसी सीमा तक, फरमैट (Fermat), न्यूटन (Newton) तथा अन्य द्वारा संतत गति को समझने के प्रयास के कारण सुसाध्य हुई।

गति विज्ञान की मौलिक अवधारणाओं पर इस अध्याय के अगले अनुच्छेद में, विचार किया जाएगा। उसके उपरांत एक कण की अचर त्वरण के प्रभाव में सरल रेखीय गति का अध्ययन किया जाएगा। प्रक्षेप्य की गति

का अध्ययन इस अध्याय का एक महत्त्वपूर्ण भाग है। सदिश, कलन और त्रिकोणमिति का ज्ञान, इस अध्याय के अध्ययन के लिए, अनिवार्य रूप से पूर्व आपेक्षित है।

16.2 गति विज्ञान की मौलिक संकल्पनाएँ (अवधारणाएँ) (Basic Concepts of Dynamics)

16.2.1 ***घटना, आकाश, काल और पदार्थ (Event, Space, Time and Matter)*** कुछ भी जो घटित होता है, उसे *घटना* कहते हैं; उदाहरणार्थ फुटबाल का एक खेल या एक तिपहिए को ढ़केलना।

आकाश (समष्टि) वह क्षेत्र है, जिसमें घटनाएँ घटित होती हैं।

एक घटना के घटित होने का केवल स्थान (स्थिति) ही नहीं होता है अपितु उसके घटित होने का समय (काल) भी होता है। अतः *काल (समय)*, घटनाओं के अनुक्रमण का माप होता है।

पदार्थ (द्रव्य) कुछ ऐसी वस्तु है, जो स्थान घेरती है तथा जिसकी अनुभूति हमारी ज्ञानेंद्रियों द्वारा हो सकती हैं।

16.2.2 ***निर्देश फ्रेम (Frame of reference)*** किसी घटना के घटित होने के साथ हम समय और स्थान का संबंध स्थापित करते हैं। उदाहरण के लिए किसी वायुयान के दुर्घटनाग्रस्त होने पर यह सामान्य बात है कि उस अक्षांश तथा देशांतर को रिकार्ड किया जाता है जिस पर दुर्घटना घटित होती है। साथ ही दुर्घटना का समय भी रिकार्ड किया जाता है।

यहाँ अक्षांश तथा देशांतर धरातल पर एक स्थान सुनिश्चित करते हैं और इसका निर्धारण पृथ्वी के तल पर कुछ स्थिर रेखाओं के संदर्भ में होता है।

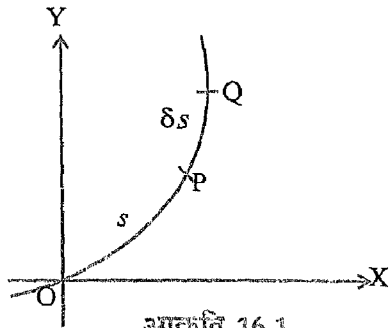
दूसरा उदाहरण, किसी निश्चित क्षण (समय) पर, एक कमरे में रखी मेज पर स्थित एक पुस्तक के स्थान पर विचार करने का है। पुस्तक की कमरे की दीवारों से दूरियों और फर्श से ऊँचाई के पदों में उसका स्थान पूर्णतया निर्धारित हो जाता है। उपर्युक्त दोनों में से प्रत्येक उदाहरण में एक पिंड है, जिसकी स्थिति (स्थान) का वर्णन हम करना चाहते हैं और प्रत्येक में एक निर्देश फ्रेम है, जो प्रतिवेश में स्थिर है। निर्देश फ्रेम के लिए यह आवश्यक है कि वह दृढ़ होना चाहिए।

हमारे गणितीय प्रतिमान (मॉडल) में, हम एक दृढ़ पिंड का प्रयोग निर्देश फ्रेम के रूप में करते हैं और इसमें समकोणिक निर्देशांक निर्धारित करके, किसी घटना के लिए तीन संख्याओं के एक समूह, जैसे – (x, y, z) को नियत कर देते हैं, जिन्हें निर्धारित निर्देश फ्रेम के संदर्भ में उस बिंदु का निर्देशांक कहते हैं, जहाँ घटना घटित होती है।

16.2.3 ***गति (Motion)*** गति और विराम सापेक्ष पद हैं। एक प्रेक्षक को जो वस्तु स्थिर प्रतीत होती है वही वस्तु एक अन्य प्रेक्षक को गतिमान प्रतीत हो सकती है। किसी पिंड की स्थिर अवस्था या गतिक अवस्था जितना पिंड पर निर्भर करती है उतना ही उसके निर्देश फ्रेम पर भी निर्भर करती है।

एक कण गतिक अवस्था में, जिन बिंदुओं से होकर जाता है, उन समस्त बिंदुओं (क्रमागत) के समूह को कण का पथ या प्रक्षेप-पथ कहते हैं। यदि यह पथ एक सरल रेखा है, तब गति को सरल रेखीय कहते हैं, अन्यथा गति को वक्ररेखीय कहते हैं।

16.2.4 *औसत चाल तथा तात्कालिक चाल* (*Average speed and instantaneous speed*) किसी गतिशील पिंड द्वारा दूरी तय करने की दर को उसकी (पिंड) *चाल* कहते हैं (इससे कोई अंतर नहीं पड़ता कि पिंड सरल रेखा में चल रहा है या वक्र रेखा में चल रहा है)। यदि t समय में कुल चली गई दूरी s है, तो *औसत चाल* (s/t) है।



आकृति 16.1

प्रत्येक क्षण, कण अपने पथ के किसी स्थान (बिंदु) पर होता है। मान लीजिए कि t क्षण पर कण की स्थिति P है और $(t + \delta t)$ क्षण पर उसकी स्थिति Q है। मान लीजिए कि कण के पथ पर O एक स्थिर बिंदु है और पथ के अनुदिश P और Q की O से दूरियाँ क्रमशः s और $(s + \delta s)$ हैं (आकृति 16.1)। अतः समय के लघु अंतराल δt में, कण द्वारा चली गई दूरी δs है और इस लघु अंतराल में, औसत चाल $\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right)$ है। यदि हम δt को घटाकर उत्तरोतर शून्य की ओर अग्रसर होने दें, तो

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta s}{\delta t}\right) \qquad (1)$$

इसे क्षण t पर (या स्थिति P पर) कण की तात्कालिक चाल कहते हैं।

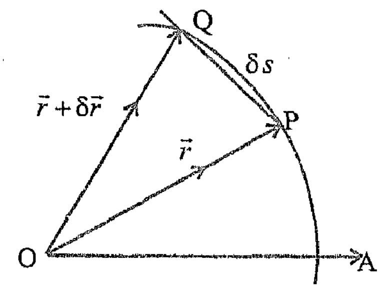
16.2.5 *विस्थापन* (*Displacement*) एक दिए हुए समय अंतराल में, किसी कण के स्थान परिवर्तन को, उस अंतराल में, कण का विस्थापन कहते हैं।

किसी कण का बिंदु P से बिंदु Q तक विस्थापन, संकेत $\overrightarrow{PQ}$ से निरूपित होता है। ध्यान दीजिए कि विस्थापन एक सदिश राशि है। इसके अतिरिक्त इसका संबंध कण की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों से है और P तथा Q के बीच कण के वास्तविक पथ के संबंध में कुछ भी नहीं कहा गया है।

16.2.6 *वेग* (*Velocity*) जैसा कि अनुच्छेद 15.2 में पहले ही परिभाषित किया जा चुका है, एक कण का, किसी क्षण, वेग उसके विस्थापन की दर को कहते हैं।

मान लीजिए कि O एक स्थिर (अचर) बिंदु है तथा OA प्रारंभिक रेखा है। पुनः मान लीजिए कि P और

Q कण की स्थितियाँ क्रमशः समय (क्षण) t और $t+\delta t$ पर हैं इस प्रकार समय अंतराल δt में विस्थापन $\overrightarrow{PQ}$ होता है। मान लीजिए कि आकृति 16.2 में



आकृति 16.2

$$\overrightarrow{OP} = \vec{r},\ \overrightarrow{OQ} = \vec{r} + \delta\vec{r}, \quad \text{अतः}\ \ \overrightarrow{PQ} = \delta\vec{r}$$

तब परिभाषा द्वारा, समय t पर कण का वेग $\vec{V}$ निम्न प्रकार है

$$\vec{V} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\vec{r}}{\delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \tag{1}$$

अब कण के वेग $\vec{V}$ का परिमाण निम्न प्रकार होगा

$$|\vec{V}| = \lim_{\delta t \to 0} \frac{|\delta\vec{r}|}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{|\delta\vec{r}|}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta t} \ (\text{यहाँ } \widehat{PQ} = \delta s)$$

$$= \frac{ds}{dt} \left(\text{क्योंकि } \lim_{Q \to P} \left(\frac{\text{जीवा } PQ}{\text{चाप } PQ} \right) = 1 \right) \tag{2}$$

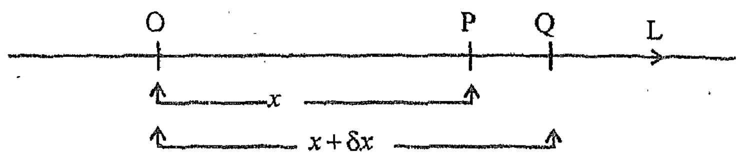
और $\vec{V}$ की दिशा, अर्थात् $\frac{d\vec{r}}{dt}$ की दिशा वही है जो $\overrightarrow{PQ}$ की दिशा है। जैसे-जैसे $\delta t \to 0,\ Q \to P$; और, सीमांत स्थिति में, $\vec{V}$ की दिशा वही होती है, जो कण के पथ के बिंदु P पर स्पर्शी की होती है।

अतः वेग का परिमाण, तात्कालिक चाल के तुल्य होता है और वेग की दिशा, कण-पथ के संबंधित बिंदु पर स्पर्शी के अनुदिश होती है।

यदि बिंदु P पर कण-पथ के अनुदिश $\hat{t}$ एकक सदिश है, तो बिंदु P पर वेग $\vec{V}$ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं $\vec{V} = \left(\frac{ds}{dt}\right)\hat{t}$ (3)

ध्यान देने योग्य है कि, सामान्यत: जब कण चलता है, तो उसके वेग का परिमाण $\frac{ds}{dt}$ और साथ ही साथ उसकी गति की दिशा, परिवर्तित हो सकती है। तथापि, एक सरल रेखा के अनुदिश गति के लिए, विस्थापन तथा वेग, सदैव उस रेखा के अनुदिश होते हैं।

मान लीजिए कि एक कण किसी सरल रेखा L के अनुदिश चलता है। मान लीजिए कि रेखा L पर O एक अचर (स्थिर) बिंदु है और मान लीजिए कि चर राशि x, t समय पर रेखा L पर कण P की स्थिति, निरूपित करता है, मान लीजिए कि रेखा L के अनुदिश $\hat{i}$ एकक सदिश है। यदि समय $t+\delta t$ पर कण की स्थिति Q है, मान लीजिए कि दूरी OQ, $x+\delta x$ है (आकृति 16.3)। तब



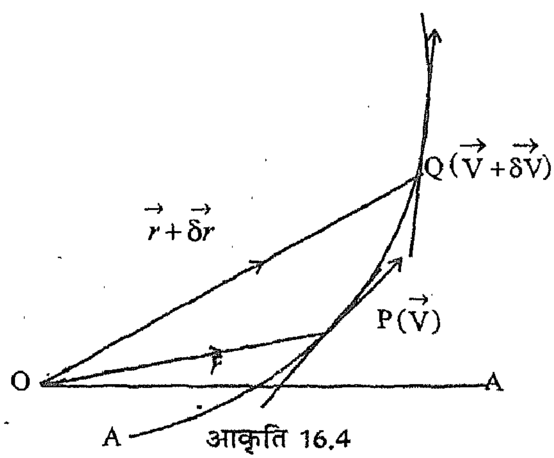
आकृति 16.3

$$\overrightarrow{OP} = x\hat{i}, \overrightarrow{OQ} = (x+\delta x)\,\hat{i}$$

अत: $\overrightarrow{PQ} = (\delta x)\,\hat{i}$ (क्योंकि $\hat{i}$ एक अचर सदिश है) (4)

और समय t पर कण P का वेग $\vec{V} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\hat{i}$; अर्थात् वेग कण के गति के रेखा के अनुदिश है।

16.2.7 ***त्वरण तथा मंदन (Acceleration and retardation)*** जैसा कि अनुच्छेद 15.2 में परिभाषित किया जा चुका है, वेग परिवर्तन की दर को त्वरण कहते हैं। मान लीजिए कि समय (क्षण) t और $t+\delta t$, पर कण की स्थितियाँ क्रमश: P और Q है। मान लीजिए $\vec{V}$ और $\vec{V}+\delta\vec{V}$; P और Q बिंदुओं पर वेग हैं। अत: समय अंतराल δt में, $\delta\vec{V}$ वेग में उत्पन्न परिवर्तन है (आकृति 16.4)। अत: परिभाषा के अनुसार, बिंदु P पर त्वरण $\vec{a}$ निम्न प्रकार होता है :



आकृति 16.4

$$\vec{a} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\vec{V}}{\delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

यदि समय t पर बिंदु P की स्थिति सदिश $\vec{r}$ है, तो $\vec{V}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ और $\vec{a}=\frac{d\vec{V}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ (1)

यदि कण एक सरल रेखा के अनुदिश गतिशील है, तो t समय पर कण की स्थिति सदिश $\vec{r}$ वेग $\vec{V}$ और त्वरण $\vec{a}$ सभी एक ही दिशा में है, अतः आकृति 16.3 द्वारा

$$\vec{r}=x\hat{i},\vec{V}=\frac{dx}{dt}\hat{i} \text{ और } \vec{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} \quad (2)$$

त्वरण निम्न प्रकार से भी प्राप्त हो सकता है

$$\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{V})=\left(\frac{dV}{dx}.\frac{dx}{dt}\right)\hat{i}=\left(V\frac{dV}{dx}\right)\hat{i} \quad (3)$$

अतः किसी रेखा के अनुदिश गतिमान एक कण के त्वरण को $\frac{dV}{dt},\frac{d^2x}{dt^2}$ या $V\frac{dV}{dx}$, द्वारा प्रकट किया जा सकता है, जहाँ दूरी x, कण की गति की दिशा के अनुदिश ली जाती है।

ऋणात्मक त्वरण को मंदन कहते हैं। मंदन में वेग के परिमाण का ह्रास होना (घटना) अंतर्निहित होता है, उदाहरणार्थ किसी गोल चक्कर पर एक कार का त्वरण उसकी गति की दिशा के विपरीत (विरुद्ध) कार्य करता है अथवा जब एक कण *ऊर्ध्वाधर* (ऊपर की ओर) फेंका जाता है तो गुरुत्वीय त्वरण ऊपर की ओर हो रही गति के विपरीत (प्रतिकूल) कार्य करता है। अतः दोनों ही मंदन के उदाहरण हैं।

16.2.8 *वेगों का संयोजन तथा वियोजन* (*Composition and resolution of velocities*) किसी चलती हुई ट्रेन में दौड़ते हुए एक बालक पर विचार कीजिए। बालक एक ही समय में दो स्वतंत्र वेगों के प्रभाव में है – एक वेग उसके अपने प्रयास (दौड़ने के) तथा दूसरा वेग ट्रेन की गति द्वारा। पुनः नदी में चलती हुई किसी नाव पर रेंगते हुए एक कीड़े पर विचार कीजिए। इस दशा में कीड़े पर तीन समकालिक स्वतंत्र वेग लगे हुए हैं – पहला उसके रेंगने के द्वारा, दूसरा नाव के स्थिर जल में वेग के द्वारा और तीसरा नदी में पानी की गति (बहाव) के द्वारा। अतः बालक अथवा कीड़े का किसी निर्देश फ्रेम के संदर्भ में, वास्तविक वेग उन पर लगे इन समकालिक किंतु स्वतंत्र वेगों के संयोजन द्वारा प्राप्त होता है।

अतः यदि किसी कण पर दो या अधिक समकालिक बल कार्य कर रहे हैं तो वह एक ही समय पर दो या अधिक दिशाओं में नहीं चल सकता है। कण किसी निश्चित (अचर) दिशा में और किसी निश्चित वेग से गति करेगा। कण पर कार्यरत इस वेग को दो या अधिक वेगों का *परिणामी वेग* कहते हैं और प्रारंभ में लगे दो या अधिक वेगों को परिणामी वेग के *घटक वेग* कहते हैं।

क्योंकि दो सदिशों के योग के लिए समांतर चतुर्भुज नियम एक ज्यामितीय रचना की विधि उपलब्ध कराता है, इसलिए, दो वेगों के संयोजन की उपर्युक्त परिभाषा निम्न प्रकार प्रस्तुत की जा सकती है।

वेगों का समांतर चतुर्भुज नियम *यदि एक गतिमान कण के दो समकालिक वेग हों, जो किसी बिंदु से खींची गई एक समांतर चतुर्भुज की दो भुजाओं से, परिमाण और दिशा में, निरूपित होते हों, तो उनका परिणामी वेग उस वेग के समतुल्य होता है, जो परिमाण तथा दिशा में, उस बिंदु से जाने वाले समांतर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होता है।*

परिणामी वेग का परिमाण तथा दिशा मान लीजिए कि बिंदु O पर स्थित एक कण के $\vec{u}$ और $\vec{v}$ वेग सदिश हैं और मान लीजिए कि उनके बीच का कोण α है। तब यदि $\vec{V}$ परिणामी वेग है तो,

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v}$$

मान लीजिए कि OACB समांतर चतुर्भुज है, जिसमें

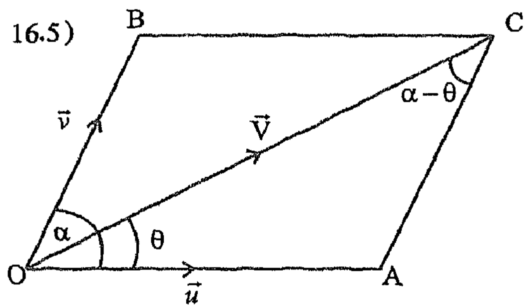
$$\vec{OA} = \vec{u}, \vec{OB} = \vec{v} \text{ और } \angle AOB = \alpha \text{ (आकृति 16.5)}$$

तब वेग-समांतर चतुर्भुज नियम से

$$\vec{V} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{OC}$$

अब, $\angle OAC = \pi - \angle AOB = \pi - \alpha$

अत:, ΔOAC द्वारा



आकृति 16.5

$$OC^2 = OA^2 + AC^2 - 2OA.AC.\cos\angle OAC$$

$$= OA^2 + OB^2 + 2OA.OB.\cos\alpha \text{ (क्योंकि } AC = OB, \angle OAC = \pi - \alpha)$$

अत: $\quad V^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha$ अर्थात् $|\vec{V}| = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$ (1)

परिणामी की दिशा के लिए, मान लीजिए कि $\vec{V}\left(\text{अर्थात् } \vec{OC}\right)$ $\vec{u}\left(\text{अर्थात् } \vec{OA}\right)$ से कोण θ बनाती है। इस प्रकार ΔOAC, से हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$\frac{AC}{\sin\theta} = \frac{OA}{\sin(\alpha-\theta)}, \text{ या } \frac{v}{\sin\theta} = \frac{u}{\sin(\alpha-\theta)}, \text{ अर्थात् } \tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} \quad (2)$$

सूत्र (1) तथा (2) से क्रमशः परिणामी वेग का परिमाण और उसकी दिशा प्राप्त होती है।

उपर्युक्त सूत्र (1) और (2) द्वारा हम वेगों के संयोजन के कुछ विशेष दशाओं के फलों (परिणामों) को लिख सकते हैं। [ये परिणाम इस पुस्तक के अध्याय 15 के अनुच्छेद 15.3 में वर्णित बलों के परिणामी बलों के सदृश हैं।]

दशा I जब $\vec{u}$ और $\vec{v}$ एक-दूसरे पर लंब हैं

यहाँ $\alpha = \frac{\pi}{2}$, अतः $V = \sqrt{u^2 + v^2}$, और $\tan\theta = \frac{v}{u}$

दशा II तब $\vec{u}$ और $\vec{v}$ समान दिशा में हैं

यहाँ $\alpha = 0$, अतः $V = u + v$ और $\theta = 0$, अर्थात् परिणामी वेग का परिमाण उसके घटकों के परिमाण के योग के बराबर होता है और परिणामी वेग की दिशा वही होती है जो $\vec{u}$ और $\vec{v}$ की है। इस दशा में परिणामी वेग का परिमाण *महत्तम* होता है।

दशा III जब $\vec{u}$ और $\vec{v}$ विपरीत दिशाओं में हैं

यहाँ $\alpha = \pi$, अतः $V^2 = (u - v)^2$ और $\theta = 0$ यदि $u > v$, तो $V = u - v$ तथा $\vec{V}$, $\vec{u}$ की दिशा में होता है और यदि $u < v$ तो $V = v - u$ तथा $\vec{V}$, $\vec{v}$ की दिशा में होता है। इन दशाओं में परिणामी वेग का परिमाण *न्यूनतम* होता है।

दशा IV जब $\vec{u}$ और $\vec{v}$ बराबर परिमाण के हैं

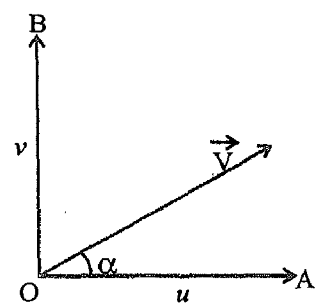
यहाँ $u = v$, अतः $V = \sqrt{u^2 + u^2 + 2u^2 \cos\alpha} = 2u\cos\frac{\alpha}{2}$, और $\tan\theta = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$

अतः परिणामी वेग की दिशा दो घटक वेगों के बीच के कोण को समद्विभाजित करती है।

दो परस्पर लंब दिशाओं में किसी वेग के घटक वेग मान लीजिए कि OA और OB दो परस्पर लंब दिशाएँ हैं। यदि बिंदु O पर V परिमाण का वेग $\vec{V}$, OA से अर्थात् क्षैतिज दिशा से α कोण पर झुका है (आकृति 16.6), तो

$$u = V\cos\alpha \text{ और } v = V\sin\alpha$$

को वेग $\vec{V}$ का क्रमशः क्षैतिज तथा ऊर्ध्वाधर घटक कहते हैं।



आकृति 16.6

16.2.9 *यांत्रिकी के मूलभूत नियम* (*Fundamental laws of mechanics*) मान लीजिए कि हम किसी दिए गए निर्देश फ्रेम के सापेक्ष एक कण की गति का अवलोकन कर रहे हैं जिस पर एक बल $\vec{F}$ कार्यरत है। हमारे मन में एक प्रश्न उठता है कि क्या बल $\vec{F}$ और m द्रव्यमान के कण के त्वरण $\vec{a}$ के बीच कोई संबंध है? इस जिज्ञासा का उत्तर निम्नलिखित नियम द्वारा प्राप्त होता है :

(i) गति का नियम किसी मूल निर्देश फ्रेम के सापेक्ष m द्रव्यमान का एक कण, बल $\vec{F}$ के प्रभाव में, निम्नलिखित समीकरण के अनुसार गति करता है,

$$\vec{F} = km\vec{a}, \qquad (1)$$

जहाँ $\vec{a}$ कण का t समय पर त्वरण है तथा k एक सार्वभौमिक स्थिरांक है।

कोई निर्देश फ्रेम जो समीकरण (1) के संदर्भ में लागू होता है, *न्यूटोनियन निर्देश फ्रेम* कहलाता है।

यदि $\vec{F} = 0$, तो समीकरण (1) से, $\vec{a} = 0$ चूंकि $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$, अतः $\vec{V} =$ अचर राशि। इस प्रकार *एक कण जिस पर किसी बल का प्रभाव नहीं है, एक अचर (स्थिर) वेग से चलता है*, अर्थात् यह एक सरल रेखा में अचर चाल से चलता है।

इस महत्त्वपूर्ण विशेष दशा को *न्यूटन का गति का प्रथम नियम* कहते हैं, जबकि उसका गति का द्वितीय नियम उस स्थिति (दशा) से संबंध रखता है जिसमें $\vec{F}$ शून्य नहीं है। अतः न्यूटन के गति के प्रथम दो नियम, गति के नियमों के अंतर्गत आते हैं, जैसा कि ऊपर व्यक्त है।

हम द्रव्यमान, लंबाई (दूरी), समय और बल की इकाइयों को इस प्रकार चुनते हैं जिससे $k = 1$ होता है। इस प्रकार से चुनी गई इकाइयों को *गतिक (गत्यात्मक) इकाइयाँ* कहते हैं। और तब समीकरण (1) का रूप निम्नलिखित हो जाता है,

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2)$$

(ii) क्रिया और प्रतिक्रिया का नियम जब दो कण एक दूसरे पर बल लगाते हैं, तब इन बलों के परिमाण समान (बराबर) होते हैं और इनकी दिशाएँ विपरीत होती हैं तथा ये बल कणों को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं। इस नियम को बहुधा संक्षेप में निम्नलिखित प्रकार से व्यक्त करते हैं :

क्रिया और प्रतिक्रिया बराबर और विपरीत होती हैं।

उदाहरण 1 एक कण पर 15 मी/से और 20 मी/से के दो वेग एक समय पर साथ-साथ लगे हैं, जो एक दूसरे से 120^0 पर झुके हैं। परिणामी वेग का परिमाण तथा दिशा ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि $u = 15$ मी/से और $v = 20$ मी/से

मान लीजिए कि परिणामी वेग का परिमाण V है। अत:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\cos\alpha}$$

$$= \sqrt{225 + 400 + 2 \times 15 \times 20 \times \cos 120^\circ} = \sqrt{325} = 5\sqrt{13}$$

इसलिए परिणामी वेग का परिमाण $5\sqrt{13}$ मी/से है। पुन: मान लीजिए कि परिणामी वेग, u की दिशा से θ कोण बनाता है।

अत: $$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u + v\cos\alpha} = \frac{20\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{15 + 20\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}$$

अर्थात् $$\theta = \tan^{-1}\left(2\sqrt{3}\right)$$

उदाहरण 2 समय t पर, एक क्षैतिज रेखा में चल रही किसी कण द्वारा चली गई दूरी x सेमी, $x = 4t^2 + 2t$ द्वारा प्राप्त होती है। कण का $t = 0.5$ सेकंड पर वेग तथा त्वरण ज्ञात कीजिए।

हल यहाँ $x = 4t^2 + 2t$

अत: समय t पर वेग $= v = \dfrac{dx}{dt} = 8t + 2$

तथा त्वरण $t = a = \dfrac{dv}{dt} = 8$

जब $t = 0.5$ से, तो $= (8t+2)_{t=0.5} = 8 \times (0.5) + 2 = 6$ सेमी प्रति सेकंड

और त्वरण $= (8)_{t=0.5} = 8$ सेमी प्रति से^{2}

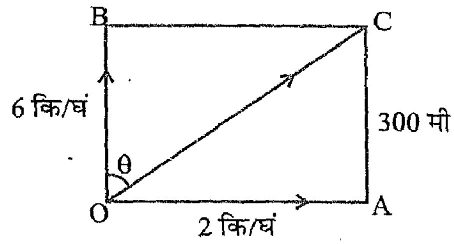
उदाहरण 3 2 किमी प्रति घंटा के वेग से बहने वाली किसी नदी के सीधे पार एक नौका 6 किमी/घं के वेग से खेयी जा रही है। यदि नदी की चौड़ाई 300 मीटर है, तो ज्ञात कीजिए क मूल लक्ष्य बिंदु से, बहाव की ओर, कितने नीचे नौका दूसरे किनारे पर पहुँचेगी?

हल माना कि OA दिशा में बह रही नदी की चौड़ाई OB है (आकृति 16.7)। इसलिए

$$OB = AC = 300 \text{ मी}$$

माना कि नौका मूलरूप से (प्रारंभ में) बिंदु O से बिंदु B की ओर निर्दिष्ट थी और माना कि $\angle BOC = \theta$ परिणामी वेग और OB के बीच का कोण

$$\tan\theta = \frac{2\sin 90^\circ}{6+2\cos 90^\circ} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



आकृति 16.7

अतः $\qquad \dfrac{BC}{OB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow BC = \dfrac{OB}{3} = \dfrac{300}{3} = 100 \text{मी}$

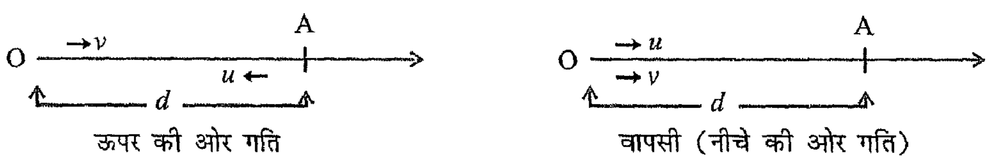
अतएव मूल लक्ष्य बिंदु से, बहाव की ओर, 100 मीटर नीचे नौका दूसरे किनारे पर पहुँचेगी।

उदाहरण 4 एक स्टीमर नदी में ऊपर की ओर (प्रवाह के विपरीत दिशा में) d दूरी तय करने में t_1 समय लेता है और लौटने में t_2 समय लेता है। सिद्ध कीजिए कि स्टीमर की चाल $d(t_1+t_2)/(2t_1t_2)$ है।

हल मान लिया कि स्थिर जल में स्टीमर की चाल u है और नदी के जल के प्रवाह की चाल v है।

अतः नदी में ऊपर की ओर, जल के प्रवाह के विपरीत, स्टीमर की वास्तविक चाल $u - v$ है और लौटते समय उसकी वास्तविक चाल $u + v$ है (आकृति 16.8 और आकृति 16.9)।

इस प्रकार प्रश्नानुसार



आकृति 16.8 आकृति 16.9

$$\frac{d}{u-v} = t_1 \quad \text{अर्थात्} \quad u - v = \frac{d}{t_1} \tag{1}$$

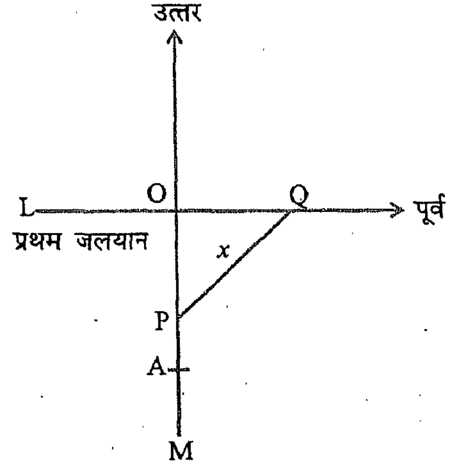
और
$$\frac{d}{u+v} = t_2 \quad \text{अर्थात्} \quad u + v = \frac{d}{t_2} \tag{2}$$

(1) और (2) को जोड़ने पर,

$$u = \text{स्थिर पानी में स्टीमर की चाल} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{t_1}+\frac{d}{t_2}\right)=\frac{d(t_1+t_2)}{2t_1t_2}$$

उदाहरण 5 एक जलयान, 15 किमी प्रति घंटे की चाल से, पूर्व दिशा में यात्रा कर रहा है और किसी बिंदु से होकर दोपहर 12 बजे गुजरता है; एक दूसरा जलयान, उत्तर दिशा में समान चाल से यात्रा कर रहा है और उसी बिंदु से होकर अपराह्न 1.30 बजे गुजरता है। कितने बजे दोनों जलयान परस्पर सबसे अधिक निकट होंगे और उस समय उनके बीच की दूरी कितनी होगी?

हल मान लिया कि O वह निश्चित (स्थिर) बिंदु है, जिससे होकर पहला जलयान दोपहर 12 बजे और दूसरा जलयान अपराह्न 1.30 बजे गुजरते हैं। मान लिया कि L और M क्रमशः पहले तथा दूसरे जलयानों के यात्रा आरंभ करने वाले स्थान हैं। मान लिया कि दोपहर 12 बजे दूसरा जलयान A पर है। इस प्रकार AO =15 × 1.5 = 22.5 किमी। मान लिया कि किसी समय t (घंटा) पर पहला जलयान Q पर, बढ़ाई गई LO के अनुदिश (पूर्व दिशा की ओर) और दूसरा जलयान P पर, MO के अनुदिश (उत्तर की ओर) हैं तथा मान लिया कि PQ = x और समय t घंटे दोपहर बाद (आकृति 16.10)।



आकृति 16.10

तब OP = OA – 15t = (22.5 – 15t) और OQ = 15t

$$\text{अतः}\ PQ^2 = x^2 = OP^2 + OQ^2 = \left\{15^2\left(\frac{3}{2}-t\right)^2+(15t)^2\right\}$$

$$=(15)^2\left[\frac{9}{4}-2.\frac{3}{2}.t+t^2+t^2\right]$$

$$=2.(15)^2\left[t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{8}\right]=2(15)^2\left[\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{9}{16}\right]$$

क्योंकि किसी संख्या का वर्ग ऋणात्मक नहीं हो सकता है, अतः इसका न्यूनतम मान शून्य होता है।

अतएव x का मान न्यूनतम तब होगा, जब $t-\frac{3}{4}=0$, अर्थात् $t=\frac{3}{4}$ घंटा और उस मसय

$$x=\sqrt{2}.15.\sqrt{\frac{9}{16}}=\sqrt{2}.15.\frac{3}{4}=15.9 \text{ किमी (निकटतम)}$$

प्रश्नावली 16.1

1. एक मनुष्य उत्तर पूर्व दिशा में 3 किमी की दूरी 6 किमी प्रति घंटे की दर से और फिर दक्षिण पूर्व दिशा में 4 किमी की दूरी 2 किमी प्रति घंटे की दर से चलता है। पूरी यात्रा के लिए मनुष्य की औसत चाल ज्ञात कीजिए।

2. यदि किसी गतिमान कण द्वारा t सेकंड में चली गई दूरी $x=2t^3-9t^2+5t+8$ से प्राप्त होती है। ज्ञात कीजिए कि कण का त्वरण कब शून्य होगा। उस क्षण कण का वेग भी ज्ञात कीजिए।

3. एक कार 30 मी प्रति से के वेग से चल रही है और कोई व्यक्ति कार के फर्श पर एक गेंद को, कार की गति के दिशा के लंबवत् 10 मी प्रति से के वेग से लुढ़काता है। गेंद का परिणामी वेग ज्ञात कीजिए।

4. एक कण 7 मी प्रति से 8 मी प्रति से और 13 मी प्रति से के तीन समकालिक वेगों के प्रभाव में विरामावस्था में है। दो छोटे वेगों की दिशाओं के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

5. एक मनुष्य किसी नौका को एक नदी के सीधे ऊपर, t समय में खेता है और प्रवाह के विपरीत ऊपर की ओर समान दूरी T समय में खेता है। सिद्ध कीजिए कि नौका की शांत जल में चाल और जल प्रवाह की चाल के बीच $\left(T^2-t^2\right):\left(T^2+t^2\right)$ का अनुपात है।

6. किसी बहती नदी को एक मनुष्य t_1 समय में नौका पर पार करता है और नीचे की ओर प्रवाह की दिशा में समान दूरी t_2 समय में तय करता है। यदि स्थिर जल में मनुष्य का वेग u हो, और नदी के प्रवाह का वेग v हों, तो दर्शाइए कि $t_1:t_2=\sqrt{u+v}:\sqrt{u-v}$

7. एक कण परिमाण 4, 3, 2 और 1 के समकालिक वेगों के प्रभाव में है; प्रथम और द्वितीय के मध्य $30°$ का कोण है तथा द्वितीय और तृतीय के मध्य $90°$ का कोण है तथा तृतीय और चतुर्थ के बीच $120°$ का कोण है; इन वेगों का परिणामी वेग ज्ञात कीजिए।

8. 4 किमी / घं की दर से चलने वाले एक मनुष्य को वर्षा की बूँदें ऊर्ध्वाधर दिशा में गिरती हुई प्रतीत होती हैं। यदि वर्षा का वास्तविक वेग 8 किमी / घं प्रति घंटा है तो वर्षा की वास्तविक दिशा ज्ञात कीजिए।

9. एक ध्वंसक, 24 किमी प्रति घंटा की दर से उत्तर दिशा की ओर पानी में चलते हुए, किसी समुद्री वायुयान वाहक

को अपने पूर्व की ओर 16 किमी की दूरी पर देखता है, जो पश्चिम दिशा की ओर 32 किमी प्रति घंटा की दर से चल रहा है। कितने समय के पश्चात् वे परस्पर न्यूनतम दूरी पर हैं और यह न्यूनतम दूरी कितनी है?

10. दो जलयान, प्रत्येक 15 किमी / घं के वेग से चलते हुए, एक 9 किमी / घं के वेग से प्रवाहित 1.5 किमी चौड़ी नदी को पार करते हैं। एक जलयान न्यूनतम दूरी वाले पथ से और दूसरा जलयान न्यूनतम समय में नदी को पार करते हैं। यदि दोनों जलयान एक साथ चलना प्रारंभ करते हैं, तो नदी के दूसरे किनारे पर उनके पहुँचने के समयों के बीच का अंतराल ज्ञात कीजिए।

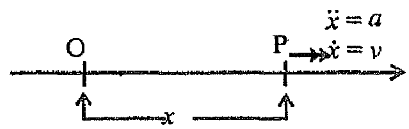
16.3 कण की सरल रेखीय गति (Rectilinear Particle Motion)

अब हम, एक सरल रेखा में गतिमान एक कण पर गति के नियमों के अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे। दो महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग नीचे दिए गए हैं :

(i) जब कण किसी क्षैतिज समतल पर एक सरल रेखा में अचर त्वरण से गति करता है और

(ii) जब कण ऊर्ध्वाधर समतल में गुरुत्व के अधीन गति करता है।

16.3.1 ***अचर / समान त्वरण के अधीन किसी कण की एक सरल रेखा में गति (Motion of a particle in a straight line with constant / uniform acceleration)*** मान लिया कि अचर परिमाण m का एक कण एक सरल रेखा में अचर त्वरण से चल रहा है। मान लिया कि O सरल रेखा पर एक स्थिर (अचर) बिंदु है। मान लिया कि समय t पर कण की स्थिति P है और $OP = x$ पुनः मान लिया कि v और a क्रमशः t समय पर, OP की दिशा में वृद्धि करते हुए कण के वेग और अचर त्वरण को निरूपित करते हैं (आकृति 16.11)।



आकृति 16.11

अतः: $v = \dot{x}$ और $a = \ddot{x}$,

तथा $a = \dfrac{dv}{dt}$ और $a = \dfrac{dv}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt} = v\dfrac{dv}{dx}$

बाद वाला सूत्र उस दशा में विशेष उपयोगी होता है जब वेग और दूरी के बीच संबंध दिया हो।

क्योंकि हम अचर त्वरण के आधीन गति पर विचार कर रहे हैं, अतः

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a, \text{ एक अचर राशि} \qquad (1)$$

t के सापेक्ष समाकलन करने पर, हमें प्राप्त होता है कि

$$v = \frac{dx}{dt} = at + A \qquad (2)$$

तथा $$x = \frac{1}{2}at^2 + At + B, \tag{3}$$

जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं

मान लिया कि $t = 0$ पर $x = 0$ और $v = u$, तब (2) और (3) द्वारा

$$u = 0 + A \text{ और } 0 = 0 + 0 + B$$

अत: सूत्र (2) और (3) निम्नलिखित रूप ले लेते हैं

$$v = u + at \tag{4}$$

$$x = ut + \frac{1}{2}at^2 \tag{5}$$

पुन: त्वरण के लिए निम्नलिखित सूत्र के प्रयोग द्वारा $v\frac{dv}{dx} = a$

$$v\frac{dv}{dx} = a \text{ (एक स्थिरांक)} \tag{6}$$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$v^2 = 2ax + c$, जहाँ c एक स्वेच्छ अचर है।

अब $t = 0$ पर $x = 0$; $v = u$, अत: (6) द्वारा

$$u^2 = 0 + c$$

अत: $$v^2 = u^2 + 2ax \tag{7}$$

सूत्र (4), (5) और (7) कण की गति को वर्णित करने वाले समीकरण हैं।

दशा I विरामावस्था से समान त्वरण के अधीन गति

यहाँ $t = 0$ पर $u = 0$, अत: गति को वर्णित करने वाले सूत्र (4), (5) और (7) निम्न प्रकार होंगे :

$$v = at; \tag{8}$$

$$x = \frac{1}{2}at^2; \tag{9}$$

और $$v^2 = 2ax \tag{10}$$

दशा 2 किसी समय अंतराल में औसत वेग

यदि $t = 0$ पर एक कण प्रारंभिक वेग u से अचर त्वरण के आधीन चलता है, तो समय t पर वेग v नीचे दिए सूत्र के अनुसार होता है।

$$v = u + at \qquad \text{[सूत्र (4) से]}$$

अतः औसत वेग $= \dfrac{u+v}{2} = \dfrac{u+u+at}{2} = u + \dfrac{1}{2}at$

दशा 3 *n*वें सेकंड में चली दूरी

मान लिया कि n सेकंड के अंत में O से P की दूरी x_n द्वारा निरूपित होती है।

तब समीकरण (5) से

$$x_n = u.n + \frac{1}{2}an^2 \text{ और } x_{n-1} = u(n-1) + \frac{1}{2}a(n-1)^2$$

अतः nवें सेकंड में चली दूरी $= x_n - x_{n-1}$

$$= u.n + \frac{1}{2}an^2 - u(n-1) - \frac{1}{2}a(n-1)^2 = u + \left(n - \frac{1}{2}\right)a$$

उदाहरण 6 72 किमी प्रति घं की दर से वाहन चलाते हुए एक ट्रक चालक को 100 मीटर आगे लाल बत्ती दिखाई देती है। वह ट्रक रोकने के लिए तुरंत ब्रेक लगाता है। समान मंदन के अधीन ट्रक के वेग में लगातार मंदन होता है और यह लाल बत्ती के निकट ठीक लाल रेखा पर रुक जाता है। ट्रक रोकने में चालक को कितना समय लगा?

हल यहाँ प्रारंभिक वेग $= u = 72$ किमी / घं $= 20$ मी / से

मान लिया कि मंदन a मी / से^{2} है। क्योंकि ट्रक 100 मीटर की दूरी चल कर रुक जाती है, इसलिए

$$v^2 = u^2 - 2as$$

या $\qquad 0^2 = 20^2 - 2a \times 100$ या $a = 2$मी / से^{2}

मान लिया कि ट्रक रुकने में t सेकंड का समय लेता है। तब

$$v = u - at \text{ या } 0 = 20 - 2t$$

या $\qquad t = 10$ सेकंड

उदाहरण 7 समान त्वरण के प्रभाव में चल रहा एक कण 10 वें सेकंड में 600 मीटर और 12 वें सेकंड में 720 मीटर की दूरियाँ तय करता है। कण का प्रारंभिक वेग ज्ञात कीजिए।

हल मान लिया कि प्रारंभिक वेग u मी / से और त्वरण a मी / से^{2} है। तब

$$x_{10} = 600 \Rightarrow u + \frac{a}{2}(2\times 10 - 1) = 600, \text{ या, } u + \frac{19}{2}a = 600 \qquad (1)$$

और
$$x_{12} = 720 \Rightarrow u + \frac{a}{2}(2\times 12 - 1) = 720, \text{ या, } u + \frac{23}{2}a = 720 \qquad (2)$$

(1) और (2) से, $2a = 120$, या $a = 60$ मी / से^{2}

a के इस मान को समीकरण (1) में रखने से

$$u + \frac{19}{2}\times 60 = 600, \text{ या, } u + 570 = 600, \text{ या, } u = 30 \text{ मी / से}$$

उदाहरण 8 एक रेलगाड़ी, जो 60 किमी प्रति घंटे की दर से चल रही है, समान मंदन के अधीन 3 मिनट में रोकी जाती है। मंदन ज्ञात कीजिए तथा वह दूरी भी ज्ञात कीजिए जो रेलगाड़ी विश्राम में आने से पूर्व चलती है।

हल यहाँ प्रारंभिक वेग $u = 60$ किमी प्रति घं $= \dfrac{60\times 1000}{60\times 60} = \dfrac{50}{3}$ मी/से

मान लिया कि रेलगाड़ी का त्वरण a है। यह दिया है कि $t = 3$ मिनट $= 180$ सेकंड, जिसमें $\dfrac{50}{3}$ मी / से के वेग को समाप्त कर दिया जाता है। अतः $v = 0$ जब $u = \dfrac{50}{3}$ और $t = 180$, अतः

$$0 = \frac{50}{3} + a(180), \left(\text{क्योंकि } v = u + at\right)$$

या
$$a = -\frac{5}{54} \text{ मी/से}^2$$

यहाँ a का मान ऋण है क्योंकि यह मंदन है।

मान लिया कि विरामावस्था में आने से पूर्व रेलगाड़ी x दूरी तय करती है। अतः

$$0=\left(\frac{50}{3}\right)^2+2\left(-\frac{5}{54}\right)x \qquad (\text{चूंकि } v^2=u^2+2ax)$$

अर्थात् $\quad x = 1500$ मी

उदाहरण 9 एक कण एक सरल रेखा में समान त्वरण से चलता है तथा t_1, t_2 और t_3, पर इसकी मूल बिंदु O (आवश्यक नहीं कि यह $t=0$ पर कण की स्थिति हो) से दूरियाँ क्रमशः d_1, d_2 और d_3, हैं। सिद्ध कीजिए कि यदि t_1, t_2, t_3 एक समांतर श्रेढ़ी में हों, जिसका सर्वान्तर d है और d_1, d_2 और d_3 गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तो त्वरण $\dfrac{\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2}{d^2}$ है।

हल मान लिया कि कण किसी बिंदु A से चलना प्रारंभ करता है, जहाँ A की मूल बिंदु O से दूरी α है और तब कण का प्रारंभिक वेग u है। मान लिया कि कण का समान त्वरण a है। तब

$$d_1=\alpha+ut_1+\frac{1}{2}at_1^2 \qquad \left(\text{क्योंकि } x=ut+\frac{1}{2}at^2+\alpha \text{ जबकि } t=0, x=\alpha\right)$$

$$d_2=\alpha+ut_2+\frac{1}{2}at_2^2$$

$$d_3=\alpha+ut_3+\frac{1}{2}at_3^2$$

क्योंकि t_1, t_2, t_3 समांतर श्रेढ़ी में हैं, अतः $t_1+t_3=2t_2$, a और u को विलुप्त करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$d_1+d_3-2d_2=\frac{1}{2}a\left(t_1^2+t_3^2-2t_2^2\right)$$

या
$$a=\frac{2\left(d_1+d_3-2d_2\right)}{\left(t_1^2+t_3^2-2t_2^2\right)} \qquad (1)$$

किंतु d_1, d_2, d_3 गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, अतः $d_2=\sqrt{d_1 d_3}$

अतएव $d_1+d_3-2d_2=d_1+d_3-2\sqrt{d_1 d_3}=\left(\sqrt{d_1}-\sqrt{d_3}\right)^2 \qquad (2)$

यह भी दिया है कि t_1, t_2, t_3 सर्वांतर d वाले समांतर श्रेढ़ी में हैं। अतः

$$t_1^2 + t_3^2 - 2t_2^2 = \left(t_1^2 - t_2^2\right) + \left(t_3^2 - t_2^2\right)$$

$$= -d\left(t_1 + t_2\right) + d\left(t_3 + t_2\right)$$

$$= d\left(t_3 - t_1\right) = d.2d = 2d^2 \qquad (3)$$

समीकरण (1), (2) और (3) द्वारा

$$a = \frac{2\left(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3}\right)^2}{2d^2} = \frac{\left(\sqrt{d_1} - \sqrt{d_3}\right)^2}{d^2}$$

उदाहरण 10 दो कारें एक दौड़ में भाग लेने के लिए प्रारंभिक वेग u तथा v से चलना शुरू करती हैं। वे एक सरल रेखा में अचर त्वरण क्रमशः α तथा β के अधीन चलती हैं। यदि दौड़ बराबरी पर समाप्त होती हैं, तो सिद्ध कीजिए कि दौड़ प्रतियोगिता के पथ की लंबाई

$$\frac{2(u-v)(u\beta - v\alpha)}{(\alpha-\beta)^2} \text{ है।}$$

हल मान लिया कि t समय में प्रत्येक कार द्वारा चली गई दूरी x है। जिस बिंदु से दूरियाँ नापी जाती हैं उसे प्रतियोगिता के प्रारंभ होने का बिंदु मानने पर, प्रश्नानुसार

$$x = ut + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

और
$$x = vt + \frac{1}{2}\beta t^2 \qquad (2)$$

और
$$ut + \frac{1}{2}\alpha t^2 = vt + \frac{1}{2}\beta t^2 \quad \text{या} \quad (u-v).t = \frac{1}{2}(\beta - \alpha).t^2$$

अतः या तो $t = 0$

अथवा
$$t = \frac{2(u-v)}{\beta - \alpha} \quad (t = 0 \text{ प्रतियोगिता प्रारंभ होने का समय}) \qquad (3)$$

(1) और (3) से

$$x = \frac{u.2(u-v)}{\beta-\alpha} + \frac{1}{2}\alpha \frac{2^2(u-v)^2}{(\beta-\alpha)^2} = \frac{2(u-v)\left[u(\beta-\alpha) + \alpha(u-v)\right]}{(\beta-\alpha)^2}$$

$$= \frac{2(u-v)(u\beta - v\alpha)}{(\alpha-\beta)^2}$$

प्रश्नावली 16.2

1. एक पिंड का किसी क्षण (समय) पर वेग 25 मी / से है। इस क्षण से 10 सेकंड पश्चात् वेग बढ़कर 55 मी / से हो जाता है। यदि वेग समान रूप से बढ़ता है, तो पिंड द्वारा चली गई दूरी ज्ञात कीजिए।

2. किसी समय t पर, एक सरल रेखा में गतिमान कण द्वारा चली गई दूरी x समीकरण $x = 4t^2 - 2t$ से प्राप्त होती है समय $t = 1.5$ से पर कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

3. एक कण 10 सेमी / से के वेग से चलना प्रारंभ करता है और 30 सेकंड में 150 सेमी की दूरी तय करता है। कण का मंदन ज्ञात कीजिए।

4. समान त्वरण के अधीन गतिमान एक कार टेलीफोन के दो खंभों से क्रमशः 10 किमी / घं और 20 किमी / घं के वेगों से होकर गुजरती है। कार के उस समय का वेग ज्ञात कीजिए जब वह दोनों खंभों के ठीक मध्य में है।

5. एक बिंदु समान त्वरण से एक सरल रेखा में चलता है और उत्तरोत्तर t_1 और t_2 सेकंड के अंतरालों में क्रमशः a मीटर और b मीटर की दूरियाँ तय करता है। सिद्ध कीजिए कि त्वरण $\dfrac{2(bt_1 - at_2)}{t_1 t_2 (t_1 + t_2)}$ है। यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि बिंदु t_1, t_2, t_3, अंतरालों में समान दूरियाँ तय करता है, तो

$$\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$$

6. यदि एक कण के सरल रेखीय गति में समय t और स्थिति (दूरी) x, समीकरण $t = ax^2 + bx + c$, संतुष्ट करते हैं, जहाँ a, b, c दिए हुए स्थिरांक है, तो सिद्ध कीजिए कि,

   (i) x स्थिति पर वेग $(2ax + b)^{-1}$ है।

   (ii) त्वरण, गति की दिशा में किसी स्थिर बिंदु से कण की दूरी के घन के व्युत्क्रमानुपाती हैं। स्थिर बिंदु की स्थिति भी ज्ञात कीजिए।

7. यदि समान त्वरण के अधीन गतिमान एक बिंदु के, समय t_1, t_2, t_3, पर, निर्देशांक क्रमशः x_1, x_2, x_3 हैं, तो सिद्ध कीजिए कि त्वरण $\dfrac{2[(x_2 - x_3)\, t_1 + (x_3 - x_1)\, t_2 + (x_1 - x_2)\, t_3]}{(t_2 - t_3)\,(t_3 - t_1)\,(t_1 - t_2)}$ है।

8. सिद्ध कीजिए कि एक सरल रेखा में गतिमान किसी कण पर समान रूप से कार्यरत त्वरण a समीकरण $a = 2\left(\dfrac{s'}{t'} - \dfrac{s}{t}\right)(t + t')$, द्वारा प्राप्त होता है, जहाँ s और s' क्रमशः t और t' सेकंड में कण द्वारा चली गई दूरियाँ हैं।

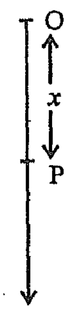
9. 150 मीटर की दूरी चलने के दौरान एक रेलगाड़ी की चाल 36 किमी / घं से घट कर 9 किमी / घं रह जाती है। यदि मंदन समान है, तो ज्ञात कीजिए कि रुकने से पूर्व रेलगाड़ी कितनी दूरी और तय करती है।

10. दो कण P और Q बिंदु A से प्रारंभ कर सरल रेखा AB पर चलते हैं। P का वेग u और त्वरण a तथा Q का वेग u' और त्वरण a' है। यदि AB के मध्य बिंदु पर P और Q, दोनों के वेग समान हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$AB = \frac{u'^2 - u^2}{a - a'}$$

16.3.2 *गुरुत्व के अधीन एक कण की गति* (*Motion of a particle under gravity*) यदि हम एक पिंड को स्वतंत्र रूप में गिरने दें, तो यह *ऊर्ध्वाधरतः* नीचे की ओर एक अचर त्वरण के अधीन गति करता है, जिसे हम गुरुत्वीय त्वरण कहते हैं और जो प्रतीक g से निरूपित किया जाता है। g का मान 981 सेमी प्रति से^{2} या 9.8 मी/से^{2} होता है। इसी प्रकार यदि एक पिंड *ऊर्ध्वाधरतः* ऊपर की ओर फेंका जाता है, तो वह ऊर्ध्वाधर तल में एक सरल रेखा में अचर मंदन g के अधीन गति करता है। अब हम इन सरल रेखीय गतियों का अध्ययन करेंगे।

16.3.3 *स्वतंत्र रूप से किसी बिंदु से गिरने वाले कण की गुरुत्व के अधीन नीचे की ओर गति* (*Motion of a particle falling freely from a point — downward motion under gravity*) मान लीजिए कि O वह बिंदु है जिससे कण स्वतंत्र रूप से गिरता है और किसी समय (क्षण) t पर कण की स्थिति P है, इस प्रकार कि OP $= x$, अब गति, किसी *ऊर्ध्वाधर* तल में एक सरल रेखा के अनुदिश होती है। कण अचर गुरुत्वीय त्वरण g के अधीन नीचे गिर रहा है। मान लीजिए कि v, बिंदु P पर कण का वेग निरूपित करता है (आकृति 16.12)। तब हमें प्राप्त होता है कि



आकृति 16.12

$$\dot{x} = v \text{ और } \ddot{x} = g \text{, एक स्थिरांक}$$

इसके अतिरिक्त $g = \left(\frac{dv}{dt}\right) = \left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right) = v\frac{dv}{dx}$

इस प्रकार $$\frac{d^2x}{dt^2} = g \text{, एक स्थिरांक} \quad (1)$$

t के सापेक्ष समाकलन करने पर

इस प्रकार $$v = \frac{dx}{dt} = gt + A \text{, एक स्थिरांक} \quad (2)$$

और $$x = \frac{1}{2}gt^2 + At + B \quad (3)$$

सूत्र (1) को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं

$$v\frac{dv}{dx}=g$$

x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$v^2=2gx+C \tag{4}$$

उपर्युक्त संबंध (2), (3) और (4) में A, B, C स्वेच्छ अचर हैं, जिनके मान प्रारंभिक प्रतिबंधों द्वारा निर्धारित होते हैं। हमें ज्ञात है कि प्रारंभ में

$$t=0, x=0 \text{ और } v=0$$

अत: (2), (3) और (4) से

$$0=0+A, 0=0+0+B \text{ और } 0=0+C$$

अतः समीकरण (2), (3) और (4) से हमें प्राप्त होता है :

$$v=gt; \tag{5}$$

$$x=\frac{1}{2}gt^2; \tag{6}$$

और $$v^2=2gx \tag{7}$$

संबंध (5), (6) और (7) गुरुत्व के अधीन स्वतंत्र रूप से गिर रहे एक कण की गति के समीकरण हैं।

16.3.4 *ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गए एक कण की गति* (*Motion of a particle projected vertically upwards*) मान लिया कि कण बिंदु O से ऊपर की ओर फेंका जाता है। O को मूल बिंदु तथा OX को O से वह *ऊर्ध्वाधर* दिशा मान लिया, जिसके अनुदिश कण ऊपर की ओर फेंका गया है (आकृति 16.13)। मान लिया कि प्रारंभिक (मूल) प्रतिबंध निम्नलिखित हैं :

$$t=0 \text{ पर } x=0, \frac{dx}{dt}=u$$

इस दशा में कण का त्वरण $-g$ है।

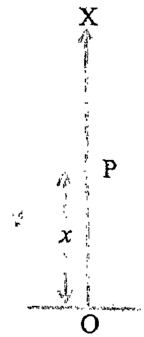
अत: $$\frac{d^2x}{dt^2}=-g$$, जहाँ g एक स्थिरांक है।

t के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$v=\frac{dx}{dt}=-gt+A_1, \quad x=-\frac{1}{2}gt^2+A_1t+B_1$$

त्वरण के लिए व्यंजक $v\frac{dv}{dx}$ के प्रयोग द्वारा

$$v\frac{dv}{dx} = -g$$



आकृति 16.13

x के सापेक्ष समाकलन करने पर

$$v^2 = -2gx + C_1$$

प्रारंभिक प्रतिबंधों द्वारा $A_1 = u$, $B_1 = 0$ और $C_1 = u^2$

अत: $$v = u - gt \qquad (1)$$

$$x = ut - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (2)$$

और $$v^2 = u^2 - 2gx \qquad (3)$$

जब कण के किसी स्थिर बिंदु से, प्रारंभिक वेग u द्वारा ऊपर की ओर फेंका जाता है, तो उसकी गति समीकरण (1), (2) और (3) द्वारा नियंत्रित होती है।

दशा 1 सूत्र (1) से, जब $v = 0$, तब $t = \frac{u}{g}$ और सूत्र (3) से जब $v = 0$, तो

$$x = \frac{u^2}{2g}$$

अत: कण द्वारा उच्चतम बिंदु पर पहुँचने में लगा समय $\left(\frac{u}{g}\right)$ है और उच्चतम बिंदु की ऊँचाई $\frac{u^2}{2g}$ है।

दशा 2 समीकरण (2) से $t = \frac{2u}{g}$ पर $x = 0$, t का अन्य मान शून्य है जिस समय पर कण प्रारंभिक स्थिति में होता है। इस प्रकार प्रारंभिक वेग u के साथ यदि एक कण प्रक्षेपित किया जाता है तो समय $\frac{2u}{g}$ के बाद कण उस बिंदु पर लौट आता है, जहाँ से उसे प्रारंभ में फेंका गया था, जो उच्चतम बिंदु पर पहुँचने में लगे समय का दुगना है।

दशा 3 समीकरण (2) में $x = h$ रखने पर हमें अग्रलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \text{, या } \frac{1}{2}gt^2 - ut + h = 0$$

जो कि t में एक द्विघात समीकरण है। इस समीकरण के मूल वास्तविक होंगे यदि $u^2 \geq 2gh$, अर्थात्

$$h \leq \frac{u^2}{2g}$$

अतः *यदि हम प्रक्षेपण रेखा के एक ऐसे बिंदु पर विचार करें, जिसकी ऊँचाई कण द्वारा प्राप्य अधिकतम ऊँचाई से कम है, तो कण इस बिंदु से होकर दो बार गुजरता है – प्रथम ऊपर की ओर जाते समय और द्वितीय नीचे की ओर गिरते समय।*

दशा 4 h ऊँचाई पर कण के वेग पर विचार कीजिए।

$$v^2 = u^2 - 2gh$$

इस समीकरण से v के दो समान और विपरीत मान प्राप्त होंगे, यदि $h < \frac{u^2}{2g}$, अतः कण h ऊँचाई पर स्थित बिंदु से होकर दो बार समान गति से, गुजरेगा, एक बार ऊपर की ओर की गति के समय और दूसरी बार नीचे की ओर की गति के समय।

उदाहरण 11 एक पिंड *ऊर्ध्वाधरतः* ऊपर की ओर 80 मी / से के वेग से फेंका जाता है। यह ज्ञात कीजिए कि (i) पिंड कितनी ऊँचाई तक जाता है? और (ii) पिंड प्रक्षेप बिंदु से 96 मीटर की ऊँचाई पर किस समय में पहुँचेगा?

हल (i) यदि पिंड द्वारा प्राप्य अधिकतम ऊँचाई x हो, तो सूत्र $v^2 = u^2 - 2gx$ से जहाँ $u = 80$ मी/से और $v = 0$, हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है,

$$0 = 80 \times 80 - 2.(9.8) \times x \quad \text{अतः:} \quad x = \frac{16000}{49} \text{ मी}$$

(ii) 96 मी की ऊँचाई पर पहुँचने के लिए समय ज्ञात करने के लिए हम समीकरण

$$x = ut - \frac{1}{2}gt^2$$ का प्रयोग करते हैं,

जहाँ $x = 96$ मी, $u = 80$ मी/से, $g = 9.8$ मी/से^{2}

अतः:

$$96 = 80\,t - \frac{1}{2}(9.8)\,t^2, \quad \text{या} \quad 4.9\,t^2 - 80\,t + 96 = 0$$

अर्थात् $t = \dfrac{80 \pm \sqrt{(80)^2 - 4 \times 4.9 \times 96}}{2 \times 4.9}$ या $t = \dfrac{40 \pm \sqrt{(40)^2 - 4.9 \times 96}}{4.9}$ से

उदाहरण 12 एक पिंड ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर u वेग से फेंका जाता है, t समय पश्चात् एक अन्य पिंड उसी प्रक्षेप बिंदु से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर v वेग से फेंका जाता है, जहाँ $v < u$। यदि वे जितना शीघ्र संभव हो उतना शीघ्र मिलते हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$t = \frac{u - v + \sqrt{u^2 - v^2}}{g}$$

हल मान लिया कि दूसरे पिंड के प्रक्षेपण के T समय बाद, दोनों पिंड h ऊँचाई पर मिलते हैं तब प्रश्नानुसार,

$$h = u(t + \mathrm{T}) - \frac{1}{2}g(t + \mathrm{T})^2 \qquad (1)$$

और
$$h = v\mathrm{T} - \frac{1}{2}g\mathrm{T}^2 \qquad (2)$$

अतः
$$u(t + \mathrm{T}) - \frac{1}{2}g(t + \mathrm{T})^2 = v\mathrm{T} - \frac{1}{2}g\mathrm{T}^2$$

अर्थात्
$$gt^2 + 2t(g\mathrm{T} - u) + 2(v - u)\mathrm{T} = 0 \qquad (3)$$

क्योंकि T का मान न्यूनतम है इसलिए h का मान भी न्यूनतम है। अतः समीकरण (2) से

$$\frac{dh}{d\mathrm{T}} = 0, \text{ या } 0 = v - g\mathrm{T}, \text{ अतः } \mathrm{T} = \frac{v}{g} \qquad (4)$$

समीकरण (3) और (4) से

$$g^2t^2 - 2gt(u - v) - 2v(u - v) = 0$$

अतः $t = \dfrac{(u - v) \pm \sqrt{u^2 - v^2}}{g}$, जहाँ ऋण चिह्न को अस्वीकार करना पड़ेगा क्योंकि उससे t का मान ऋण आता है।

उदाहरण 13 एक पत्थर को किसी कुएँ में गिराया जाता है और छपाक की ध्वनि 4 सेकंड बाद सुनाई देती है। ध्वनि के वेग को 340 मी/से मानकर, कुएँ की गहराई निर्धारित कीजिए।

हल मान लिया कि कुएँ की गहराई h मीटर है और पत्थर द्वारा पानी के तल पर पहुँचने में t सेकंड लगते हैं। हमें ज्ञात है कि पत्थर द्वारा पानी के तल तक पहुँचने में तथा छपाके की ध्वनि के कुएँ के शिखर तक पहुँचने में कुल 4 सेकंड का समय लगता है। अतः ध्वनि को h मीटर की दूरी तय करने में $(4-t)$ सेकंड का समय लगता है।

पत्थर की *ऊर्ध्वाधर* नीचे की गति पर विचार करने से, समय t में दूरी h नीचे दिए सूत्र से प्राप्त होती है।

$$h=\frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(क्योंकि प्रारंभिक वेग शून्य है)}$$

$$=\frac{1}{2}(9.8)\ t^2=4.9t^2 \qquad (1)$$

यदि हम ध्वनि की गति को समान मान लें, तो

$$h=340\times(4-t)=1360-340\ t \qquad (2)$$

(1) और (2) से

$$4.9t^2=1360-340t\text{, अर्थात् }\ 4.9t^2+340t-1360=0$$

अतः

$$t=\frac{-340\pm\sqrt{(340)^2+4\,(4.9)\,1360}}{2\times4.9}=\frac{-340\pm\sqrt{142256}}{9.8}=\frac{-340\pm377.17}{9.8}$$

क्योंकि t ऋण नहीं हो सकता है, अतः $t=\dfrac{37.17}{9.8}=3.79$ से

इसलिए (1) से, $h=\ 4.9t^2=(4.9)(3.79)^2=70.38$ मी लगभग

प्रश्नावली 16.3

1. एक गेंद 30 मी/से के वेग से *ऊर्ध्वाधरतः*ऊपर की ओर फेंकी जाती है
   (i) गेंद कितनी ऊँचाई तक जाती है?
   (ii) उच्चतम बिंदु तक पहुँचने में गेंद कितना समय लेती है?
   (iii) 2 सेकंड के उपरांत (प्रक्षेपण के) गेंद कितने वेग से चलती है?
   (iv) गेंद धरातल पर लौट कर कितने वेग से आती है?
2. 200 मीटर ऊँची एक मीनार से एक कण गिराया जाता है और उसी समय एक अन्य कण मीनार के आधार (तल) से ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंका जाता है, जिससे वह पहले कण से 56 मीटर की ऊँचाई पर मिलता है दूसरे कण का प्रक्षेप वेग ज्ञात कीजिए।

3. एक पत्थर को किसी मकान की छत से गिराया जाता है और यह एक 6 मीटर ऊँची खिड़की को $\frac{1}{4}$ सेकंड में पार करता है; मकान की खिड़की से ऊपर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए। ($g = 10$ मी/से^{2} मानिए)

4. किसी मीनार के शिखर से एक कण स्वतंत्रतापूर्वक गिरता है और अंतिम 2 सेकंडों में यह कण मीनार की कुल ऊँचाई के $\left(\frac{3}{4}\right)^{\text{वें}}$ भाग के बराबर दूरी तय करता है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

5. नीचे की ओर गिरता हुआ एक कण, अपनी गति के अंतिम सेकंड में 5886 सेमी की दूरी तय करता है। वह ऊँचाई ज्ञात कीजिए, जिससे कण गिरना प्रारंभ करता है, और उसके गति का कुल समय अवरोहण काल भी ज्ञात कीजिए।

6. एक कण ऊर्ध्वाधरत: ऊपर की ओर u मी/से के वेग से फेंका जाता है और t सेकंड के बाद एक अन्य कण उसी बिंदु से और उसी (समान) वेग से ऊपर की ओर प्रक्षिप्त जाता है। सिद्ध कीजिए कि प्रारंभ से $\left[\frac{t}{2}+\frac{u}{g}\right]$ सेकंड बाद दोनों कण $\frac{4u^2-g^2t^2}{8g}$ मी की ऊँचाई पर परस्पर मिलते हैं।

7. एक मीनार के शिखर से दो गेंदों की एक साथ (समकालिक) समान वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है, एक को *ऊर्ध्वाधरत:* ऊपर की ओर दूसरी को *ऊर्ध्वाधरत:* नीचे की ओर। यदि गेंदें धरातल पर क्रमशः t_1, t_2 समय पर पहुँचती हैं, तो दर्शाइए कि यदि दोनों को मीनार के शिखर से केवल स्वतंत्रतापूर्वक गिराया जाए, तो प्रत्येक धरातल पर पहुँचने में $\sqrt{t_1 . t_2}$ समय लेंगे।

8. किसी मीनार के शिखर से स्वतंत्रतापूर्वक गिरता हुआ एक कण, जब x मीटर की दूरी चल लेता है, उस समय शिखर से y मीटर नीचे स्थित एक बिंदु से, एक अन्य कण स्वतंत्रतापूर्वक गिरना प्रारंभ करता है। यदि दोनों कण धरातल पर एक साथ पहुँचते हैं, तो दर्शाइए कि मीनार की ऊँचाई $\frac{(x+y)^2}{xy}$ मी है।

9. एक *ऊर्ध्वाधर* रेखा में A, B, C और D बिंदु इस प्रकार है कि $AB = BC = CD$, यदि एक पिंड बिंदु A से विरामावस्था में स्वतंत्रतापूर्वक गिरता है, तो सिद्ध कीजिए कि AB, BC और CD दूरियाँ तय करने का अवरोहण काल $1 : \sqrt{2}-1 : \sqrt{3}-\sqrt{2}$ के अनुपात में है।

16.4 प्रक्षेप्य की गति (Projectile Motion)

पिछले अनुच्छेद में जिन समस्याओं (प्रश्नों) पर विचर किया गया है, वे एकविमीय थे। अनुच्छेद 16.3.2 में हमने, विशेष रूप से, पृथ्वी के गुरुत्व क्षेत्र में ऊपर की ओर प्रक्षिप्त, एक कण की गति पर विचार किया था। हम अब, न्यूटन के गति के नियमों का विस्तार एक कण के द्विवमीय गति पर करेंगे (अर्थात् प्रक्षेप्य की गति)।

यदि एक पिंड, किसी बिंदु से आकाश में क्षैतिज से किसी कोण पर झुकी दिशा में, फेंका जाए, तो वह एक वक्र पथ बनाता हुआ कुछ समय बाद पुनः पृथ्वी पर लौट आता है। इस प्रकार फेंके गए (प्रक्षिप्त) किसी कण/पिंड को *प्रक्षेप्य* कहते हैं और एक प्रक्षेप्य द्वारा बनाए गए पथ को *प्रक्षेप-पथ* कहते हैं। आधुनिक युद्धों में प्रक्षेप्य की गति का सिद्धांत अत्यंत महत्त्वपूर्ण है। युद्ध के दौरान किसी प्रक्षेपणास्त्र द्वारा पूर्व अनुमानित शत्रु की स्थिति पर प्रहार करने और महत्तम क्षति पहुँचाने जैसी समस्याएँ उठती हैं।

प्रक्षेप्य की गति की समस्या एक जटिल समस्या होती है। पिंड का आकार, वायुमंडल का प्रतिरोध, गुरुत्वाकर्षण में ऊँचाई के साथ परिवर्तन कुछ ऐसे घटक हैं, जिनका प्रबंधन कठिन होता है। अतः, हम इस समस्या का सरलीकरण करके एक ऐसा आदर्श गणितीय प्रतिमान प्राप्त करते हैं, जो किसी प्रक्षेप्य की व्यापक गति के प्रथम सन्निकटन के रूप में उपयोगी होता है। हम यह मान लेते हैं कि

(i) प्रक्षिप्त पिंड आकार में छोटा है और इसे एक कण माना जा सकता है।

(ii) चारों ओर का वायुमंडल कोई प्रतिरोध नहीं उत्पन्न करता है अर्थात् प्रक्षेप्य निर्वात में गति करता है।

(iii) प्रक्षेप्य की गति के आद्योपांत (प्रारंभ से अंत तक) कण पर लगा गुरुत्वाकर्षण बल, अचर रहता है।

प्रक्षेप्य की गति की चर्चा करने से पूर्व हमें कुछ ऐसे पदों का अर्थ, जिन्हें इस चर्चा में प्रयोग किया जाएगा, जान लेना चाहिए। जब कोई कण वायुमंडल में फेंका (प्रक्षिप्त) जाता है, तो प्रक्षेप्य के गति की दिशा, प्रक्षेप- बिंदु से जाने वाली क्षैतिज रेखा से जो कोण बनाता है, उसे *प्रक्षेप-कोण* कहते हैं। प्रक्षेप- बिंदु से उस बिंदु की दूरी जहाँ प्रक्षेप्य का पथ प्रक्षेप-बिंदु से जाने वाले किसी क्षैतिज समतल से मिलता है, उस समतल पर प्रक्षेप्य का *परास* कहलाता है, और जितना समय प्रक्षेप्य को प्रक्षेप बिंदु से होकर जाने वाले किसी क्षैतिज समतल पर पुनः लौट आने में लगता है उसे *उड्डयन काल* कहते हैं। वह प्रारंभिक वेग, जिससे किसी कण को वायुमंडल (आकाश) में फेंका जाता है, *प्रक्षेप-वेग* कहलाता है।

16.4.1 *गुरुत्व के अधीन प्रक्षेप्य की गति* (*Projectile motion under gravity*) मान लीजिए परिमाण m का एक कण बिंदु O से, परिमाण u के वेग से क्षैतिज दिशा OX से α कोण बनाने वाली दिशा में, फेंका जाता है। मान लिया कि OY रेखा बिंदु O से *ऊर्ध्वाधर* ऊपर की ओर है। मान लिया कि प्रक्षेपण से t समय बाद कण बिंदु $P(x, y)$ पर स्थित है (आकृति 16.14)। अतः, वायु के प्रतिरोध के अभाव में कण, प्रारंभ से अंत तक (आद्योपांत;, *ऊर्ध्वाधर* नीचे की ओर समान त्वरण g के अधीन गति करता है (अर्थात् कण पर, उसके गति के दौरान (पर्यंत), केवल एक ही बल अर्थात् उसका भार नीचे की कार्य करता है।) अतः *ऊर्ध्वाधर* समतल में क्षैतिज तथा *ऊर्ध्वाधर* दिशाओं में, गति के समीकरण क्रमशः निम्न प्रकार हैं :

$$m\ddot{x} = 0 \text{ अर्थात् } \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad (1)$$

और $$m\ddot{y} = -mg \text{ अर्थात् } \frac{d^2y}{dt^2} = -g \quad (2)$$

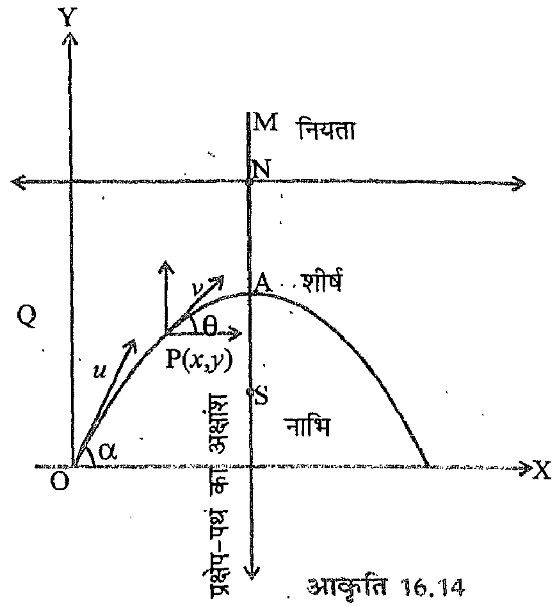
और समीकरणों (1) और (2) के लिए प्रारंभिक प्रतिबंध नीचे दिए गए हैं।

समय $t = 0$ पर, $x = 0,\ y = 0,$

$\dot{x} = u\cos\alpha, \dot{y} = u\sin\alpha$

t के सापेक्ष (1) और (2) का समाकलन करने पर,

$\frac{dx}{dt} = \mathrm{A}$ और $\frac{dy}{dt} = -gt + \mathrm{B}$, जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं।



आकृति 16.14

प्रारंभिक प्रतिबंधों अर्थात् $t = 0$ पर

$x = u\cos\alpha,\ \ y = u\sin\alpha$

हमें नीचे दिए परिणाम प्राप्त होते हैं

$$u\cos\alpha = \mathrm{A} \quad \text{और} \quad u\sin\alpha = \mathrm{B}$$

अत:

$$\frac{dx}{dt} = u\cos\alpha, \text{ जो कि गति के आद्योपांत अचर रहता है} \tag{3}$$

और
$$\frac{dy}{dt} = u\sin\alpha - gt \tag{4}$$

समीकरण (3) और (4) का t के सापेक्ष पुनः समाकलन करने पर प्रारंभिक प्रतिबंध अर्थात् $t = 0$ पर

$x = 0, y = 0,$ हमें प्राप्त होता है

$$x = (u\cos\alpha)\,t \tag{5}$$

$$y = (u\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{6}$$

(5) और (6) संबंधों से t का विलोपन करने पर

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2\cos^2\alpha}, \tag{7}$$

जो कि गुरुत्वाधीन किसी प्रक्षेप्य की गति के प्रक्षेप-पथ का समीकरण है।

16.4.2 प्रक्षेप्य गति के प्रक्षेप-पथ के सामान्य गुण (*General properties of the trajectory of projectile motion*) अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (7) में दिए प्रक्षेप-पथ को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$x^2 - 2u^2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g} x = -\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} y$$

अर्थात् $$\left(x - u^2 \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 = -2u^2 \frac{\cos^2\alpha}{g}\left(y - \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right) \quad (1)$$

समीकरण (1) यह दर्शाता है कि *प्रक्षेप-पथ परवलयिक होता है, जिसका शीर्ष बिंदु*
A $\left(\frac{u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}, \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}\right)$ *पर स्थित है और जिसके नाभिलंब की लंबाई* $\left(\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g}\right)$ है (आकृति 16.14)।

इस परवलयिक प्रक्षेप-पथ का अक्ष NA, OY *(अर्थात् y-अक्ष)* के *समांतर किंतु विपरीत दिशा में एक रेखा होती है और इसकी नियता इसके शीर्ष से ऊपर* $\frac{u^2\cos^2\alpha}{2g}$ *की ऊँचाई पर स्थित एक क्षैतिज रेखा होती है अर्थात् रेखा* OX *(अर्थात् x-अक्ष) से इसकी कुल ऊँचाई* $\frac{1}{4}\cdot\frac{2u^2\cos^2\alpha}{g} + \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

(अर्थात् $\frac{1}{4}$ अभिलंब की लंबाई + शीर्ष की ऊँचाई) *अथवा* $\frac{u^2}{2g}$ *होती है।*

अतः नियता का समीकरण $y = \frac{u^2}{2g}$ है, जो कि α से स्वतंत्र है।

प्रक्षेप-पथ की नाभि, बिंदु $\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{2g}, -\frac{u^2\cos 2\alpha}{2g}\right)$ है।

16.4.3 प्रक्षेप-पथ के गतिकीय प्राचल (*Dynamical parameters of the trajectory*)

(a) परास अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (7) में $y = 0$ और $x \neq 0$ रखने पर क्षैतिज समतल में परास का मान $\left(\frac{u^2\sin 2\alpha}{g}\right)$ प्राप्त होता है। एक दिए हुए परास और एक दिए हुए प्रक्षेप वेग u के लिए प्रक्षेप-कोण

के सामान्यतः दो संभव मान होते हैं, जो क्रमशः α और $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ है। जब $\sin 2\alpha = 1 = \sin\frac{\pi}{2}$ होता है अर्थात् महत्तम परास के लिए $\alpha = 45°$ होना चाहिए और महत्तम परास का मान $\frac{u^2}{g}$ होता है।

(b) उच्चतम बिंदु पर प्रक्षेप्य के पहुँचने का समय उच्चतम बिंदु पर वेग का *ऊर्ध्वाधर* घटक नहीं होगा। अतः अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (4) में $\dot{y} = 0$ रखने पर, उच्चतम बिंदु पर पहुँचने में लगा समय t_1 निम्नलिखित संबंध द्वारा प्राप्त होता है,

$$0 = u\sin\alpha - gt_1, \text{ अर्थात् } t_1 = \frac{u\sin\alpha}{g}$$

(c) उड्डयन काल परिभाषा द्वारा, कण को प्रक्षिप्त करने के क्षण से, उसके प्रक्षेप बिंदु से जाने वाले क्षैतिज समतल पर पुनः लौट आने वाले क्षण तक, के समय को *उड्डयन काल* कहते हैं।

अतः, यदि T उड्डयन काल है, तो जब $t = T, y = 0$, इसलिए अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (6) से

$$0 = u\sin\alpha . T - \frac{1}{2}gT^2, \text{ अथवा } T = 0 \text{ या } T = \frac{2u\sin\alpha}{g}$$

(d) महत्तम ऊँचाई महत्तम ऊँचाई तब प्राप्त होती है जब $\dot{y} = 0$ है। हमें ज्ञात है कि उच्चतम बिंदु तक पहुँचने में लगा समय $t_1 = \frac{u\sin\alpha}{g}$, यदि समय t_1 में प्राप्त महत्तम ऊँचाई H है, तो अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (6) द्वारा

$$H = u\sin\alpha . t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = (u\sin\alpha).\left(\frac{u\sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g.\frac{u^2\sin^2\alpha}{g^2} = \frac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$$

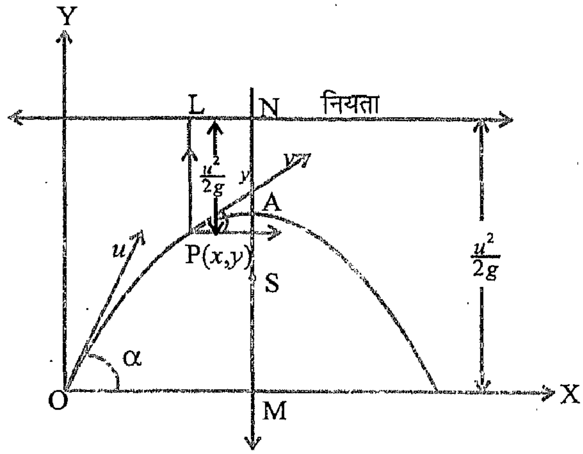
(e) किसी ऊँचाई पर वेग ज्ञात करना मान लिया कि प्रक्षेप-बिंदु से किसी दत्त ऊँचाई y पर कण का वेग v है जो क्षैतिज से θ कोण बनाता है; अर्थात् स्पष्ट है कि वेग पथ के उस बिंदु पर स्पर्शी के अनुदिश है।

अतः $\quad v\cos\theta = \dot{x} = u\cos\alpha \quad$ [अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (3) से]

और $\quad v\sin\theta = \dot{y} = u\sin\alpha - gt \quad$ [अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (4) से]

अत: $$\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha}$$

और $$v^2 = (u\cos\alpha)^2 + (u\sin\alpha - gt)^2 = u^2 - 2ugt\sin\alpha + g^2t^2$$



आकृति 16.15

या $$v^2 = u^2 - 2g\left(u\sin\alpha.t - \frac{1}{2}gt^2\right) \text{ या } v^2 = u^2 - 2gy$$

[अनुच्छेद 16.4.1 के समीकरण (6) के प्रयोग द्वारा]

यहाँ $$v^2 = u^2 - 2g[MN - PL] = u^2 - 2g\left[\frac{u^2}{2g} - PL\right] = 2g.PL$$

अर्थात् कण का वेग नियता से नीचे गिरने के कारण है।

इस प्रकार अभीष्ट वेग उस वेग के तुल्य है, जो एक कण नियता से उस बिंदु तक मुक्त रूप से गिरने में अर्जित करता है (आकृति 16.15)।

उदाहरण 14 किसी प्रक्षेप्य का क्षैतिज परास, उसके द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई का $4\sqrt{3}$ गुना है। प्रक्षेप कोण ज्ञात कीजिए।

हल यदि कण का प्रक्षेप वेग u है, जो क्षैतिज से α कोण पर झुका है, तब

$$\text{महत्तम परास} = \frac{(u^2 \sin 2\alpha)}{g} \text{ और}$$

$$\text{महत्तम ऊँचाई} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

अतः प्रश्नानुसार

$$\frac{u^2 \sin 2\alpha}{g} = 4\sqrt{3}\left(\frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}\right) \text{ या } \sin 2\alpha = 4\sqrt{3}\left(\frac{\sin^2 \alpha}{2}\right)$$

या $$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ या } \alpha = 30^\circ$$

उदाहरण 15 कोई मनुष्य एक पत्थर को 125 मीटर की महत्तम दूरी तक फेंक सकता है। पत्थर कितने समय तक वायुमंडल में रहता है और यह किस महत्तम ऊँचाई तक ऊपर उठ सकता है?

हल मान लिया कि पत्थर क्षैतिज से α कोण पर u वेग से फेंका जाता है

$$\text{महत्तम क्षैतिज परास} = \frac{u^2}{g} = 125 \text{ मी (दिया है)}$$

या $$u^2 = 125 \times 9.8 \quad (g = 9.8 \text{ मी/से}^2)$$

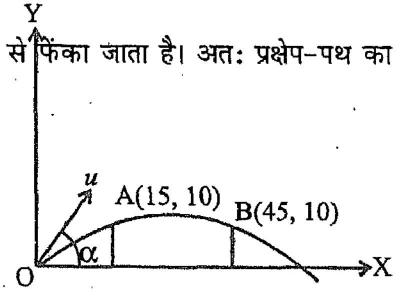
या $$u = \sqrt{125 \times 9.8} = 35 \text{ मी/से}$$

साथ ही महत्तम क्षैतिज परास के लिए $\alpha = 45^\circ$

$$\text{और उड्डयन काल} = 2\frac{u \sin \alpha}{g} = 2 \times \frac{35}{9.8} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5.05 \text{ से}$$

$$\text{तथा महत्तम ऊँचाई} = \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{35 \times 35 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2 \times 9.8} = 31.25 \text{ मी}$$

उदाहरण 16 एक कण इस प्रकार से प्रक्षिप्त किया जाता है, कि यह प्रक्षेप-बिंदु से क्रमशः 15 मीटर और 45 मी दूर, 10 मी ऊँची (प्रत्येक) दो दीवारों के शिखरों को स्पर्श करते हुए उड़ान करता है। प्रक्षेप कोण ज्ञात कीजिए।



आकृति 16.16

हल मान लिया कि कण को क्षैतिज से α कोण की दिशा में u वेग से फेंका जाता है। अतः प्रक्षेप-पथ का समीकरण निम्नलिखित है,

$$y = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\alpha}$$

क्योंकि बिंदु (15,10) और (45, 10) उस पथ पर हैं (आकृति 16.16), इसलिए

$$10 = 15\tan\alpha - \frac{225g}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad (1)$$

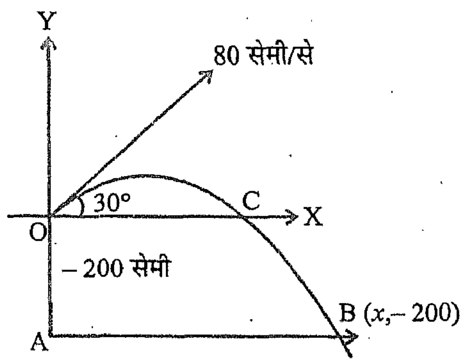
और
$$10 = 45\tan\alpha - \frac{2025g}{2u^2\cos^2\alpha} \qquad (2)$$

(1) और (2) से u का विलोपन करने पर

$$\frac{10-15\tan\alpha}{225} = \frac{10-45\tan\alpha}{2025}$$

या
$$\frac{2025}{225} = \frac{9\tan\alpha - 2}{3\tan\alpha - 2} \text{ या } \tan\alpha = \frac{8}{9} \text{ या } \alpha = \tan^{-1}\frac{8}{9}$$

उदाहरण 17 एक गेंद को 200 मी ऊँची कुतुबमीनार के शिखर से क्षैतिज से 30° का कोण पर 80 मी/से के वेग से फेंकी जाती है। मीनार के आधार (पाद) से उस बिंदु की क्षैतिज दूरी ज्ञात कीजिए जहाँ गेंद धरातल (पृथ्वी) से टकराती है।



आकृति 16.17

हल गेंद को कुतुबमीनार के शिखर O से 80 मी/से के वेग से क्षैतिज से 30° के कोण पर फेंकी जाती है (आकृति 16.17), अतः प्रक्षेप-पथ का समीकरण निम्नलिखित है :

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\alpha}$$

प्रश्नानुसार

$$y = x\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}.(9.8).\frac{x^2}{80\times 80\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4.9x^2}{4800}$$

कुतुबमीनार के आधार से जाने वाले क्षैतिज समतल के लिए $y = -200$, अतः उपर्युक्त समीकरण से

$$-200 = \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{4.9x^2}{4800}$$

या $$4.9x^2 - 1600\sqrt{3}x - 960000 = 0$$

या $$x = \frac{1600\sqrt{3} \pm \sqrt{7680000 + 4.9\times 3840000}}{9.8} = \frac{400}{4.9}\left(2\sqrt{3} \pm \sqrt{41.4}\right)$$

ऋण चिन्ह को छोड़ने पर

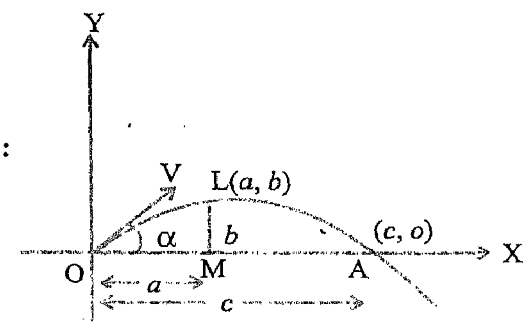
$$x = \frac{400}{4.9}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{41.4}\right)$$

उदाहरण 18 एक कण a दूरी पर स्थित b ऊँचाई की किसी दीवार को ठीक स्पर्श करते हुए पार करता है और धरातल से, प्रक्षेप-बिंदु से c दूरी पर टकराता है। सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप-कोण

$$\tan^{-1}\frac{bc}{a(c-a)}$$

और प्रक्षेप-वेग V निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है :

$$\frac{2V^2}{g} = \frac{a^2(c-a)^2 + b^2c^2}{ab(c-a)}$$



आकृति 16.18

हल मान लिया कि O बिंदु से प्रक्षेप-वेग V से फेंके गए कण का प्रक्षेप-कोण α है। मान लिया कि कण दीवार LM को ठीक स्पर्श करते हुए पार करता है और धरातल से A बिंदु पर टकराता है। अत: OM = a, LM = b, OA = c । मान लिया कि OX क्षैतिज-अक्ष और OY ऊर्ध्वाधर-अक्ष हैं तथा O मूल-बिंदु है (आकृति 16.18)। अत: प्रक्षेप-पथ का समीकरण निम्न प्रकार है :

$$y = x\tan\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}x^2$$

अब क्योंकि कण दीवार LM को ठीक स्पर्श करते हुए पार करता है, इसलिए यह बिंदु L (a, b) से होकर जाता है और धरातल से बिंदु A $(c, 0)$, पर टकराता है।

अत: $$b = a\tan\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}a^2 \qquad (1)$$

और $$0 = c\tan\alpha - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}c^2 \qquad (2)$$

(1) और (2) द्वारा V का विलोपन करने पर

$$\frac{a\tan\alpha - b}{a^2} = \frac{\tan\alpha}{c}$$

या $$\tan\alpha = \frac{bc}{a(c-a)},\ \text{अत:}\ \alpha = \tan^{-1}\frac{bc}{a(c-a)}$$

(2) और (3) से α का विलोपन करने पर

$$\frac{2V^2}{g} = \frac{c\cot\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{c}{\tan\alpha}\left(1+\tan^2\alpha\right) = c(\cot\alpha + \tan\alpha)$$

या $$\frac{2V^2}{g} = c\left[\frac{bc}{a(c-a)} + \frac{a(c-a)}{bc}\right] = \frac{b^2c^2 + a^2(c-a)^2}{ab(c-a)}$$

प्रश्नावली 16.4

1. यदि किसी कण का महत्तम क्षैतिज परास m मीटर है, तो दर्शाइए कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई $\frac{1}{4}$R है।

एक बालक किसी गेंद को 60 मी दूर फेंक सकता है। गेंद कितनी देर हवा में रहती है और उसके द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई कितनी है?

2. एक कण $\sin^{-1}\frac{1}{5}$ के उन्नयन कोण पर फेंका जाता है और क्षैतिज समतल पर इसका परास 30 मी है। प्रक्षेप-वेग और पथ के उच्चतम बिंदु पर वेग ज्ञात कीजिए।

3. 49 मी/से के वेग से प्रक्षिप्त एक क्रिकेट गेंद का महत्तम क्षैतिज परास ज्ञात कीजिए। गेंद का परास $\frac{245}{2}\sqrt{3}$ मी रखने के लिए न्यूनतम प्रक्षेप-कोण और न्यूनतम लिया गया समय ज्ञात कीजिए। ($g = 10$ मी/से^{2})

4. यदि क्षैतिज परास R के लिए एक गोली का उड्डयन काल T सेकंड है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप की दिशा का क्षैतिज से झुकाव निम्न है :

$$\tan^{-1}\left(\frac{gT^2}{2R}\right)$$

5. यदि किसी कण (प्रक्षेप्य) का क्षैतिज परास R और महत्तम ऊँचाई h हो, तो सिद्ध कीजिए कि कण का प्रारंभिक वेग (प्रक्षेप-वेग) $\left[2g\left(h+\frac{R^2}{4h}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$ है।

6. एक कण को प्रक्षेप-वेग u से फेंका जाता है, जिससे कि वह प्रक्षेप-बिंदु O से क्षैतिज दूरी d पर स्थित महत्तम संभव ऊँचाई के किसी स्तंभ को स्पर्श करता हुआ पार कर जाए। सिद्ध कीजिए कि अपनी उड़ान के दौरान कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई $\frac{u^2}{2g(u^4+g^2d^2)}$ है।

7. एक कण को $2\sqrt{ag}$ वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है, जिससे कि वह, a ऊँचाई की ऐसी दो दीवारों को, जिनके बीच की परस्पर दूरी $2a$ है, ठीक स्पर्श करता हुआ, पार करता है। दर्शाइए कि पथ का नाभिलंब $2a$ के बराबर है और दोनों दीवारों के बीच कण का उड्डयन काल $2\sqrt{\frac{a}{g}}$ है।

8. एक प्रक्षेप्य बिंदु O से उन्नयन कोण α पर चलना प्रारंभ करता है। t से बाद, उसकी स्थिति O से β उन्नयन कोण पर प्रतीत होती है। सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप्य का प्रारंभिक वेग (प्रक्षेप-वेग) $\frac{gt\ \cos\beta}{2\sin(\alpha-\beta)}$ है।

9. एक कण को इस प्रकार प्रक्षिप्त किया जाना है, जिससे कि वह परस्पर a दूरी पर तीन *ऊर्ध्वाधर* तलों में स्थित, d व्यास के तीन समान छल्लों को ठीक-ठीक पार कर जाएँ, जबकि छल्लों के उच्चतम बिंदु उस सरल रेखा में स्थित हैं, जो प्रक्षेप-बिंदु से h ऊँचाई पर है। सिद्ध कीजिए कि प्रक्षेप का उन्नयन कोण अनिवार्य रूप से

$$\tan^{-1}\left(\frac{2\sqrt{hd}}{a}\right)$$ होगा।

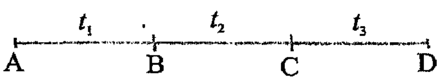
[संकेत कण बीच के छल्ले के उच्चतम बिंदु के ठीक नीचे से और अन्य दोनों छल्लों के निम्नतम बिंदु के ठीक ऊपर से होकर जाएगा।]

विविध उदाहरण
(MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 19 एक बिंदु समान त्वरण के आधीन गति करता है। यदि t_1, t_2, t_3, तीन उत्तरोत्तर समय अंतरालों में इसका औसत वेग क्रमशः v_1, v_2, v_3 हों, तो दर्शाइए कि $\dfrac{(v_1 - v_2)}{(v_2 - v_3)} = \dfrac{(t_1 + t_2)}{(t_2 + t_3)}$

हल मान लिया कि उत्तरोत्तर समय अंतराल t_1, t_2, t_3 में चली गई दूरियाँ क्रमशः AB, BC और CD हैं (आकृति 16.19)। यदि बिंदु A पर वेग u है तो B,C और D बिंदुओं पर वेग क्रमशः $V_B = u + at_1$, $V_C = (u + at_1) + at_2$, $V_D = \left[u + a(t_1 + t_2)\right] + at_3$ हैं। क्योंकि औसत वेग $= \dfrac{1}{2}$ (प्रारंभिक वेग + अंतिम वेग)

अतः $$v_1 = \frac{1}{2}[u + (u + at_1)] = u + \frac{1}{2}at_1,$$



आकृति 16.19

$$v_2 = \frac{1}{2}\left[(u + at_1) + u + a(t_1 + t_2)\right] = u + at_1 + \frac{1}{2}at_2$$

और $$v_3 = \frac{1}{2}\left[u + a(t_1 + t_2) + u + a(t_1 + t_2 + t_3)\right] = u + at_1 + at_2 + \frac{1}{2}at_3$$

अभीष्ट परिणाम प्राप्त करने के लिए हमें, उपर्युक्त समीकरणों से u और a का विलोपन करना चाहिए।

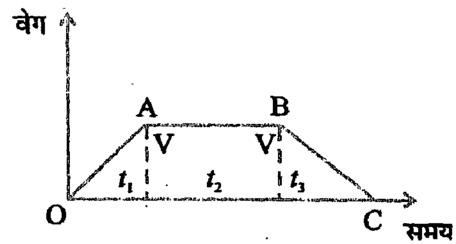
अतः $$v_1 - v_2 = -\frac{1}{2}a(t_1 + t_2),\ v_2 - v_3 = -\frac{1}{2}a(t_2 + t_3)$$

अतएव $$\frac{(v_1 - v_2)}{(v_2 - v_3)} = \frac{(t_1 + t_2)}{(t_2 + t_3)}$$

उदाहरण 20 एक रेलगाड़ी दो स्टेशनों के बीच की दूरी का $\left(\frac{1}{p}\right)^{\text{वाँ}}$ भाग समान त्वरण के आधीन और $\left(\frac{1}{q}\right)^{\text{वाँ}}$ भाग समान मंदन के अधीन चलती है। गाड़ी एक स्टेशन से विरामावस्था से चलना प्रारंभ करती है और दूसरे स्टेशन पर फिर विरामावस्था में हो जाती है। सिद्ध कीजिए कि महत्तम वेग और औसत वेग के बीच

$$1+\left(\frac{1}{p}\right)+\left(\frac{1}{q}\right):1$$

का अनुपात है।



आकृति 16.20

हल मान लिया कि रेलगाड़ी का महत्तम वेग V है। यदि त्वरण के अधीन गति का समय, महत्तम वेग को बनाए हुए गति का समय और मंदन के अधीन गति का समय क्रमशः t_1, t_2, t_3 हों और यदि O और C दोनों स्टेशनों के बीच की कुल दूरी (pqs) हो (आकृति 16.20), तो

$$\frac{1}{p}(pqs)=\frac{1}{2}\mathrm{V}t_1,\ \frac{1}{q}(pqs)=\frac{1}{2}\mathrm{V}t_3,$$

और $$pqs-\frac{1}{p}(pqs)-\frac{1}{q}(pqs)=\mathrm{V}t_2$$

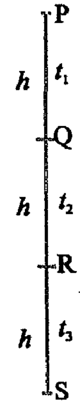
योग करने पर

$$\mathrm{V}(t_1+t_2+t_3)=(pq+p+q)s,\ \text{अब औसत वेग}\ \overline{\mathrm{V}}=\frac{pqs}{t_1+t_2+t_3}=\frac{\mathrm{V}pq}{pq+p+q}$$

अतः $$\frac{\mathrm{V}}{\overline{\mathrm{V}}}=\frac{pq+p+q}{pq}=\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right),\ \text{अर्थात्}\ \mathrm{V}:\overline{\mathrm{V}}::\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right):1$$

उदाहरण 21 एक *ऊर्ध्वाधर रेखा* में स्थित P, Q, R और S बिंदु इस प्रकार है कि बिंदु P उच्चतम है तथा PQ = QR = RS। यदि एक पिंड विराम से बिंदु P से गिरता है, तो सिद्ध कीजिए कि उपर्युक्त दूरियों को उत्तरोत्तर तय करने के अवरोहण कालों में $1:\sqrt{2}-1:\sqrt{3}-\sqrt{2}$ का अनुपात है।

हल मान लिया कि PQ = QR = RS = h, मान लिया कि पिंड द्वारा *ऊर्ध्वाधर* दूरियाँ PQ, QR और RS को तय करने में क्रमशः t_1, t_2, t_3 समय लगता है (आकृति 16.21)। अतः



आकृति 16.21

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2,\ 2h = \frac{1}{2} g(t_1 + t_2)^2,\ 3h = \frac{1}{2} g(t_1 + t_2 + t_3)^2$$

उपर्युक्त समीकरणों में $\left(\frac{h}{g}\right) = \lambda^2$ रखने पर,

$$t_1 = \sqrt{2}\lambda;\ t_1 + t_2 = 2\lambda;\ t_1 + t_2 + t_3 = \sqrt{6}\lambda$$

अथवा $\quad t_1 = \sqrt{2}\lambda;\ t_2 = \lambda\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - 1\right);\ t_3 = \lambda\sqrt{2}\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)$

अतः $\quad t_1 : t_2 : t_3 :: 1 : \sqrt{2} - 1 : \sqrt{3} - \sqrt{2}$

उदाहरण 22 एक गुब्बारा $\left(\frac{g}{8}\right)$ सेमी/से^{2} के समान त्वरण से ऊपर की ओर जा रहा है। आधे मिनट बाद गुब्बारे से एक पिंड कितने समय में धरातल पर पहुँचेगा?

हल मान लिया कि गुब्बारे का प्रारंभिक वेग $u = 0$ दिया है।

यहाँ $\quad a = \left(\frac{g}{8}\right)$ है।

मान लीजिए कि गुब्बारा $\frac{1}{2}$ मिनट अर्थात् 30 से में h ऊँचाई तक पहुँचता है और उस समय उसका वेग v है। तब

$$v = u + at = 0 + \frac{g}{8} \times 30 = \frac{15}{4} g \tag{1}$$

और

$$h = ut + \frac{1}{2} at^2 = 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{8} (30^2) = \frac{225}{4} g \tag{2}$$

इस प्रकार पिंड $\frac{225}{4} g$ ऊँचाई से गिरता है और इस समय उसका वेग *ऊर्ध्वाधर* ऊपर की वेग $v = \frac{15}{4} g$ है। यदि पिंड द्वारा धरातल तक पहुँचने में t समय लगता है, तो

$$h = -v t + \frac{1}{2} g t^2$$

या

$$\frac{225}{4} g = -\frac{15g}{4} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

या $$2t^2 - 15t - 225 = 0$$

या $$(t-15)(2t+15) = 0$$

अब $t = 15$ से (क्योंकि समय ऋण नहीं हो सकता अतः $t = \frac{15}{2}$ अमान्य है)

उदाहरण 23 क्षैतिज से ऊपर की ओर θ कोण बनाने वाली दिशा में समान वेग V से एक पक्षी उड़ता है। उस क्षण जब पक्षी धरातल पर खड़े एक बालक से *ऊर्ध्वाधरतः* h ऊँचाई पर है, बालक एक पत्थर को, उन्नयन कोण α पर, फेंकता है। दर्शाइए कि प्रक्षेप-वेग कुछ भी हो, पत्थर पक्षी को नहीं लग सकता है जब तक कि

$$\tan\alpha \geq \left\{\tan\theta + \left(\frac{\sqrt{2gh}}{V\cos\theta}\right)\right\}$$

हल धरातल पर बालक की स्थिति को मूल बिंदु मानकर दो परस्पर लंब रेखाओं को निर्देशांक मान लिया। यदि पत्थर का प्रक्षेप-वेग u है (आकृति 16.22), तो

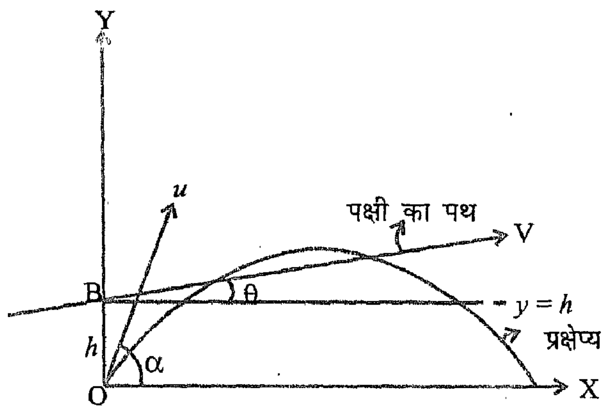
प्रक्षेप-पथ का समीकरण

$$y = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{(u^2\cos^2\alpha)} \text{ है।}$$

और पक्षी के गति का पथ

$$y = h + x\tan\theta \text{ है।}$$

पत्थर के प्रक्षेप-वेग u को इस प्रकार समायोजित किया जाता है कि पक्षी और पत्थर के x-निर्देशांक (भुज), एक ही समय पर, समान हों। इसके लिए निम्नलिखित प्रतिबंध हैं



आकृति 16.22

$$V\cos\theta = u\cos\alpha$$

यदि पत्थर पक्षी को लगता है तो एक ही समय पर दोनों के पथ का y-निर्देशांक (कोटि) भी समान होने चाहिए। इस प्रकार

$$h + x\tan\theta = x\tan\alpha - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{(u^2\cos^2\alpha)}$$

या $$gx^2 + 2u^2\cos^2\alpha(\tan\theta - \tan\alpha)x + 2u^2h\cos^2\alpha = 0$$

पत्थर पक्षी को तभी लगेगा जब उपर्युक्त वर्ग समीकरण के मूल वास्तविक हों और इसके लिए निम्नलिखित प्रतिबंध हैं :

$$(\tan\theta - \tan\alpha)^2 \geq \left(\frac{2gh}{u^2\cos^2\alpha}\right) \quad \text{अर्थात्} \quad \tan\alpha \geq \left\{\tan\theta + \left(\frac{\sqrt{2gh}}{V\cos\theta}\right)\right\}$$

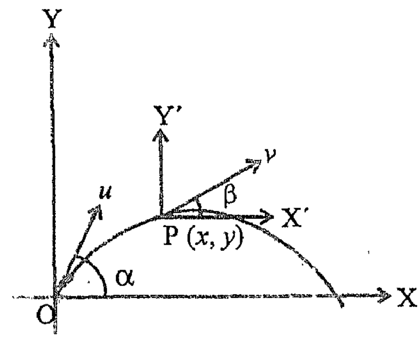
स्पष्टतः उपर्युक्त दशा उपंयुक्त है यदि $\alpha > \theta$, यदि $\theta > \alpha$ तब दोनों पथों का प्रतिच्छेदन बिंदु आरंभिक बिंदु के पीछे है जो हमारे लिए सार्थक नहीं है। अतः उपर्युक्त दशा ही वांछनीय है।

उदाहरण 24 किसी क्षण, एक कण क्षितिज से α कोण की दिशा में u वेग से चल रहा है। t समय बाद कण के पथ की दिशा क्षैतिज दिशा से β कोण बनाती है। सिद्ध कीजिए कि $u\cos\alpha = \dfrac{gt}{\tan\alpha - \tan\beta}$, यह भी सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{u\sin\theta}{g\cos(\theta-\alpha)}$ समय में गति की दिशा θ कोण से घूम जाती है तथा $\left(\dfrac{u}{g\sin\alpha}\right)$ समय में गति की दिशा, पहले की दिशा से समकोण बनाती है।

हल मान लिया कि OX और OY समकोणिक निर्देशांक्ष हैं। OX क्षैतिज और OY *ऊर्ध्वाधर* है तथा समय $t=0$ पर, मान लिया कि कण बिंदु O पर है, जहाँ से उसे u वेग से उस दिशा में फेंका जाता है जो क्षैतिज से α कोण बनाती है।

मान लिया कि समय t पर कण की स्थिति बिंदु $P(x, y)$ है (आकृति 16.23)। अब $\vec{v}$ के निम्न घटक हैं

$$\dot{x} = u\cos\alpha, \dot{y} = u\sin\alpha - gt$$



आकृति 16.23

क्योंकि गति की दिशा समय t पर क्षैतिज से β कोण बनाती है,

अतः $\tan\beta = \dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \dfrac{u\sin\alpha - gt}{u\cos\alpha} = \tan\alpha - \dfrac{gt}{u\cos\alpha}$

या $u\cos\alpha = \dfrac{gt}{\tan\alpha - \tan\beta}$

यदि गति की दिशा θ कोण से घूमती है, तो $\beta = \alpha - \theta$

अतः $t = \dfrac{1}{g}(u\cos\alpha)(\tan\alpha - \tan\beta) = \dfrac{1}{g}.\dfrac{u}{\cos\beta}\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{u\sin\theta}{g\cos(\alpha-\theta.)}$

विशेष रूप से गति की दिशा पूर्व दिशा से समकोण बनाएगी यदि $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ हो और तब

$$t = \frac{u \sin \frac{\pi}{2}}{g \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{u}{g \sin \alpha}$$

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 16)

1. एक स्टीमर, जिसका अग्रभाग उत्तर दिशा की ओर है, 15 किमी/घं के वेग से चलता है और इसे, दक्षिण पूर्व दिशा में $3\sqrt{2}$ किमी/घं की दर से प्रवाहित जलधार अपने साथ बहाती है। एक घंटा पश्चात् स्टीमर की दूरी और दिक्मान (bearing), उस बिंदु से, जहाँ से चलना प्रारंभ किया था, ज्ञात कीजिए।

   [संकेत यहाँ दिक्मान का तात्पर्य गति की दिशा तथा उत्तर दिशा के बीच दक्षिणावर्त बना कोण]

2. एक विमान चालक, 400 किमी/घं की चाल से उड़ रहे विमान द्वारा दिल्ली से चंडीगढ़ (दिल्ली से 250 किमी उत्तर) तक की, उड़ान लेना चाहता है। वायु 50 किमी/घं के वेग से पश्चिम दिशा से प्रवाहित हो रही हो, तो

   (i) विमान को किस दिशा में उड़ना चाहिए?

   (ii) उड़ान पूरी करने में कितना समय लगेगा?

3. एक व्यक्ति अचर वेग से तैर रहा है। वह शांत जल में नदी को सीधा पार करने में t_1 समय लेता है। और जब नदी बह रही होती है, तब नदी पार करने में t_2 समय लेता है। यदि नदी की चौड़ाई b है तो, दर्शाइए कि नदी के प्रवाह का वेग $\frac{b}{t_1 t_2}\sqrt{t_2^2 - t_1^2}$ है।

4. शांत जल में v वेग से चलने वाली किसी नौका को, u वेग से बहने वाली d चौड़ाई की एक नदी को पार करना है। ज्ञात कीजिए कि नौका को किस दिशा में खेया जाए, जिससे नदी को (a) न्यूनतम दूरी, (b) न्यूनतम समय में पार किया जाए।

5. एक कण सरल रेखा OX के अनुदिश गति करता है और बिंदु O से जब कण की दूरी x है उस समय वेग v समीकरण $v^2 = 12x - 3x^3$ से प्राप्त होता है। यदि जब वेग v है, तो उसका त्वरण f हो, तो दर्शाइए कि

   $$\frac{8}{v^4} = 8\,(6 - f)\,(12 - f)^2$$

6. यदि समान त्वरण के अधीन, एक सरल रेखा में गतिमान, किसी कण द्वारा, गति के $p^{\text{वें}}$, $q^{\text{वें}}$ और $r^{\text{वें}}$ सेकंडों में, चली गई दूरियाँ क्रमशः a, b, c हों, तो सिद्ध कीजिए कि

   $$a(q - r) + b(r - p) + c(p - q) = 0$$

7. 30 किमी/घं की दर से चलने वाली एक रेलगाड़ी को 1.5 मिनट में समान मंदन द्वारा किसी स्टेशन पर रोका जाता है। लगाया गया मंदन मी/से^{2} में कितना है? स्टेशन से कितनी दूर पहले ब्रेक लगाए गए थे?

8. एक रेलगाड़ी बिंदु O से विरामावस्था से चलना प्रारंभ करती है और बिंदु C पर पहुँच कर रुक जाती है। बिंदु O से बिंदु A तक अचर त्वरण कार्य करता है और बिंदु A पर रेलगाड़ी का वेग V है। बिंदु A से बिंदु B तक रेलगाड़ी समान वेग से चलती है और अंततः बिंदु B से बिंदु C तक अचर मंदन कार्य करता है। OA, OC और BC दूरियाँ a, c और b हैं। दर्शाइए कि O से C तक की यात्रा में कुल $\frac{(a+b+c)}{V}$ समय लगता है।

9. h गहराई के किसी खाली गड्ढे में एक पत्थर को गिराया जाता है, जिसकी गड्ढे के आधार (तली) से टकराने की ध्वनि t सेकंड बाद सुनाई पड़ती है। सिद्ध कीजिए कि $2h\left(1+\frac{gt}{v}\right)=gt^2$, जहाँ v ध्वनि का वेग है, जो परिमाण में h की तुलना में इतना अधिक है कि $\left(\frac{h}{v}\right)^2$ की उपेक्षा की जा सकती है।

10. ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर फेंके गए एक कण द्वारा h मीटर की ऊँचाई तक पहुँचने में t से लगता है। यदि इस बिंदु से पुनः धरातल तक पहुँचने में कण t' सेकंड समय लेता है, तो सिद्ध कीजिए कि $h=\frac{1}{2}gtt'$ और महत्तम ऊँचाई $\frac{g\,(t'+t)^2}{r}$, यह भी दर्शाइए कि $\frac{1}{2}h$ ऊँचाई पर कण का वेग $\frac{1}{2}g\sqrt{t^2+t'^2}$ मी/से है।

11. किसी कण का वेग जब वह महत्तम ऊँचाई पर है उस वेग का $\sqrt{\frac{2}{3}}$ गुना है, जब कण महत्तम ऊँचाई से आधी ऊँचाई पर था। कण का प्रक्षेप-कोण ज्ञात कीजिए।

12. यदि किसी क्षण, एक कण का वेग u है और उसके गति की दिशा क्षैतिज से α कोण पर झुकी है, तो सिद्ध कीजिए कि कण, $\frac{u}{g}\operatorname{cosec}\alpha$ समय बाद इस दिशा के समकोण दिशा में चलेगा।

13. किसी त्रिभुज के आधार के एक सिरे से फेंका गया कोई कण त्रिभुज के शीर्ष को स्पर्श करता हुआ आधार के दूसरे सिरे पर गिरता है। यदि त्रिभुज के आधार कोण A और B हों तथा प्रक्षेप-कोण α हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\alpha = \tan A + \tan B$

14. एक पत्थर को h ऊँचाई से u वेग से फेंका जाता है, जिससे वह धरातल पर स्थित एक ऐसे बिंदु से टकराए, जिसकी प्रक्षेप-बिंदु से दूरी R है। दर्शाइए कि प्रक्षेप-कोण α निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है।

$$R^2 \tan^2 \alpha - \frac{2u^2}{g} \tan \alpha + R^2 - \frac{2hu^2}{g} = 0$$

यह भी दर्शाइए कि इस प्रक्षेप-वेग के लिए धरातल पर महत्तम परास R' का मान $\sqrt{\frac{u^4}{g^2} + \frac{2hu^2}{g}}$ है और यदि α इस महत्तम परास के संगत, प्रक्षेप-कोण है, तो

$$\tan \alpha = \frac{u^2}{gR'} \quad \text{और} \quad \tan 2\alpha = \frac{R'}{h}$$

15. एक कण u वेग से α उन्नयन कोण पर फेंका जाता है। सिद्ध कीजिए कि यदि $h < \frac{u^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, तो कण पहली बार h ऊँचाई पर पहुँचने के $\frac{2}{g}\sqrt{u^2 \sin^2 \alpha - 2gh}$, समय बाद पुनः h ऊँचाई पर पहुँचता है।

16. एक पत्थर v वेग से θ उन्नयन कोण पर समतल धरातल के बिंदु O से फेंका जाता है ताकि वह O से a दूरी पर स्थित किसी दीवार के बिंदु P से टकराए। यदि बिंदु P की धरातल से ऊँचाई b हो, तो सिद्ध कीजिए कि $2v^2\left(a \sin\theta \cos\theta - b \cos^2 \theta\right) = ga^2$

17. एक कण इस प्रकार फेंका जाता है कि, उसका प्रक्षेप-बिंदु से जाने वाले क्षैतिज धरातल पर परास R है। यदि α, β संभव प्रक्षेप-कोण हों और t_1, t_2 संगत उड्डयन काल हों, तो दर्शाइए कि $\frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1^2 + t_2^2} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$

18. 10 मी ऊँची किसी क्षैतिज सुरंग के भीतर 70 मी/से के वेग से फेंके गए एक पत्थर का महत्तम परास ज्ञात कीजिए। संगत उड्डयन काल भी ज्ञात कीजिए।

19. एक तोप, किसी गोले को प्रारंभिक मजल (नालमुख) वेग u से दागती है। दर्शाइए कि वह महत्तम क्षैतिज दूरी, जिस पर h ऊँचाई पर स्थित किसी विमान को, मारा जा सकता है $\frac{u}{g}\sqrt{u^2 - 2gh}$, है और उस समय तोप का उन्नयन कोण $\tan^{-1}\left(\frac{u}{\sqrt{u^2 - 2gh}}\right)$ है।

वार्षिकी (ANNUITY) 17

17.1 भूमिका (Introduction)

हम पहले से ही जानते हैं कि एक वित्तीय संस्थान में जमा की गई राशि पर चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन कैसे किया जाता है, परंतु सामान्यतः, व्यक्ति भविष्य की वचनबद्धता, कर्तव्यों एवं उत्तरदायित्वों जैसे-बच्चों की उच्च शिक्षा, अपने बच्चों का विवाह, घर खरीदना, वृद्धावस्था के लिए एक समय में अधिक धन-राशि नहीं बचा सकते हैं। इसलिए, व्यक्ति विभिन्न वित्तीय संस्थानों में विभिन्न समयों पर छोटी–छोटी धनराशि जमा करते हुए बचत करते हैं। दूसरी ओर व्यक्ति कुछ वस्तुएँ; जैसे – मकान, कार, टेलीविजन इत्यादि ऋण पर खरीद लेते हैं और किस्तों में लौटाते हैं। यह सभी लेन-देन 'वार्षिकी' शीर्षक के अंतर्गत आते हैं। प्रस्तुत अध्याय में हम वार्षिकी के विभिन्न प्रकारों अर्थात् साधारण वार्षिकी, देय वार्षिकी, आस्थगित (deferred) वार्षिकी और शोधन निधि (sinking fund) पर विचार करेंगे।

17.2 वार्षिकी (Annuity)

समान राशियों के भुगतान का अनुक्रम, जो समान समयांतरालों पर किया जाता है, वार्षिकी कहलाता है। आवर्तक जमा खाते का भुगतान, गृह ऋण का मासिक किस्तों में पुनर्भुगतान, मासिक या अर्द्धवार्षिक बीमा किस्त का भुगतान इत्यादि वार्षिकी के उदाहरण हैं। आइए, अब हम वार्षिक के कुछ आधारभूत शब्दों पर विचार करें।

1. **आवर्ती भुगतान (Periodic Payment)** एक वार्षिकी के प्रत्येक भुगतान का परिमाण वार्षिकी का आवर्ती भुगतान कहलाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी बीमा पालिसी की 5000 रु की प्रीमियम राशि प्रतिवर्ष जनवरी में भुगतान की जाती है तो 5000 रु वार्षिकी का आवर्ती भुगतान है।

2. **भुगतान आवर्त (Payment period)** दो क्रमागत वार्षिकी भुगतान तिथियों के मध्य का समय, इसकी भुगतान आवर्त या भुगतान अंतराल कहलाता है। भुगतान आवर्त वार्षिक, अर्द्धवार्षिक, त्रैमासिक, मासिक, दैनिक इत्यादि हो सकता है।

3. **अवधि (Term)** प्रथम भुगतान आवर्त के प्रारंभ से अंतिम भुगतान आवर्त के अंत तक का कुल समय

वार्षिकी की अवधि कहलाता है। यदि जीवन बीमा निगम की पालिसी का प्रीमियम 20 वर्ष के लिए प्रतिवर्ष जून में दिया जाता है तो भुगतान आवर्त वार्षिक तथा अवधि 20 वर्ष है।

4. वार्षिकी का मिश्रधन (Amount of an annuity) वार्षिकी का मिश्रधन (भविष्य मूल) वह कुल धनराशि है जो वार्षिकी की अवधि समाप्ति पर देय होगी जबकि प्रत्येक देय किस्त अवधि की समाप्ति तक चक्रवृद्धि ब्याज पर रखी जाती है। उदाहरण के लिए, एक व्यक्ति 6 वर्ष के लिए अपने बचत बैंक खाते में प्रतिमाह 100 रु जमा करता है और 6 वर्ष बाद वह 8000 रु प्राप्त करता है तो 8000 रु वार्षिकी की भविष्य मूल्य राशि-मिश्रधन है।

5. वार्षिकी का वर्तमान मूल्य (Present value of an annuity) वार्षिकी का वर्तमान मूल्य निश्चित समय-आवर्त के बाद होने वाले समान आवर्ती भुगतानों के अनुक्रम का प्रचलित मूल्य है। उदाहरण के लिए, सुनील 10,000 रु के ऋण चुकाने के लिए एक वर्ष तक 100 रु प्रति माह देता है तो 10,000 रु वार्षिकी का वर्तमान मूल्य है।

17.3 वार्षिकी के प्रकार (Types of Annuity)

(i) साधारण वार्षिकी (Ordinary annuity) वह वार्षिकी जिसमें भुगतान प्रत्येक भुगतान आवर्त के बाद होता है, साधारण वार्षिकी कहलाती है। उदाहरणतः गृह ऋण तथा कार ऋण का समान किस्तों में पुनर्भुगतान।

(ii) देय वार्षिकी (Annuity due) वह वार्षिकी जिसमें भुगतान प्रत्येक आवर्त के प्रारंभ में किया जाता है, देय वार्षिकी कहलाती है। बीमा पालिसी के प्रीमियम का भुगतान, बैंक तथा डाकखाने में आवर्ती जमा का भुगतान देय वार्षिकी के उदाहरण हैं।

(iii) आस्थगित वार्षिकी (Deferred annuity) वह वार्षिकी है जिसमें भुगतान समय के निर्दिष्ट संख्या में समय आवर्तों के बीतने के पश्चात प्रारंभ होता है। भारतीय जीवन बीमा निगम की सेवा वृत्ति योजना आस्थगित वार्षिकी का एक उदाहरण है।

इस प्रकार, वार्षिकी की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं–

(i) आवर्ती प्राप्तियाँ / भुगतान (या किस्तें) समान राशि की होती हैं।

(ii) किस्त प्रत्येक समय के अंत में या प्रारंभ में देय होती हैं।

(iii) दो क्रमागत या उत्तरवर्ती किस्तों के मध्य समयांतराल समान होता है।

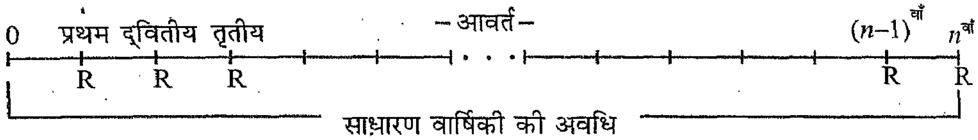
(iv) प्रत्येक अंतराल के अंत में ब्याज निरंतर संयोजित होती है।

अगले अनुच्छेदों में हम विभिन्न प्रकार की वार्षिकी के मिश्रधन और वर्तमान मूल्य के लिए सूत्र व्युत्पन्न करेंगे।

17.4 साधारण वार्षिकी (Ordinary Annuity)

17.4.1 ***साधारण वार्षिकी का मिश्रधन (Amount of an ordinary annuity)*** एक साधारण वार्षिकी का मिश्रधन वार्षिकी की अवधि के अंत तक कुल किए भुगतानों और उन पर ब्याज का योग है।

आइए हम R रु प्रति आवर्त की n आवर्तों वाली r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर से ब्याज की एक साधारण वार्षिकी पर विचार करें। प्रथम भुगतान प्रथम आवर्त के बाद किया जाएगा और इसी प्रकार, अब हम प्रत्येक किस्त की भविष्य धनराशि और वार्षिकी मिश्रधन को ज्ञात करने के लिए आकृति 17.1 पर विचार करेंगे–



आकृति 17.1

वर्तमान भुगतान R *(रुपयों में)*	n *आवर्त के अंत में मिश्रधन (रुपयों में)*
प्रथम	$R(1+r)^{n-1}$
द्वितीय	$R(1+r)^{n-2}$
...	...
...	...
$(n-1)$वाँ	$R(1+r)$
nवाँ (अंतिम भुगतान)	R

चूंकि प्रत्येक आवर्त के बाद भुगतान किया जाता है, इसलिए ये उस आवर्त, जिसके बाद मूल राशि जमा की जाती है, का ब्याज अर्जित नहीं कर पाते हैं। अत: प्रथम भुगतान $(n-1)$ आवर्तों का r प्रति रु प्रति आवर्त की दर से चक्रवृद्धि ब्याज अर्जित करेगा और निरंतर इस प्रकार वार्षिकी की कुल भविष्य धनराशि (मिश्रधन) A,

$$A = R + R(1 + r) + R(1 + r)^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + R(1 + r)^{n-1}$$

से प्रदत्त है।

चूंकि यह एक n पदों की गुणोत्तर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद R तथा गुणोत्तर अनुपात $(1+r)$ है, इसलिए

$$A = R\left[\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}\right] = R\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

यदि आवर्ती भुगतान 1 रु है, तो वार्षिकी का मिश्रधन $\dfrac{(1+r)^n-1}{r}=S_{\overline{n}|r}$ है। प्रतीक $S_{\overline{n}|r}$ को "S, r पर कोण n" पढ़ा जाता है। R रु प्रति भुगतान आवर्त की n आवर्तों के लिए r प्रति रुपया प्रति आवर्त की ब्याज दर से साधारण वार्षिकी का मिश्रधन $A = R\,S_{\overline{n}|r}$ से प्रदत्त है।

टिप्पणी

1. $S_{\overline{n}|r}$ के मान का परिकलन विभिन्न दरों पर विभिन्न समय आवर्तों के लिए की गई है और सारणियों के रूप में संकलित किया गया है। इन सारणियों को वार्षिकी सारणी* कहते हैं।

2. अधिकतर प्रश्न वार्षिकी सारणी का लघुगणक सारणी के प्रयोग से हल किए जा सकते हैं, परंतु उत्तरों में बहुत थोड़ा अंतर आ सकता है। वार्षिकी सारणियों का प्रयोग अच्छा है क्योंकि इससे गणना कार्य कम हो जाता है। परंतु, विद्यार्थियों को दोनों प्रकार की सारणी से अभ्यास हेतु कुछ प्रश्नों को वार्षिकी सारणी के प्रयोग से जब कि अन्य प्रश्नों को लघुगणक सारणी के प्रयोग से हल करेंगे।

उदाहरण 1 प्रत्येक 3 माह के अंत में देय 400 रु वाली, 6 वर्ष के लिए, 8% वार्षिक ब्याज की दर से त्रैमासिक संयोजित एक साधारण वार्षिकी का मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि $A = R\,S_{\overline{n}|r}$

यहाँ $R = 400,\ r = \dfrac{0.08}{4} = 0.02$ और $n = 6 \times 4 = 24$

इसलिए $A = 400 \times S_{\overline{24}|0.02}$

$$= 400 \times 30.4219 = 12168.76$$

अत:, वार्षिकी का मूल्य (मिश्रधन) = 12168.76 रु है।

वैकल्पिक विधि

हमें ज्ञात है कि $A = R\left[\dfrac{(1+r)^n-1}{r}\right]$

यहाँ $R = 400,\ r = \dfrac{0.08}{4} = 0.02$, और $n = 6 \times 4 = 24$

---

* वार्षिकी सारणियाँ पुस्तक के अंत में प्रदत्त हैं।

इसलिए $A = 400\left[\dfrac{(1+0.02)^{24}-1}{0.02}\right]$

मान लीजिए $x = (1.02)^{24}$

तब $\log x = 24 \log 1.02$

$= 24 \times 0.0086 = 0.2064$

$\Rightarrow$ $x = \text{antilog } 0.2064 = 1.608$

अतः $A = 400 \times \dfrac{1.608-1}{0.02}$

$= 400 \times \dfrac{0.608}{0.02} = 12160$

अतः, वार्षिकी का मूल्य (मिश्रधन) = 12160 रु है।

टिप्पणी उदाहरण 1 में, दोनों विभिन्न विधियों से हल करने पर प्राप्त मिश्रधनों में हम 8.76 रु का अंतर पाते हैं। दोनों मिश्रधन सन्निकट धनराशि के हैं अतः अंतर नगण्य है।

उदाहरण 2 प्रत्येक वर्ष के अंत में कितनी धनराशि बचाई जाए ताकि 5% वार्षिक ब्याज दर से प्रतिवर्ष संयोजित करने पर 8 वर्ष के बाद मिश्रधन 1,48,970 रु हो जाए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हमें ज्ञात है कि $A = R\left[\dfrac{(1+r)^{n}-1}{r}\right]$

यहाँ $A = 148970, r = 0.05$ और $n = 8$

इसलिए $148970 = R\left[\dfrac{(1+0.05)^{8}-1}{0.05}\right] = R\left[\dfrac{(1.05)^{8}-1}{0.05}\right]$

मान लीजिए $x = (1.05)^{8}$

तब $\log x = 8 \log 1.05 = 8 \times 0.0212 = 0.1696$

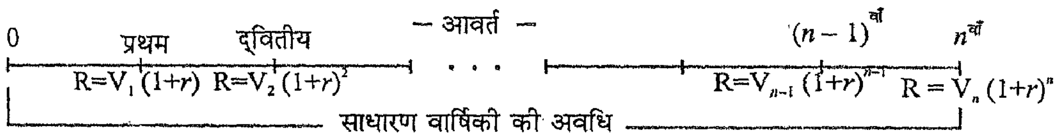
$\Rightarrow$ $x = \text{antilog } 0.1696 = 1.478$

इस प्रकार, हम पाते हैं $148970 = R \times \frac{1.478 - 1}{0.05}$

या $$R = \frac{148970 \times 0.05}{0.478} = 15582.64$$

अतः, 15582.64 रु प्रत्येक वर्ष के अंत में बचाए जाएँ।

17.4.2 *एक साधारण वार्षिकी का वर्तमान मूल्य* (*Present value of an ordinary annuity*) कभी-कभी कोई व्यक्ति निश्चित समय आवर्तों के लिए किए जाने वाले समान आवर्ती भुगतानों का वर्तमान मूल्य V ज्ञात करना चाह सकता है। एक वार्षिकी के वर्तमान मूल्य को धनराशि V से निरूपित किया जाता है। वार्षिकी का वर्तमान मूल्य या पूँजी मूल्य सभी भुगतानों के वर्तमान मूल्यों का योग होता है। एक वार्षिकी के वर्तमान मूल्य के लिए व्यापक सूत्र हेतु आइए हम r प्रति रुपया प्रति आवर्त की ब्याज दर से R रु के प्रत्येक n भुगतानों वाली एक वार्षिकी जिसका प्रथम भुगतान प्रथम आवर्त के बाद देय है पर विचार करें (आकृति 17.2)।



आकृति 17.2

जहाँ एक वार्षिकी की प्रत्येक किस्त राशि R रु है और $V_1, V_2, \ldots, V_n$ क्रमशः प्रथम, द्वितीय, ..., nवें भुगतानों के वर्तमान मूल्य हैं।

$$\text{प्रथम भुगतान का वर्तमान मूल्य} = V_1 = \frac{R}{1+r}$$

$$\text{द्वितीय भुगतान का वर्तमान मूल्य} = V_2 = \frac{R}{(1+r)^2}$$

... ...

... ...

$$n \text{ वें भुगतान का वर्तमान मूल्य} = V_n = \frac{R}{(1+r)^n} \quad \text{(आकृति 17.2)}$$

इसलिए $$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$= \frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^n}$$

चूंकि यह n पदों की गुणोत्तर श्रेढ़ी है जिसका प्रथम पद $\frac{R}{1+r}$ और सार्व अनुपात $\frac{1}{1+r}$ है, इसलिए

$$V = \frac{R}{1+r}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+r)^n}}{1-\frac{1}{1+r}}\right] = R\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

इस प्रकार, R रु प्रति भुगतान आवर्त, n आवर्तों वाली r प्रति रु प्रति आवर्त के ब्याज दर से एक साधारण वार्षिकी का वर्तमान मूल्य

$$V = R\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] = R\ a_{\overline{n}|r}$$

से प्रदत्त है।

प्रतीक $a_{\overline{n}|r}$, 1 रु प्रति भुगतान n आवर्तों वाली r प्रति आवर्त पर एक साधारण वार्षिकी के वर्तमान मूल्य को प्रदर्शित करता है।

टिप्पणी $a_{\overline{n}|r}$ के मान की विभिन्न दरों और समय आवर्तों के लिए गणना की जाती है और सारणी के रूप में संकलित की जाती है। इन सारणियों को वार्षिकी सारणी कहते हैं।

उदाहरण 3 1200 रु प्रति वर्ष, 10 वर्षों के लिए 12 % वार्षिक ब्याज की दर से वार्षिक संयोजित एक वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं $V = R\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$

यहाँ $R = 1200,\ n = 10,\ r = 0.12$

इसलिए $V = 1200 \times \left[\frac{1-(1+0.12)^{-10}}{r}\right] = 1200 \times \left[\frac{1-(1.12)^{-10}}{0.12}\right]$

अर्थात् $x = (1.12)^{-10}$

तब $\log x = -10 \log 1.12$

$= -10 \times 0.0492 = -0.492 = \bar{1}.508$

अत: $x = \text{antilog } \bar{1}.508 = 0.3221$

इस प्रकार, हम पाते हैं $V = 1200 \times \frac{1-0.3221}{0.12} = \frac{1200 \times 0.6779}{0.12} = 6779$

अत:, साधारण वार्षिकी का वर्तमान मूल्य = 6779 रु है।

उदाहरण 4 एक महिला 30,000 रु 6% वार्षिक ब्याज पर उधार लेती है तथा ऋण को 20 समान वार्षिक किस्तों में लौटाने का आश्वासन देती है। प्रथम किस्त प्रथम वर्ष के अंत में देय है। प्रत्येक किस्त का मान ज्ञात कीजिए। (वार्षिक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं, $V = R\, a_{\overline{n}|r}$

यहाँ $V = 30000,\ r = \frac{6}{100} = 0.06,\ n = 20$

इसलिए $30000 = R\, a_{\overline{20}|0.06} = R \times 11.4699$

$\Rightarrow$ $R = \frac{30000}{11.4699} = 2615.54$

अत: प्रत्येक किस्त का मूल्य 2615.54 रु है।

प्रश्नावली 17.1

1. निम्नलिखित साधारण वार्षिकियों की भविष्य धनराशि (मिश्रधन) ज्ञात कीजिए:
   (a) 1000 रु प्रतिवर्ष, 5 वर्ष के लिए जो 7% वार्षिक ब्याज की दर पर, वार्षिक संयोजित हो।
   (b) 500 रु प्रति तिमाही, 10 वर्ष के लिए जो 8% वार्षिक ब्याज की दर पर, त्रैमासिक संयोजित हो।
   (c) 4000 रु प्रत्येक छमाही, 15 वर्ष के लिए जो 5% वार्षिक ब्याज की दर पर, छमाही संयोजित हो।
2. 500 रु प्रत्येक तीन माह के अंत में देय 4 वर्षों तक 6% वार्षिक ब्याज की दर से त्रैमासिक संयोजित। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)
3. महोदय 'X' ने एक वित्तीय कंपनी में 1000 रु प्रत्येक माह के अंत में जमा किया। कंपनी 12% प्रतिवर्ष की दर से, मासिक चक्रवृद्धि संयोजित ब्याज देती है। 2 वर्ष के अंत में कुल धनराशि क्या होगी? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)
4. एक बैंक 6% प्रतिवर्ष की दर से, त्रैमासिक चक्रवृद्धि संयोजित, ब्याज देता है। 3 वर्षों के लिए प्रत्येक त्रैमासिक

के अंत में देय समान भुगतान क्या होगा, यदि एक व्यक्ति 15,000 रु 3 वर्षों की समाप्ति तक रखना चाहता है। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

5. श्रीमती सुलोचना, अपने अवकाश ग्रहण, जो 16 वर्ष बाद होना है, पर एक घर निर्माण के लिए 6,00,000 रु एकत्रित करना चाहती है। उक्त रुपया पाने के लिए प्रत्येक वर्ष के अंत में उन्हें कितनी धनराशि जमा करनी चाहिए जबकि कंपनी 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देती है। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

6. प्रत्येक वर्ष के अंत में कितनी धनराशि जमा करनी चाहिए यदि आठवीं जमा राशि तक 20,000 रु एकत्रित हो, यदि ब्याज 10% वार्षिक दर से प्रतिवर्ष संयोजित किया जाता है? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

7. 5000 रु प्रति वर्ष, 12 वर्ष के लिए, 4% वार्षिक ब्याज की दर से प्रतिवर्ष संयोजित होने वाली एक वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

8. प्रत्येक छमाही के अंत में 800 रु देय 5 वर्षों के लिए एक वार्षिकी के वर्तमान मूल्य को ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से अद्र्धवार्षिक संयोजित है। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

9. एक वार्षिकी, जिसमें 10 वर्षों तक प्रत्येक तीन माह के अंत में 200 रु देय हो, का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। जबकि ब्याज 16% वार्षिक की दर से त्रैमासिक संयोजित हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

10. 2400 रु प्रतिवर्ष, 12 वर्ष के लिए, 16% वार्षिक ब्याज की दर से प्रतिवर्ष संयोजित एक साधारण वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

11. एक 10,000 रु का ऋण 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 12 समान वार्षिक किस्तों में चुकाया जाता है जो प्रथम वर्ष के अंत से प्रारंभ होती हैं। प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

12. एक आदमी एक घर खरीदता है तथा इसको गिरवी रखकर 8,00,000 रु का ऋण लेता है जिसका 12 वर्षों में समान वार्षिक किस्तों में 9% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से पुनर्भुगतान किया जाएगा। प्रतिवर्ष कितनी राशि देय होगी? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

13. एक घर 2,20,000 रु के नकद भुगतान पर तथा 10,000 रु की समान 12 त्रैमासिक किस्तों पर बेचा जाता है घर का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए यदि धनराशि 16% वार्षिक ब्याज की दर से त्रैमासिक संयोजित है। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

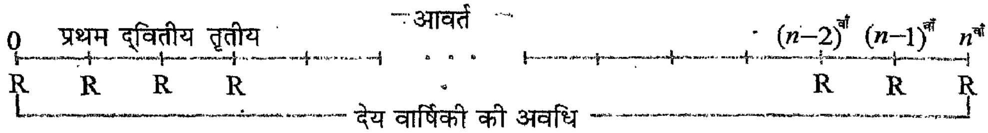
(संकेत: नकद मूल्य $= 220000 + V$)

14. मोहम्मद खान ने एक कार 20,000 रु का नकद भुगतान करते हुए खरीदी और अगले 18 माह तक 2000 रु प्रति माह भुगतान करने का वचन दिया। यदि विक्रेता 18% वार्षिक ब्याज की दर से मासिक संयोजित ब्याज लेता हो तो कार का नकद मूल्य क्या है? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

17.5 देय वार्षिकी (Annuity Due)

17.5.1 *देय वार्षिकी का मिश्रधन (Amount of an annuity due)* इस अनुच्छेद में हम उस वार्षिकी की भविष्य धनराशि (मिश्रधन) ज्ञात करेंगे जब भुगतान प्रत्येक आवर्त के प्रारंभ में किया जाता है।

एक देय वार्षिकी के भविष्य मूल्य (मिश्रधन) के सूत्र के विकास (व्युत्पन्न) करने के लिए, आइए हम एक खाते में प्रत्येक आवर्त के प्रारंभ में भुगतान की गई धनराशि R रु जो n आवर्तों के लिए r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर से जमा की जा रही है, पर विचार करें (आकृति 17.3)।



आकृति 17.3

R रु का वर्तमान भुगतान	n वें आवर्त के अंत में धनराशि (रुपयों में)
प्रथम	$R(1+r)^n$
द्वितीय	$R(1+r)^{n-1}$
...	...
...	...
$(n-1)$वाँ	$R(1+r)^2$
nवाँ	$R(1+r)$

यह सुस्पष्ट है कि प्रथम भुगतान r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर से n आवर्तों के लिए संयोजित ब्याज अर्जित करेगा। इस प्रकार देय वार्षिकी का कुल मिश्रधन A

$$A = R(1+r) + R(1+r)^2 + \ldots + R(1+r)^n$$

$$= R(1+r)\left[\frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}\right]$$

$$= R\left[\frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r} - 1\right] = R\left(S_{\overline{n+1}|r} - 1\right)$$

उदाहरण 5 प्रत्येक 3 माह के प्रारंभ में एक बचत खाते में, जो 8% वार्षिक की दर से त्रैमासिक चक्रवृद्धि ब्याज देता है, 2000 रु जमा किए जाते हैं। 3 वर्ष बाद खाते में जमा धनराशि ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं, $A = R\left(S_{\overline{n+1}|r} - 1\right)$

यहाँ $$R = 2000,\ r = \frac{0.08}{4} = 0.02 \text{ and } n = 12$$

इसलिए $$A = 2000\left(S_{\overline{13}|0.02} - 1\right) = 2000[14.6803 - 1]$$

$$= 2000 \times 13.6803 = 27360.60$$

इस प्रकार, अंत में खाते में जमा धनराशि 27360.60 रु होगी।

उदाहरण 6 प्रत्येक 6 माह के प्रारंभ में देय, 20,000 रु के लिए एक वार्षिकी का, 8 वर्षों के लिए समान भुगतानों वाली परिकलन किया जाता है। यदि ब्याज 18% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित हो, तो प्रत्येक भुगतान कितना है? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं $A = R\left[\frac{(1+r)^{n+1} - 1}{r} - 1\right]$

यहाँ $$A = 20000,\ r = \frac{0.18}{2} = 0.09,\ n = 8 \times 2 = 16$$

इसलिए $$20000 = R\left[\frac{(1+0.09)^{17} - 1}{0.09} - 1\right] = R\left[\frac{(1.09)^{17} - 1}{0.09} - 1\right]$$

मान लीजिए, $x = (1.09)^{17}$

तब $$\log x = 17 \log 1.09 = 17 \times 0.0374 = 0.6358$$

अतः $$x = \text{antilog } 0.6358 = 4.323$$

इस प्रकार, हम पाते हैं $20000 = R\left[\frac{4.323 - 1}{0.09} - 1\right] = R\left[\frac{3.323}{0.09} - 1\right]$

$$= R(36.92 - 1) = R \times 35.92$$

या $$R = \frac{20000}{35.92} = 556.79$$

अतः, प्रत्येक भुगतान 556.79 रु का है।

17.5.2 देय वार्षिकी का वर्तमान मूल्य (*Present value of an annuity due*) देय वार्षिकी का वर्तमान मूल्य प्रत्येक आवर्त के प्रारंभ में किए गए समस्त भुगतानों का योग है। देय वार्षिकी के वर्तमान मूल्य के लिए सूत्र प्राप्त करने से पूर्व, आइए हम n आवर्तों के लिए, r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर से R रु प्रति आवर्त की देय वार्षिकी पर विचार करें, जबकि प्रथम भुगतान प्रथम आवर्त के प्रारंभ में देय है।

प्रथम भुगतान का वर्तमान मूल्य $= \mathrm{R}$

द्वितीय भुगतान का वर्तमान मूल्य $= \dfrac{\mathrm{R}}{1+r}$

... ...

... ...

nवें भुगतान का वर्तमान मूल्य $= \dfrac{\mathrm{R}}{(1+r)^{n-1}}$

इस प्रकार, r प्रति रुपया प्रति आवर्त की ब्याज दर से प्रत्येक R रु के n भुगतानों पर देय वार्षिकी का वर्तमान मूल्य V,

$$\mathrm{V} = \mathrm{R} + \frac{\mathrm{R}}{1+r} + \frac{\mathrm{R}}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{\mathrm{R}}{(1+r)^{n-1}}$$

$$= \mathrm{R}\left[\frac{1-\dfrac{1}{(1+r)^n}}{1-\dfrac{1}{1+r}}\right] = \mathrm{R}(1+r)\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{1+r-1}\right]$$

$$= \mathrm{R}\left[\frac{(1+r)-(1+r)^{-n+1}}{r}\right] = \mathrm{R}\left[1+\frac{1-(1+r)^{-(n-1)}}{r}\right]$$

या तुल्यतः $\quad \mathrm{V} = \mathrm{R}\left(1 + a_{\overline{n-1}|r}\right)$

उदाहरण 7 6 वर्षों के लिए 1000 रु प्रति तिमाही भुगतान वाली देय वार्षिकी का वर्तमान मूल्य क्या होगा यदि राशि 8% वार्षिक ब्याज की दर पर प्रति तिमाही संयोजित होती हो? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं, $V = R\left(1 + a_{\overline{n-1}|r}\right)$

यहाँ $R = 1000,\ r = \dfrac{0.08}{4} = 0.02,\ \ n = 6 \times 4 = 24$

इसलिए, $V = 1000\left(1 + a_{\overline{23}|0.02}\right)$

$$= 1000(1 + 18.2922) = 1000(19.2922) = 19292.20$$

इस प्रकार, वार्षिकी का वर्तमान मूल्य 19292.20 रु है।

उदाहरण 8 5,00,000 रु मूल्य के घर को खरीदने के लिए 8 वर्ष तक प्रत्येक माह के प्रारंभ में क्या समान भुगतान करना होगा यदि ब्याज 12 % वार्षिक दर से मासिक संयोजित होता हो? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं, $V = R\left[1 + \dfrac{1 - (1+r)^{-(n-1)}}{r}\right]$

यहाँ $V = 500000,\ r = \dfrac{0.12}{12} = 0.01,\ \ n = 8 \times 12 = 96$

इसलिए $500000 = R\left[1 + \dfrac{1 - (1+0.01)^{-(96-1)}}{0.01}\right]$

$$= R\left[1 + \frac{1 - (1.01)^{-95}}{0.01}\right]$$

मान लीजिए $x = (1.01)^{-95}$

तब $\log x = -95 \log 1.01 = -95 \times 0.0043$

$$= -0.4085 = \bar{1}.5915$$

या $x = \text{antilog } \bar{1}.5915 = 0.3904$

इस प्रकार हम पाते हैं $500000 = R\left[1+\frac{1-0.3904}{0.01}\right]$

$$= R\left[1+\frac{0.6096}{0.01}\right] = R(1+60.96)$$

या $$R = \frac{500000}{61.96} = 8069.72$$

अतः, वांछित भुगतान 8069.72 रु है।

प्रश्नावली 17.2

1. प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में 5,000 रु देय वाली एक वार्षिकी का 6 वर्ष बाद मिश्रधन ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 5% वार्षिक की दर से संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)
2. प्रत्येक माह के प्रारंभ में एक पोस्ट ऑफिस के बचत खाते में 500 रु जमा किए जाते हैं जिस पर 12% वार्षिक दर से ब्याज मिलता है और ब्याज मासिक संयोजित होता है। 6 वर्ष बाद खाते में जमा राशि ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
3. 4 वर्षों के लिए, 8000 रु प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में, 8% वार्षिक ब्याज की दर पर, जहाँ ब्याज वार्षिक संयोजित होता है, एक खाते में जमा किए जाते हैं। वार्षिकी की भविष्य राशि (मिश्रधन) ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)
4. एक बैंक 6% वार्षिक दर से तिमाही संयोजित होने वाला ब्याज देता है। ज्ञात कीजिए कि 16,000 रु संचय करने के लिए 10 वर्ष तक प्रत्येक तिमाही के प्रारंभ में क्या जमा किया जाए? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)
5. 10 वर्ष की अवधि की देय वार्षिकी के भविष्य मूल्य 10,000 रु के लिए छमाही भुगतान निश्चित कीजिए, यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता है। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
6. एक बैंक 8% वार्षिक दर से तिमाही संयोजित होने वाला ब्याज देता है। ज्ञात कीजिए कि 5 वर्ष में 12,000 रु पाने के लिए प्रत्येक तिमाही के प्रारंभ में कितने रुपए जमा किए जाएँ। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
7. 10 वर्ष के लिए, प्रति छमाही के प्रारंभ में देय 15,000 रु की वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
8. एक व्यक्ति ने एक घर खरीदा, जिसके लिए वह 5 वर्ष तक प्रत्येक माह के प्रारंभ में 5,000 रु का भुगतान करने को तैयार हो गया। प्रथम किस्त का भुगतान तुरंत करना है। यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से मासिक संयोजित हो तो घर का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
9. एक बीमा पालिसी की 600 रु की प्रति तिमाही किस्त 15 वर्ष की अवधि के लिए प्रत्येक तिमाही के प्रारंभ में देय होती है। यदि ब्याज 6% वार्षिक, दर से त्रैमासिक संयोजित हो तो बीमा की गई धनराशि ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

10. 50,000 रु की वर्तमान मूल्य वाली वार्षिकी, जिसकी अवधि 5 वर्ष है, के लिए मासिक भुगतान निश्चित कीजिए यदि ब्याज 9% वार्षिक दर से मासिक संयोजित हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

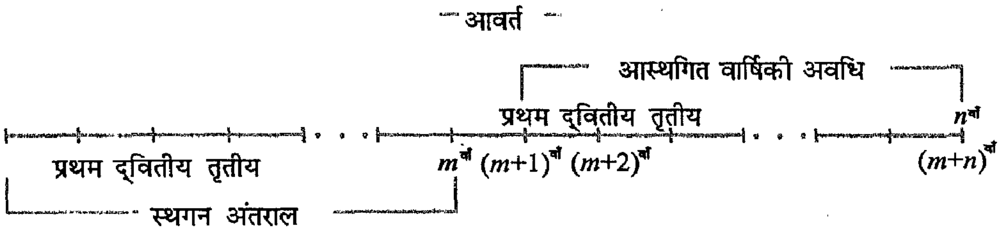
(संकेत : $\log 1.0075 = \log \frac{2.0150}{2}$)

11. 4,00,000 रु मूल्य के भूमि के टुकड़े के लिए 10 वर्ष तक प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में क्या भुगतान किया जाए, यदि राशि पर ब्याज 7% वार्षिक की दर से प्रतिवर्ष संयोजित हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

12. किसी आदमी ने एक 2,00,000 रु मूल्य की कार खरीदी और इसका 20 समान अर्धवार्षिक किस्तों में पुनर्भुगतान करने को तैयार हुआ। प्रथम किस्त का भुगतान तुरंत कर दिया गया। प्रत्येक किस्त का मूल्य ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से प्रति छमाही संयोजित हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

17.6 आस्थगित वार्षिकी (Deferred Annuity)

आस्थगित वार्षिकी में प्रथम भुगतान निर्दिष्ट आवर्त के अंत तक स्थगित कर दिया जाता है। यदि एक n भुगतान वाली वार्षिकी m आवर्तों के बाद प्रारंभ हो और प्रति आवर्त बाद n आवर्तों तक नियमित रूप से भुगतान किए जाएँ तो ऐसी वार्षिकी m आवर्तों द्वारा स्थगित n भुगतानों वाली आस्थगित वार्षिकी कहलाएगी।



आकृति 17.4

आस्थगित वार्षिकी के अब और अवधि प्रारंभ के मध्य का समय-अंतराल स्थगन अंतराल (Interval of deferment) (आकृति 17.4) कहलाता है जो प्रथम भुगतान के देय होने से एक आवर्त पूर्व समाप्त हो जाता है।

17.6.1 ***आस्थगित वार्षिकी का मिश्रधन (Amount of a deferred annuity)*** आस्थगित वार्षिकी का मिश्रधन इसकी अवधि के अंत में वार्षिकी का मूल्य है और यह स्थगन अंतराल पर निर्भर नहीं करती है। इस प्रकार, यदि एक आस्थगित वार्षिकी, प्रत्येक R रु भुगतान वाले n भुगतानों पर r प्रति रुपया प्रति आवर्त की है तथा m आवर्तों के लिए आस्थगित है तब इस वार्षिकी का मिश्रधन A ,

$$A = R\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right] = R\, S_{\overline{n}|r}$$

से प्रदत्त है जो R रु प्रति भुगतान पर n आवर्तों की r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर से एक साधारण वार्षिकी का मिश्रधन है।

उदाहरण 9 प्रत्येक 1500 रु की 8 वार्षिक भुगतानों वाली वार्षिकी का प्रथम भुगतान 5 वर्षों की समाप्ति पर किया जाता है। वार्षिकी का मिश्रधन ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से वार्षिक संयोजित होता है। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं $A = R\,S_{\overline{n}|r}$

यहाँ $R = 1500,\ r = 0.06,\ n = 8$

इसलिए, $A = 1500 \times S_{\overline{8}|0.06} = 1500 \times 9.8975 = 14846.25$

अतः, स्थगित वार्षिकी का मिश्रधन 14846.25 रु है।

17.6.2 *एक आस्थगित वार्षिकी का वर्तमान मूल्य* (*Present value of a deferred annuity*)

आस्थगित वार्षिकी का वर्तमान मूल्य स्थगित अंतराल के प्रारंभ में वार्षिकी का मूल्य है।

m आवर्तों के लिए आस्थगित, एक आस्थगित वार्षिकी के वर्तमान मूल्य के सूत्र को विकसित करने से पूर्व आइए हम प्रत्येक R रु भुगतान की n भुगतानों वाली r प्रति रुपया प्रति आवर्त की दर पर एक वार्षिकी पर विचार करें जिसका प्रथम भुगतान, $(m+1)$वें भुगतान अंतराल के बाद देय है।

चूंकि R रु का प्रथम भुगतान $(m+1)$वें भुगतान अंतराल की समाप्ति पर किया जाता है, तो

$$\text{R रु के प्रथम भुगतान का वर्तमान मूल्य} = \frac{R}{(1+r)^{m+1}}$$

$$\text{द्वितीय भुगतान का वर्तमान मूल्य} = \frac{R}{(1+r)^{m+2}}$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$n\text{वें भुगतान का वर्तमान मूल्य} = \frac{R}{(1+r)^{m+n}}$$

इसलिए, वार्षिकी का वर्तमान मूल्य V,

$$V = \frac{R}{(1+r)^{m+1}} + \frac{R}{(1+r)^{m+2}} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^{m+n}}$$

$$= \left[\frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^{m+n}}\right] - \left[\frac{R}{1+r} + \frac{R}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+r)^m}\right]$$

$$= R\left[\frac{1-(1+r)^{-(m+n)}}{r}\right] - R\left[\frac{1-(1+r)^{-m}}{r}\right]$$

$$= R\left(a_{\overline{m+n}|r} - a_{\overline{m}|r}\right)$$

से प्रदत्त है।

टिप्पणी लघुगणक सारणी के लिए, $V = \frac{R}{r}\left[(1+r)^{-m} - (1+r)^{-(m+n)}\right]$ लिखिए।

उदाहरण 10 प्रत्येक 6000 रु की वार्षिक भुगतानों वाली वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, प्रथम भुगतान 5 वर्षों की समाप्ति पर तथा अंतिम 12 वर्षों की समाप्ति पर किया जाता है जबकि ब्याज 6% वार्षिक दर से संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल हम पाते हैं, $V = R\left(a_{\overline{m+n}|r} - a_{\overline{m}|r}\right)$

यहाँ $R = 6000,\ m = 4,\ m + n = 12,\ r = 0.06$

इसलिए $V = 6000\left(a_{\overline{12}|0.06} - a_{\overline{4}|0.06}\right)$

$$= 6000[8.3838 - 3.4651]$$

$$= 6000 \times 4.9187 = 29512.20$$

अत:, वार्षिकी का वर्तमान मूल्य 29512.20 रु है।

उदाहरण 11 एक घर को 50,000 रु नकद तथा 5000 रु की समान 10 अर्धवार्षिक भुगतानों में बेचा जाता है जिसमें प्रथम भुगतान 3 वर्ष की समाप्ति पर देय है। घर का नकद मूल्य ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 6% वार्षिक की दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल घर का नकद मूल्य = (50000 + V) रु, जहाँ V आस्थगित वार्षिकी का वर्तमान मूल्य है।

हम पाते हैं, सूत्र $V = R\left(a_{\overline{m+n}|r} - a_{\overline{m}|r}\right)$

यहाँ $R = 5000,\ r = \dfrac{0.06}{2} = 0.03,\ m = 2\dfrac{1}{2} \times 2 = 5,\ n = 10,\ m + n = 15$

इसलिए $V = R\left(a_{\overline{15}|0.03} - a_{\overline{5}|0.03}\right)$

$$V = 5000\ [11.9379 - 4.5797]$$

$$= 5000 \times 7.3582 = 36791$$

अतः, मकान का नकद मूल्य (50000 + 36791) रु अर्थात् 86791 रु है।

17.7 शोधन निधि (कोष) (Sinking Fund)

शोधन निधि एक ऐसा कोष है जो वित्तीय दायित्वों हेतु भविष्य की निर्दिष्ट तिथि पर भुगतान करने के लिए नियमित समान भुगतानों द्वारा धन-संग्रह करता है। शोधन निधि का प्रयोग व्यवसाय में अत्यधिक सामान्य है जहाँ यह भविष्य की योजना के प्रत्याशित व्ययों जैसे मशीनों एवं संयत्रों का पुनः स्थापन, उत्पादन संयत्र का आधुनिकीकरण, व्यवसाय का प्रसार, ऋण पत्रों का निष्पादन इत्यादि में प्रयुक्त होता है।

टिप्पणी यदि शोधन निधि में R रुपयों का नियमित भुगतान n आवर्तों के बाद प्रयुक्त होना है तो शोधन निधि का मिश्रधन A, n आवर्तों के लिए R रु समान भुगतान वाली साधारण वार्षिकी का मिश्रधन है, अर्थात्

$$A = R\left(\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right) = R\ S_{\overline{n}|r},$$ जहाँ r प्रति रुपया प्रति आवर्त ब्याज दर है।

उदाहरण 12 एक कंपनी 4 वर्षों में परिपक्व होने वाले 2,50,000 रु के ऋणपत्रों के भुगतान के लिए शोधन निधि स्थापित करती है, कोष प्रत्येक वर्ष के अंत में अंशदान करके बनाया जाता है। प्रत्येक वर्ष की जमा राशि ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 18% वार्षिक हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल सूत्र $A = R\left[\dfrac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$ के प्रयोग से,

यहाँ $A = 250000,\ r = 0.18,\ n = 4$

इसलिए $250000 = R\left[\dfrac{(1+0.18)^4 - 1}{0.18}\right] = R\left[\dfrac{(1.18)^4 - 1}{0.18}\right]$

मान लीजिए $x = (1.18)^4$

तो $\log x = 4 \log 1.18 = 4 \times 0.0719 = 0.2876;$

या $\qquad x = \text{antilog } 0.2876 = 1.939$

इस प्रकार $\qquad 250000 = R\left[\dfrac{1.939-1}{0.18}\right] = R\left[\dfrac{0.939}{0.18}\right]$

या $\qquad R = \dfrac{250000 \times 0.18}{0.939} = 47923.32$

अतः, प्रतिवर्ष 47923.32 रु जमा करना होगा।

उदाहरण 13 एक मशीन का मूल्य 5,25,000 रु तथा अनुमानित कार्यकाल 20 वर्ष है, इस मशीन के प्रयुक्त होने योग्य काल के अंत पर, जब इसकी अवशिष्ट (रद्द धातु) का मूल्य 25,000 रु मात्र है, इस मशीन के पुनर्स्थापन के लिए शोधन निधि (कोष) बनाई गई है। ज्ञात कीजिए कि प्रतिवर्ष शोधन निधि के लिए लाभ में से कितना भाग दिया जाए यदि ब्याज 5% वार्षिक दर से प्रतिवर्ष संयोजित होता है।

हल $\qquad$ मशीन का मूल्य = 525000 रु

$\qquad$ अवशिष्ट मूल्य = 25000 रु

इसलिए $\qquad$ शेष राशि = (525000 − 25000) रु = 500000 रु

स्पष्टतः, यह राशि 20 वर्ष पश्चात् मशीन खरीदने के लिए आवश्यक राशि होगी।

सूत्र $\qquad A = R\,S_{\overline{n}|r}$ के प्रयोग से

यहाँ $\qquad A = 500000,\ r = 0.05,\ n = 20$

इसलिए $\qquad 500000 = R\,S_{\overline{20}|0.05} = R \times 33.0660$

या $\qquad R = \dfrac{500000}{33.066} = 15121.27$

अतः, वांछित धन 15121.27 रु है।

प्रश्नावली 17.3

1. श्रीमती रेखा एक फ्लैट खरीदती हैं जिसके लिए वह 50,000 रु की प्रत्येक किस्त पर, 10 वार्षिक किस्तों में भुगतान करने को तैयार हो गईं। प्रथम भुगतान 4 वर्ष के अंत में किया गया। उनके द्वारा भुगतान किया धन ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 12% वार्षिक दर से संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)
2. प्रत्येक 2000 रु की 30 तिमाही किस्तों की एक वार्षिकी है। प्रथम भुगतान 3 वर्षों के अंत में होना है। इस वार्षिकी का मिश्रधन ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 8% वार्षिक दर से प्रति तिमाही संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

3. 10 वर्ष तक 3200 रु प्रति छमाही देय वाली आस्थगित वार्षिकी का मिश्रधन ज्ञात कीजिए, प्रथम भुगतान 2 वर्ष के अंत में होना है जबकि ब्याज 15% वार्षिक की दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता है। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

4. प्रत्येक 1500 रु की वार्षिक भुगतानों वाली वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, प्रथम भुगतान 7 वर्ष के अंत में होना है और अंतिम 16 वर्षों की समाप्ति पर। यदि ब्याज 7% वार्षिक की दर से संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

5. श्रीमान 'X' एक फ्लैट खरीदते हैं जिसके लिए वह प्रत्येक 20,000 रु की 10 अर्धवार्षिक भुगतान देने के लिए सहमत हैं। प्रथम भुगतान 3 वर्ष के अंत में किया गया। उनकी संपत्ति का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज 10% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

6. प्रत्येक 200 रु प्रत्येक मासिक भुगतानों वाली वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, प्रथम भुगतान 3 वर्ष के अंत में तथा अंतिम 8 वर्षों के अंत में किया जाता है, यदि ब्याज 15% वार्षिक दर से प्रतिमास संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

7. किसी व्यक्ति ने एक टेलीविजन खरीदने के लिए 5000 रु नगद तथा 3 वर्षों तक 200 रु प्रति माह देने पर सहमत हुआ। उसने प्रथम भुगतान पहले वर्ष के अंत में किया। टेलीविजन का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज 9% वार्षिक दर से मासिक संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

8. श्रीमान् जॉन एक घर खरीदते हैं। यह तय हुआ कि वह 3,00,000 रु नगद तथा 12 अर्धवार्षिक किस्तों में भुगतान करेंगे जबकि प्रत्येक किस्त 10,000 रु की है। प्रथम किस्त का भुगतान चार वर्षों के अंत में हुआ। घर का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए, यदि ब्याज 16% वार्षिक दर से अर्धवार्षिक संयोजित हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

9. एक फर्म आगामी 5 वर्षों में नए संसाधन के लिए 50,000 रु का पूंजीगत व्यय पूर्व अनुमानित करती है। इस राशि के लिए 12% वार्षिक ब्याज की दर से तिमाही संयोजित होने वाली शोधन निधि में प्रति तिमाही कितना धन जमा कराया जाए? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

10. एक व्यक्ति ने अपने बच्चों की कॉलेज शिक्षा के लिए 10 वर्ष में 1,00,000 रु प्राप्त करने के लिए एक शोधन निधि स्थापित की। 5% वार्षिक ब्याज की दर पर छमाही भुगतान करने वाले एक खाते के लिए कितनी द्विवार्षिक संयोजित होने वाली राशि जमा की जाए? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

11. 25 वर्षों के अंत में 1,00,000 रु के ऋणपत्रों के निष्पादन के लिए एक शोधन कोष बनाया गया। प्रतिवर्ष लाभ में से शोधन कोष के लिए कितनी राशि निकाली जाए यदि निवेश 4% वार्षिक ब्याज अर्जित करता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए।)

12. एक कंपनी के लिए एक मशीन की लागत 97,000 रु है और इसका अनुमानित कार्यकाल 12 वर्ष है। यदि अवशिष्ट मूल्य केवल 2,000 रु हो तो 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज दर से धन-संग्रह करने के लिए लाभ में से प्रतिवर्ष कितना धन निकाला जाए? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

13. एक कंपनी द्वारा प्रयुक्त मशीन का कार्यकाल 15 वर्ष अनुमानित किया गया। उस समय नई मशीन का मूल्य 75,000 रु तथा पुरानी मशीन का अवशिष्ट मूल्य केवल 9,600 रु था। मशीन को उसके कार्यकाल की समाप्ति पर पुनर्स्थापन के लिए एक शोधन कोष बनाया। 6% वार्षिक ब्याज की दर से धन-संग्रह करने के लिए कंपनी को प्रतिवर्ष कितनी धनराशि अलग रख देनी चाहिए? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

14. एक कंपनी के लिए एक मशीन की लागत 65,000 रु है और इसका कार्यकाल 25 वर्ष अनुमानित किया जाता है। इसके कार्यकाल की समाप्ति पर जब इसका अवशिष्ट मूल्य मात्र 2,500 रु होगा, मशीन के नए मॉडल के पुनर्स्थापन के लिए एक शोधन कोष बनाया गया। ज्ञात कीजिए शोधन कोष के लिए लाभ में से प्रतिवर्ष कितनी धनराशि सुरक्षित की जाए, यदि ब्याज $3\frac{1}{2}$% वार्षिक दर से प्रतिवर्ष संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

विविध उदाहरण
(MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 14 एक कंपनी ने 4,00,950 रु का एक ऋण इस शर्त पर उधार लिया कि पुनर्भुगतान 6% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से समान वार्षिक किस्तों में होगा जबकि प्रत्येक किश्त 1,50,000 रु की है। कितने वर्षों में ऋण चुकाया जा सकेगा? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल सूत्र $V = R\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$

यहाँ $V = 400950, R = 150000, r = 0.06, n = ?$

इसलिए $400950 = \frac{150000}{0.06}\left[1-(1+0.06)^{-n}\right] = \frac{150000}{0.06}\left[1-(1.06)^{-n}\right]$

का अर्थ है $1-(1.06)^{-n} = \frac{400950 \times 0.06}{150000} = 0.1604$

या $(1.06)^{-n} = 1 - 0.1604 = 0.8396$

या $-n \log(1.06) = \log 0.8396$

अर्थात् $n = -\frac{\log 0.8396}{\log 1.06} = -\frac{\bar{1}.9241}{0.0253} = \frac{0.0759}{0.0253} = 3$

अतः, वांछित समय 3 वर्ष है।

उदाहरण 15 एक व्यक्ति ने निम्नलिखित शर्तों पर 80,000 रु में एक कार खरीदी। वह 20,000 रु नगद देगा और शेष 10 समान अर्धवार्षिक किस्तों में देगा। प्रथम किस्त का भुगतान क्रय तिथि के 6 माह बाद किया जाएगा। प्रत्येक किस्त की राशि की गणना कीजिए, जबकि ब्याज 10% वार्षिक की दर से प्रति छमाही संयोजित होता हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल कार का मूल्य = 80000 रु

नगद दिया भुगतान = 20000 रु

शेष = (80000 − 20000) रु = 60000 रु

शेष का भुगतान 10 समान अर्धवार्षिक किस्तों में किया जाएगा। मान लीजिए प्रत्येक किस्त की राशि R रु है। 5 वर्षों के लिए R रु भुगतान की 10% वार्षिक की दर से प्रति छमाही संयोजित वार्षिक का वर्तमान मूल्य V, 60,000 रु है।

हम पाते हैं $V = R\, a_{\overline{n}|r}$

यहाँ $V = 60000, n = 10, r = 0.05$

इसलिए $60000 = R\, a_{\overline{10}|0.05} = R \times 7.7217$

या $R = \dfrac{60000}{7.7217} = 7770.31$

अतः, प्रत्येक छमाही के अंत में 7770.31 रु जमा किया जाना चाहिए।

उदाहरण 16 'A' ने एक टेलीविजन 5000 रु नकद देकर खरीदा तथा अगले 6 वर्षों के लिए 200 रु प्रति तिमाही देने पर सहमत हुआ। विक्रेता 8% वार्षिक दर से तिमाही संयोजित ब्याज लेता है।

(i) यदि 'A' प्रथम तीन भुगतान नहीं कर पाता है तो चौथे भुगतान की तिथि पर उसे क्या देना होगा?

(ii) यदि 'A' प्रथम 10 भुगतान नहीं करता है तो जब 11वाँ भुगतान देय होगा तब उसे अपना पूर्ण ऋण चुकाने में क्या देना होगा? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

हल (i) यदि A प्रथम तीन भुगतान नहीं करता है तो उसे अद्यतन (up to date) होने के लिए चौथे भुगतान देय पर

राशि $= 200 \times S_{\overline{4}|0.02}$

$= 200 \times 4.1216 = 824.32$ देनी होगी।

अतः, उसे 824.32 रु की राशि देनी होगी।

(ii) यदि A प्रथम 10 भुगतान नहीं कर पाता है तो उसे अद्यतन होने के लिए 11वें भुगतान पर देय राशि $= 200 \times S_{\overline{11}|0.02}$ होगी।

11वें भुगतान पर अपना पूर्ण ऋण उतारने के लिए उसे 8% वार्षिक ब्याज की दर पर तिमाही संयोजित करने पर, $(6\times4-11)=13$ किस्तों तक 200 रु की वार्षिकी का वर्तमान मूल्य देना होगा।

अर्थात् $200\times a_{\overline{13}|0.02}$

इस प्रकार, इस स्थिति में भुगतान की कुल राशि

$$=200\times S_{\overline{11}|0.02}+200\times a_{\overline{13}|0.02}$$

$$=200\times12.1687+200\times11.3484$$

$$=200\times[12.1687+11.3484]$$

$$=200\times[23.5171]=4703.42$$

अतः, उसे 4703.42 रु का भुगतान करना होगा।

अध्याय 17 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 17)

1. एक व्यक्ति किस्तों पर एक घर खरीदता है। वह 8 वर्षों तक प्रत्येक माह के प्रारंभ में 5000 रु की किस्त का भुगतान करता है। यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से प्रति तिमाही संयोजित होती हो तो घर का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

2. परमजीत 10 वर्षों तक प्रत्येक वर्ष के अंत में एक बैंक में 10,000 रु जमा करता है। यदि चक्रवृद्धि ब्याज का परिकलन 10% वार्षिक की दर पर हो तो उस अवधि के अंत में उसके खाते में कितनी राशि जमा होगी। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

3. 3000 रु प्रति तिमाही वाले अनुक्रमित भुगतानों का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए, पहला भुगतान चार वर्षों के अंत में तथा आखिरी भुगतान 12 वर्षों के अंत में किया गया हो, यदि ब्याज 6% वार्षिक दर से तिमाही संयोजित हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

4. छः माह के अंतराल पर श्रीमती जैन ने 300 रु एक बचत बैंक खाते में जमा किए जिसमें ब्याज 10% वार्षिक दर से छमाही संयोजित होता है। जब उन्होंने प्रथम राशि जमा की तब श्रीमती जैन का पुत्र 4 वर्ष का था और उनके पुत्र के 12 वर्ष के होने पर उन्होंने अंतिम राशि जमा की। उन्हें कितना धन प्राप्त हुआ? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

5. एक संस्था शोधन कोष के लिए प्रत्येक वर्ष के अंत में 1,000 रु अलग रखती है जिससे 10 वर्ष के अंत में मशीनरी का प्रतिस्थापन किया जा सके। यह मानते हुए कि 10 वर्ष के अंत में मशीनरी का मूल्य स्थिर रहेगा तथा यह राशि 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर है, मशीनरी का मूल्य ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

6. न्यूनतम वर्षों की संख्या ज्ञात कीजिए जिसमें 800 रु प्रति वर्ष की साधारण वार्षिकी चलती रहे जिससे इसका मिश्रधन 16% वार्षिक ब्याज की दर से संयोजित हो तथा 20,000 रु से अधिक हो जाए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

7. श्रीमान् प्रकाश ने 40,000 रु नगद तथा शेष राशि को 6000 रु प्रति वर्ष के अंत में 25 समान किस्तों में एक घर खरीदा। यदि ब्याज $5\frac{1}{2}\%$ वार्षिक की दर से संयोजित हो, तो घर का नगद मूल्य कितना होगा? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

8. 4,00,000 रु मूल्य के घर का भुगतान करने के 3 वर्षों तक प्रत्येक वर्ष के प्रारंभ में क्या समान भुगतान देना होगा यदि ब्याज 15% वार्षिक की दर से मासिक संयोजित हो। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

9. एक फलोद्यान 5 वर्षों के अंत में पूर्ण फसल का उत्पादन देना और संपूर्ण रूप से अगले 20 वर्षों के लिए 5000 रु की वार्षिक आय बनाए रखने की आशा की जाती है। फलोद्यान का नगद मूल्य ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 3% वार्षिक संयोजित होता है। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

10. प्रत्येक तिमाही के प्रारंभ में 200 रु एक बचत खाते में जमा किए गए जिस पर ब्याज 8% वार्षिक की दर से तिमाही संयोजित होता है। तीन वर्षों के बाद खाते में जमा राशि ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

11. 1000 रु प्रति वर्ष की कुछ वर्षों के लिए एक वार्षिकी का वर्तमान मूल्य 16,000 रु है। वर्षों की संख्या ज्ञात कीजिए जितने समय वार्षिकी चली है यदि ब्याज दर 5% वार्षिक हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

12. एक उपकरण किस्तों पर खरीदा गया जिससे 5000 रु अनुबंध हस्ताक्षर करते समय तथा शेष 3000 रु प्रत्येक की चार वार्षिक किस्तों में प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चतुर्थ वर्षों के अंत में भुगतान किया जाना है। यदि ब्याज 5% वार्षिक की दर से प्रतिवर्ष संयोजित होता है तो उसका नगद मूल्य क्या होगा? (लघुगणकीय सारणी का प्रयोग कीजिए)

13. एक व्यक्ति निम्नलिखित शर्तों पर 70,000 रु में एक कंप्यूटर खरीदता है; वह 10,000 रु नगद तथा शेष 10 समान तिमाही किस्तों में भुगतान करेगा। प्रथम भुगतान क्रय तिथि के तीन माह बाद किया जाना है। प्रत्येक किस्त की राशि ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज 5% वार्षिक दर से तिमाही संयोजित होता है। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

14. एक व्यक्ति 33,000 रु में एक मशीन खरीदता है और 16 अर्धवार्षिक भुगतान देने को सहमत होता है। प्रथम भुगतान चार वर्षों के अंत में किया जाता है। यदि राशि 7% वार्षिक ब्याज की दर से छमाही संयोजित हो तो अर्धवार्षिक भुगतान ज्ञात कीजिए। (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

15. एक कंपनी 40,000 रु के ऋण पत्रों के भुगतान के लिए 15 वर्षों तक 2000 रु प्रतिवर्ष अलग रखती है। यदि कोष पर ब्याज 12% वार्षिक दर से प्रतिवर्ष संयोजित हो, तो ऋणपत्रों के निष्पादन के बाद अधिशेष (surplus) ज्ञात कीजिए। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

16. एक बैंक 15% वार्षिक की दर से ब्याज देता है जो मासिक संयोजित है। 35,550 रु प्राप्त करने के लिए 5 वर्षों तक प्रत्येक माह के अंत में कितनी समान राशि को जमा किया जाए? (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

17. एक वार्षिकी में समान 300 रु के 15 अर्धवार्षिक भुगतान हैं। प्रथम भुगतान प्रथम वर्ष के प्रारंभ में किया जाता है। इस वार्षिकी का वर्तमान मूल्य ज्ञात कीजिए यदि राशि 6% वार्षिक ब्याज की दर से अर्धवार्षिक संयोजित होता हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

18. एक कंपनी ने 4 वर्ष में परिपक्व होने वाले 1,00,000 रु के ऋण का भुगतान करने के लिए एक शोधन कोष स्थापित किया। कोष के लिए अंशदान प्रत्येक वर्ष के अंत में किया जाता है। प्रत्येक वार्षिक जमा राशि ज्ञात कीजिए यदि ब्याज 18% वार्षिक की दर से प्रतिवर्ष संयोजित हो। (लघुगणक सारणी का प्रयोग कीजिए)

19. श्रीमती आभा ने किस्तों पर एक कार खरीदी और अगले 4 वर्षों तक प्रति माह 3000 रु का भुगतान किया। यदि ब्याज 12% वार्षिक दर पर प्रतिमाह संयोजित होता है। यदि वह चौथी, पाँचवीं, छठी और सातवीं किस्त नहीं दे पाती हैं तो उसे आठवीं किस्त के भुगतान पर कितनी राशि देनी होगी?

(i) उसे अद्यतन लाने के लिए (ii) अपने संपूर्ण ऋण को चुकता करने के लिए।

(वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

20. विभोर ने 50,000 रु नगद तथा शेष प्रत्येक 5000 रु तिमाही की समान 30 किस्तों में भुगतान करते हुए एक मकान खरीदा। वार्षिक ब्याज 10% की दर पर प्रति तिमाही संयोजित होता है। यदि वह 15 वीं से 19 वीं किस्त का भुगतान नहीं कर पाता है तो उसे 20 वीं किस्त के साथ अपना पूर्ण ऋण चुकाने के लिए कितनी राशि देनी होगी? (वार्षिकी सारणी का प्रयोग कीजिए)

वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र में कलन के अनुप्रयोग

(APPLICATIONS OF CALCULUS IN COMMERCE AND ECONOMICS) 18

18.1 भूमिका (Introduction)

अवकल गणित के अध्याय में, हमने सीखा है कि अवकलन एक प्रक्रिया है जिसमें एक स्वतंत्र चर राशि के सापेक्ष किसी दूसरी निर्भर चर राशि के तात्कालिक परिवर्तन की दर मापी जाती है जबकि दोनों चर राशियों में कार्यकारी संबंध होता है। अर्थशास्त्र एवं वाणिज्य में हम ऐसी अनेक स्थितियों का सामना करते हैं जब दो राशियों में कार्यकारी संबंध हों; जैसे – मांग एवं मूल्य, आपूर्ति एवं मूल्य, लागत एवं मांग मात्रा (राशि) इत्यादि। एक चर राशि में परिवर्तन दूसरी चर राशि में सापेक्ष परिवर्तन के कारण होता है। उदाहरणतः माल की बिक्री प्रभावित होती है जब माल के मूल्य में परिवर्तन होता है अथवा उत्पादन मात्रा में परिवर्तन से कुल लागत प्रभावित होती हैं।

मुख्य आर्थिक एवं व्यावसायिक सिद्धांत इन्हीं परिवर्तन व्यवहारों पर आधारित हैं। इन राशियों के परिवर्तन की दर का अनुमान ही आर्थिक एवं व्यावसायिक अध्ययनों में कलन के प्रयोग का आधार हैं। इस प्रकार कलन पर आधारित तकनीक का अर्थशास्त्र, संचालन प्रबंधन, विपणन प्रबंधन, वित्तीय प्रबंधन इत्यादि में व्यापक रूप से प्रयोग होता है। अर्थशास्त्र एवं वाणिज्य में सीमांत विश्लेषण (Marginal Analysis) अवकल गणित का सबसे अधिक स्पष्ट अनुप्रयोग है। लाभ के अधिकतमीकरण, लागत के न्यूनतमीकरण, मूल्य एवं आपूर्ति की प्रत्यास्थता आदि की समस्याओं के हल करने में भी अवकल गणित तकनीक का प्रयोग होता है। जब सीमांत फलन दिया होता है तो कुल लागत एवं औसत फलन ज्ञात करने में समाकलन गणित का प्रयोग होता है। जब मांग की मूल्य प्रत्यास्थता दी होती है, तब मांग फलन ज्ञात करने में भी समाकलन गणित का प्रयोग होता है।

प्रस्तुत अध्याय में हम अपने अध्ययन को संपूर्ण लागत, औसत और सीमांत फलन, सम विच्छेद विश्लेषण, अधिकतमीकरण तथा न्यूनतमीकरण समस्याओं तक ही सीमित रखेंगे। हम समाकलन से कुछ अनुप्रयोगों पर भी विचार करेंगे।

18.2 मूलभूत फलन (Basic Functions)

कलन के अनुप्रयोगों के अध्ययन से पूर्व आइए हम अर्थशास्त्र एवं वाणिज्य में कुछ महत्त्वपूर्ण फलनों का अवलोकन करें।

18.2.1 *लागत फलन* (*Cost function*) माल की x इकाइयों का उत्पादन तथा विपणन की कुल लागत C, इकाइयों की संख्या (x) पर आधारित होती हैं। इस संबंध का वर्णन करने वाला फलन, लागत फलन कहलाता है और हम

$$\text{लागत फलन} = C = C(x)$$

लिखते हैं। माल की x इकाइयों के उत्पादन और विपणन की लागत C को स्थिर लागत और चर लागत के रूप में विश्लेषित किया जा सकता है। स्थिर लागत से तात्पर्य उन सभी प्रकार की लागतों से है जो उत्पादन के स्तर के अनुसार नहीं बदलती हैं। स्थिर लागत के उदाहरण कर, ब्याज, बीमा, किराया इत्यादि हैं। चर लागत से तात्पर्य उस प्रकार की लागतों से है जो वस्तु उत्पादन की इकाइयों की संख्या; जैसे – माल, श्रम, पैकिंग इत्यादि पर आधारित है। इस प्रकार, कुल लागत – स्थिर लागत और चर लागत का योग है।

अर्थात् $$C = F + V(x),$$

जहाँ F, x से स्वतंत्र है, अत: स्थिर लागत है और $V(x)$, x का फलन है अत: चर लागत को प्रदर्शित करता है। उदाहरणत: x इकाइयों के उत्पादन और विपणन की कुल लागत

$$C = 2x + e^x + 3e,$$

से प्रदत्त है, तो स्थिर लागत $3e$ और चर लागत $2x + e^x$ हैं।

18.2.2 *मांग फलन* (*Demand function*) अर्थशास्त्र के सिद्धांत से स्पष्ट है कि एक माल की मांग मात्रा अनेक कारकों पर आधारित होती है जैसे माल का मूल्य, उपभोक्ता के पास पूँजी भंडार, उपभोक्ता की रुचि, अन्य संबंधित मालों की आमद और मूल्य इत्यादि। मांग के अध्ययन को सरल बनाने के लिए माल मूल्य को छोड़कर वे सभी चर जो मांग को प्रभावित करते हैं अचर समझे जाते हैं। इसलिए, इस स्थिति में मांग फलन को माल के मूल्य एवं मांग के बीच कार्यकारी संबंध के रूप में प्रदर्शित किया जाता है। यदि किसी मूल्य पर उपभोक्ता द्वारा इकाई मांग संख्या x है, तब मांग फलन $x = f(p)$ से प्रदर्शित किया जाता है। जहाँ p प्रति इकाई मूल्य निरूपित करता है। मांग फलन का अस्पष्ट फलन रूप $f(x, p) = 0$ है।

18.2.3 *आय फलन* (*Revenue function*) जब माल की x इकाइयाँ p रु प्रति यूनिट की दर से बेची जाती हैं तो विक्रेता द्वारा प्राप्त कुल आय x का फलन है और इसलिए इसको आय फलन कहते हैं जिसे $R = px$ से निरूपित किया जाता है। मांग फलन द्वारा प्रति इकाई मूल्य p को x के फलन के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

अर्थात् $$p = g(x)$$

इसलिए $$R = x\,g(x)$$

अर्थात् R, x का एक फलन है। इस फलन को कुल आय फलन भी कहते हैं और $R(x)$ से निरूपित करते हैं। इस प्रकार,

$$R(x) = px = x\,g(x)$$

18.2.4 *लाभ फलन (Profit function)* एक माल के उत्पादन एवं विक्रय से अर्जित लाभ तथा उत्पादित एवं विक्रय की गई इकाइयों में कार्यकारी संबंध लाभ फलन है। किसी माल के विक्रय मूल्य से प्राप्त कुल आय तथा माल के उत्पादन की कुल लागत के अंतर से लाभ का परिकलन किया जाता है। इस फलन को

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

से व्यक्त करते हैं।

जहाँ $P(x)$: कुल लाभ

$R(x)$: माल की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय

तथा $C(x)$: माल की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत।

इस प्रकार, लाभ फलन उत्पादित मात्रा एवं विक्रय का एक फलन है।

18.3 समविच्छेद विश्लेषण (Break-Even Analysis)

सम विच्छेदन बिंदु उत्पादन का वह स्तर है जहाँ विक्रय से प्राप्त आय उत्पादन की लागत के तुल्य है। सम विच्छेदन बिंदु पर लाभ शून्य होता है। इसलिए, हम कह सकते हैं कि सम विच्छेदन बिंदु उत्पादन एवं विक्रय की वह मात्रा है जिस पर कंपनी को न तो कोई लाभ प्राप्त होता है या न कोई हानि उठानी पड़ती है। हम जानते हैं कि

$$\text{लाभ} : P(x) = \text{कुल आय } R(x) - \text{कुल लागत } C(x)$$

सम विच्छेदन बिंदु पर $P(x) = 0$

अर्थात् $R(x) = C(x)$.

इस समीकरण को हल करके, सम विच्छेदन बिंदु का मान ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 1 एक नए माल के लिए, एक निर्माता मूल ढाँचा बनाता है जिस पर स्थिर लागत 14,000 रु है तथा माल की प्रत्येक इकाई पर 125 रु की दर से चर लागत होती है। प्रत्येक इकाई का विक्रय मूल्य 160 रु निश्चित है। माल की x इकाइयों के लिए लागत फलन $C(x)$, आय फलन $R(x)$ और लाभ फलन $P(x)$ लिखिए। उत्पादन के प्रथम वर्ष में कितनी इकाइयाँ उत्पादित की जाएं जिससे इस वर्ष में कोई लाभ या हानि न हो?

हल हमें दिया है कि स्थिर लागत = 1,40,000 रु, चर लागत = 125 रु प्रति इकाई और विक्रय मूल्य = 160रु प्रति इकाई।

इसलिए लागत फलन $C(x) = 140000 + 125x$

आय फलन $R(x) = 160x$

इस प्रकार लाभ फलन $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 160x - 140000 - 125x$$

$$= 35x - 140000$$

वह बिंदु जहाँ निर्माता को कोई लाभ या हानि नहीं होती है, समविच्छेदन बिंदु है और यहाँ हम पाते हैं $P(x) = 0$, या

$$35x - 1,40,000 = 0 \text{ या } x = 4000$$

इसलिए, वर्ष में कोई लाभ या हानि न होने के लिए इकाइयों की न्यूनतम संख्या 4000 है जो प्रथम वर्ष में उत्पादित होनी चाहिए।

उदाहरण 2 कोई कंपनी एक माल 10,000 रु स्थिर लागत पर उत्पादित करती है। 6 रु प्रति इकाई की दर से उत्पाद को बेचने पर प्राप्त कुल आय का 25% चर लागत अनुमानित की गई। कुल लागत एवं लाभ फलन ज्ञात कीजिए।

हल यदि उत्पादित इकाइयों की संख्या x है तो कुल आय $R(x) = 6x$

स्थिर लागत = 10000 रु

$$\text{चर लागत} = 6x \text{ का } 25\% = 6x \times \frac{25}{100} = \frac{3}{2}x$$

इसलिए कुल लागत $C(x) = 10000 + \frac{3}{2}x$

इस प्रकार लाभ फलन $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 6x - 10000 - \frac{3}{2}x = \frac{9}{2}x - 10000$$

उदाहरण 3 एक लाभ लेने वाली कंपनी एक नए उत्पाद का प्रवर्तन करना चाहती है। यह प्रेक्षण करती है कि नए उत्पाद की स्थिर लागत 35,000 रु है और प्रति इकाई चर लागत 500 रु है। x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त आय $5000\,x - 100\,x^2$ से प्रदत्त है। (i) लाभ फलन, (ii) सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल (i) यदि $P(x)$, $R(x)$ और $C(x)$ क्रमशः लाभ फलन, आय फलन और कुल लागत फलन हैं, तब हम पाते हैं

$$R(x) = 5000\,x - 100\,x^2$$

$$C(x) = 35,000 + 500\,x$$

और $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 5000\,x - 100x^2 - 35{,}000 - 500x$$
$$= 4500x - 100x^2 - 35{,}000$$

(ii) सम विच्छेदन बिंदुओं के लिए, हम पाते हैं $P(x) = 0$

अर्थात् $\quad 4500x - 100x^2 - 35{,}000 = 0$

या $\quad x^2 - 45x + 350 = 0$

या $\quad (x - 10)\,(x - 35) = 0$

इसलिए $\quad x = 10$ या 35

अत:, सम विच्छेदन बिंदु 10 और 35 हैं।

उदाहरण 4 एक कंपनी की स्थिर लागत 10,000 रु है और इसके उत्पाद की एक इकाई उत्पादन करने की लागत 50 रु है। यदि प्रत्येक इकाई 75 रु में बेची जाए तो सम विच्छेदन मान ज्ञात कीजिए तथा x का वह मान भी ज्ञात कीजिए जिस पर कंपनी को सदैव लाभ होता हो।

हल मान लीजिए, वस्तुओं के x इकाई उत्पादन और विक्रय का लाभ, कुल आय और कुल लागत फलन क्रमश: $P(x)$, $R(x)$ और $C(x)$ हों तो

$$C(x) = 10000 + 50x$$

$$R(x) = 75x$$

और $\quad P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 75\,x - 10000 - 50x = 25\,x - 10000$$

अब, सम विच्छेदन बिंदु पर $P(x) = 0$, अर्थात् $25x - 10000 = 0$

या $\quad x = \dfrac{10000}{25} = 400$

इस प्रकार, 400 इकाइयों के उत्पादन और विक्रय पर कंपनी को न तो कोई लाभ है और न कोई हानि। तथा कंपनी सदैव लाभ में रहेगी यदि $P(x) > 0$,

अर्थात् $\quad 25\,x - 10000 > 0$

या $\quad x > 400$

अत: कंपनी लाभ में रहेगी यदि यह 400 इकाइयों से अधिक उत्पादों का उत्पादन एवं विक्रय करे।

प्रश्नावली 18.1

1. एक कंपनी एक नए उत्पाद का प्रवर्तन करना चाहती है। इसने 37,500 रु स्थिर लागत पर तथा 200 रु प्रति इकाई चर लागत पर निवेश किया। x इकाइयों के विक्रय के लिए आय फलन $4825x - 125x^2$ से प्रदत्त है। सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

2. एक कंपनी पेन का उत्पादन प्रारंभ करती है और पाती है कि प्रत्येक पेन की उत्पादन लागत 10 रु तथा उत्पादन का स्थिर व्यय 4500 रु है। यदि प्रत्येक पेन 25 रु में बेचा जाए तो
   (i) लागत फलन (ii) आय फलन तथा (iii) सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

3. लागत फलन एवं आय फलन क्रमशः $C = x + 40$ और $R = 10x - 0.2x^2$ है। सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

4. एक कंपनी भवन किराया तथा ऋण पर ब्याज के लिए 16,100 रु व्यय करती है। वस्तु के एक इकाई की उत्पादन लागत 20 रु है। यदि प्रत्येक इकाई 27 रु में बेची जाए तो सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

5. एक कंपनी एक माल का उत्पादन 20,000 रु की स्थिर लागत पर करती है। जब यह 6 रु प्रति इकाई की दर से बेचा जाता है तो चर लागत, आय की 35% अनुमानित की जाती है। कुल आय, कुल लागत एवं लाभ फलन ज्ञात कीजिए।

6. एक कंपनी एक नए उत्पाद का प्रवर्तन 25,000 रु स्थिर लागत तथा 1500 रु प्रति इकाई चर लागत पर करती है। x इकाई के विक्रय से प्राप्त आय $8500x - 400x^2$ से प्रदत्त है।
   (i) लाभ फलन, तथा (ii) सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

7. एक उत्पाद का स्थिर व्यय 20,000 रु है और प्रति इकाई उत्पादन की लागत 75 रु है। यदि प्रति इकाई 100 रु में बेची जाए तो सम विच्छेदन मूल्य ज्ञात कीजिए। तथा x का वह मान भी ज्ञात कीजिए जिस पर कंपनी सदैव लाभ में रहे।

8. एक फर्म ऑफिस का किराया 25,000 रु देती है और माल की x इकाई उत्पादन हेतु लिए गए ऋण पर ब्याज 15,200 रु है। यदि प्रत्येक इकाई के उत्पादन की लागत 8 रु है और प्रत्येक वस्तु 75 रु में बेची जाती है तो लाभ फलन ज्ञात कीजिए तथा सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

9. एक कंपनी अपने उत्पाद को 6 रु प्रति इकाई की दर से विक्रय करती है। चर लागत कुल आय का 25% अनुमानित की जाती है। यदि उत्पाद की स्थिर लागत 4500 रु हो तो ज्ञात कीजिए :
   (i) कुल आय फलन (ii) कुल लागत फलन
   (iii) लाभ फलन (iv) समविच्छेदन बिंदु
   (v) उत्पाद की इकाइयों की संख्या जो कंपनी द्वारा स्थिर लागत की पूर्ति के लिए बेचना है।

10. एक इकाई का विक्रय मूल्य जब x इकाइयों की माँग की जाती है, समीकरण $p = 4000 - 2x$ द्वारा प्रदत्त है। उत्पाद की स्थिर लागत 20,000 रु है तथा स्टोर में रखने के लिए 1484 रु प्रति इकाई व्यय है। विक्रय स्तर ज्ञात कीजिए ताकि कंपनी लागत मूल्य की पूर्ति कर सके।

18.4 औसत एवं सीमांत फलन (Average and Marginal Functions)

प्राय: अर्थशास्त्र में एक राशि y में दूसरी राशि x के सापेक्ष परिवर्तन दो अवधारणाओं के पदों में वर्णित है

(i) औसत, तथा (ii) सीमांत

औसत की अवधारणा एक राशि में दूसरी राशि के मानों के विशिष्ट परिसर में परिवर्तन को व्यक्त करता है। इस प्रकार, यदि दो राशियाँ x और y एक कार्यकारी संबंध $y = f(x)$, से संबद्ध हो तो औसत फलन को $\frac{f(x)}{x}$ से परिभाषित किया जाता है।

सीमांत अवधारणा में स्वतंत्र चर x के प्रत्येक छोटे परिवर्तन के लिए निर्भर चर $y = f(x)$ के तात्कालिक परिवर्तन से संबद्ध है।

इस प्रकार, सीमांत फलन ज्ञात करने के लिए हम यथार्थत: x में छोटा परिवर्तन Δx करते हैं और y में संगत परिवर्तन Δy ज्ञात करते हैं। तब $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ का यदि अस्तित्व हो तो इसे y के सीमांत मान के रूप में लेते हैं अर्थात् फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज $\frac{dy}{dx}$ सीमांत फलन देता है।

इसलिए, $f(x)$ का सीमांत फलन $= \frac{d}{dx} f(x)$

18.5 औसत एवं सीमांत लागत (Average and Marginal Cost)

यदि एक माल की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत $C(x)$ है तो फलन C कुल लागत फलन कहलाता हैं तब औसत मूल्य, जो प्रति इकाई लागत प्रदर्शित करता है, $\frac{C}{x} = \frac{f(x)}{x}$ से प्रदत्त है। अब, यदि x में वृद्धि Δx के संगत कुल लागत में वृद्धि (परिवर्तन) ΔC है, तब प्रति इकाई उत्पादन की लागत में औसत वृद्धि $\frac{\Delta C}{\Delta x}$ के अनुपात से व्यक्त की गई है और

$$\text{सीमांत लागत (MC)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx}$$

से प्रदत्त है,

अर्थात् सीमांत लागत कुल लागत C का उत्पादित स्तर x के सापेक्ष प्रथम अवकलज है।

सीमांत लागत को किसी उत्पादन स्तर x के सापेक्ष संपूर्ण लागत के तात्कालिक परिवर्तन की दर से भी परिभाषित किया जाता है।

उदाहरण 5 एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन से संबद्ध कुल लागत

$$C(x) = 0.005\, x^3 - 0.02\, x^2 + 30x + 5000$$

से प्रदत्त है। ज्ञात कीजिए (i) औसत लागत फलन।

(ii) 10 इकाई उत्पादित करने की औसत लागत।

(iii) सीमांत लागत फलन।

(iv) सीमांत मूल्य जब 3 इकाई उत्पादित की जाती है।

हल (i) औसत लागत फलन

$$AC = \frac{C(x)}{x}$$

अर्थात्
$$AC = 0.005x^2 - 0.02x + 30 + \frac{5000}{x}$$

(ii) $x = 10$ पर औसत लागत

$$(AC)_{x=10} = 0.005\,(10)^2 - 0.02(10) + 30 + \frac{5000}{10}$$

$$= 0.5 - 0.2 + 30 + 500 = 530.3$$

(iii) सीमांत लागत फलन (सीमांत लागत) MC, C को x के सापेक्ष अवकलित करने पर प्राप्त होती है इस प्रकार

$$MC = \frac{dC}{dx} = 0.005\,(3x^2) - 0.02\,(2x) + 30$$

$$= 0.015x^2 - 0.04x + 30$$

(iv) जब 3 इकाइयाँ उत्पादित हुई हैं, तब सीमांत लागत

$$(MC)_{x=3} = 0.015\,(3)^2 - 0.04(3) + 30$$

$$= 0.135 - 0.12 + 30 = 30.015$$

अतः, वांछित सीमांत लागत 30.02 रु (लगभग) है।

उदाहरण 6 यदि कुल लागत फलन $C = a + bx + cx^2$ से प्रदत्त है, जहाँ x उत्पादन की मात्रा है, दिखाइए कि $\frac{d}{dx}(AC) = \frac{1}{x}(MC - AC)$

हल हम जानते हैं कि

$$AC = \frac{C}{x} = \frac{a + bx + cx^2}{x} = \frac{a}{x} + b + cx$$

तथा $$MC = \frac{d}{dx} C = b + 2cx$$

इसलिए $$\frac{1}{x} (MC - AC) = \frac{1}{x} \left[b + 2cx - \frac{a}{x} - b - cx\right]$$

$$= \frac{1}{x} \left[cx - \frac{a}{x}\right] = c - \frac{a}{x^2} \qquad (1)$$

तथा $$\frac{d}{dx} (AC) = \frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x} + b + cx\right) = -\frac{a}{x^2} + c \qquad (2)$$

(1) और (2) से, हम पाते हैं

$$\frac{d}{dx} (AC) = \frac{1}{x} (MC - AC)$$

उदाहरण 7 कुल लागत y और उत्पादन की मात्रा x के बीच संबंध

$$y = 3x\left(\frac{x+7}{x+5}\right) + 5$$

से प्रदत्त है। सिद्ध कीजिए कि जैसे–जैसे उत्पादन में वृद्धि होती है सीमांत लागत निरंतर कम होती जाती है।

हल हमें ज्ञात है कि $y = 3x\left(\frac{x+7}{x+5}\right) + 5 = 3\,\frac{(x^2+7x)}{x+5} + 5$

x के सापेक्ष अवकल करने पर, हम पाते हैं

सीमांत लागत (MC) $= \dfrac{dy}{dx} = 3\,\dfrac{(x+5)\frac{d}{dx}(x^2+7x) - (x^2+7x)\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2}$

$$= 3\ \frac{(x+5)\ (2x+7)\ -\ (x^2+7x)}{(x+5)^2}$$

$$= 3\frac{(x^2+10x+35)}{(x+5)^2} = 3\frac{(x+5)^2+10}{(x+5)^2} = 3[1+\frac{10}{(x+5)^2}]$$

अब $\frac{d}{dx}$ (MC) $= -\frac{60}{(x+5)^3}$, जो कि सभी x के लिए ऋणात्मक है।

अतः, जैसे-जैसे उत्पादन में वृद्धि होती है सीमांत लागत निरंतर कम होती जाती है।

उदाहरण 8 एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन से संबद्ध औसत लागत फलन $AC = 2x - 11 + \frac{50}{x}$ द्वारा प्रदत्त है। कुल लागत फलन और सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए तथा उत्पादन का परिसर ज्ञात कीजिए जिसके लिए AC ह्रासमान है।

हल मान लीजिए $C(x)$ कुल लागत फलन और MC सीमांत लागत फलन हैं।

तब हम जानते हैं कि $AC = \frac{C}{x}$, अर्थात् $C = x\ AC$

या $C\ (x) = x.\ (2x - 11 + \frac{50}{x}) = 2x^2 - 11x + 50$

अब $MC = \frac{dC}{dx} = 4x - 11$

दिया है कि $AC = 2x - 11 + \frac{50}{x}$

x के सापेक्ष दोनों पक्षों का अवकलज करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{d}{dx}(AC) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

AC के ह्रासमान होने के लिए, हम पाते हैं

$$\frac{d}{dx}(AC) < 0 \quad \text{अर्थात्} \quad 2 - \frac{50}{x^2} < 0$$

या $\qquad x^2 - 25 < 0$ अर्थात् $(x+5)(x-5) < 0$

$$-5 < x < 5$$

परंतु चूंकि x कभी भी ऋणात्मक नहीं हो सकता, इसलिए $0 \leq x < 5$ उत्पादन का वह परिसर है जिसके लिए AC ह्रासमान है।

उदाहरण 9 सिद्ध कीजिए कि कुल लागत फलन

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

के लिए औसत लागत वक्र की प्रवणता $\frac{1}{x}(MC - AC)$ है।

हल कुल लागत फलन $C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ है।

इसलिए, $$AC = \frac{C}{x} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x}$$

$$\text{AC वक्र का ढाल} = \frac{dAC}{dx} = 2ax + b \quad \frac{d}{x^2} \qquad (1)$$

साथ ही $$MC = \frac{dC}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c$$

अब $$MC - AC = 3ax^2 + 2bx + c - ax^2 - bx - c - \frac{d}{x}$$

$$= 2ax^2 + bx - \frac{d}{x}$$

इसलिए, $$\frac{1}{x}(MC - AC) = \frac{1}{x}(2ax^2 + bx \quad \frac{d}{x}) = 2ax + b \quad \frac{d}{x^2} \qquad (2)$$

(1) और (2) से, हम पाते हैं

$$\frac{1}{x}(MC - AC) = \text{AC वक्र की ढाल}$$

उदाहरण 10 एक उत्पादन और विपणन क्रियाकलाप की कुल लागत फलन

$$C(x) = \frac{3}{4}x^2 - 7x + 27$$

से प्रदत्त है। वह उत्पादन स्तर (उत्पादित इकाइयों की संख्या) ज्ञात कीजिए जिसके लिए औसत लागत = सीमांत लागत हो।

हल दिया है $C(x) = \frac{3}{4}x^2 - 7x + 27$ (1)

इसलिए, $AC = \frac{C}{x} = \frac{3}{4}x - 7 + \frac{27}{x}$

(1) के दोनों पक्षों को अवकलित करने पर, हम पाते हैं

$$\frac{dC}{dx} = \frac{3}{2}x - 7 \text{ अर्थात् } MC = \frac{3}{2}x - 7$$

अब, सीमांत लागत (MC) = औसत लागत (AC)

अर्थात् $$\frac{3}{2}x - 7 = \frac{3}{4}x - 7 + \frac{27}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x = \frac{27}{x}$$

या $x^2 = 36$ अर्थात् $x = \pm 6$,

ऋणात्मक मान छोड़ने पर, क्योंकि उत्पादन x कभी ऋणात्मक नहीं हो सकता है। हम पाते हैं कि $x = 6$ उत्पादन स्तर है जिस पर MC = AC

प्रश्नावली 18.2

1. यदि एक निर्माता का कुल लागत फलन $C = 1500 + 30x + x^2$ है, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) औसत लागत फलन।

   (ii) सीमांत लागत जब 20 इकाइयाँ उत्पादित हुई हैं।

2. एक उत्पाद के लिए औसत लागत फलन

   $AC = 0.0002x^2 - 0.05x + 7 + \frac{8000}{x}$ से प्रदत्त है जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है।

(i) सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए। (ii) सीमांत लागत क्या है जब 100 इकाइयाँ उत्पादित हुई हैं।

3. एक वस्तु की x इकाइयों के लिए कुल लागत फलन $C(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 7x + 16$ से प्रदत्त है।

ज्ञात कीजिए : (i) सीमांत लागत, (ii) औसत लागत तथा

(iii) दिखाइए कि सीमांत औसत मूल्य $\frac{x\,\text{MC} - C(x)}{x^2}$ से प्रदत्त है।

4. यदि संपूर्ण लागत फलन $C = 3 - 2x + 5x^2$ से प्रदत्त है जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है, तो दिखाइए कि $\frac{d}{dx}\text{AC} = \frac{1}{x}(\text{MC} - \text{AC})$ जहाँ MC तथा AC क्रमश: सीमांत लागत और औसत लागत हैं।

5. एक माल का औसत लागत फलन उत्पादन $\text{AC} = \frac{x^2 + 5x + 36}{x}$, $x \neq 0$, से उत्पादित x के पदों में दिया है। कुल लागत एवं सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए तथा MC भी ज्ञात कीजिए जब $x = 10$ हो।

6. एक विशेष माल की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत $C(x) = 3ae^{-x/3}$ से प्रदत्त है। सत्यापित कीजिए कि AC वक्र का ढाल $\frac{\text{MC} - \text{AC}}{x}$ से प्रदत्त है।

7. लागत फलन $C(x) = ax\left(\frac{x+b}{x+c}\right) + d$, $a, b, c, d > 0$, $b > c$ के लिए सत्यापित कीजिए कि उत्पादन के वर्धमान होने पर औसत एवं सीमांत लागत वक्र निरंतर घटते जाते हैं।

8. यदि $C(x) = 0.05x - 0.2x^2 - 5$, वह उत्पादन स्तर ज्ञात कीजिए जिसके लिए औसत लागत AC तथा सीमांत लागत MC समान हों।

9. कुल लागत फलन $C = x + 2x^3 - 3.5x^2$ से प्रदत्त है। सीमांत औसत लागत फलन (MAC) ज्ञात कीजिए तथा वे बिंदु भी ज्ञात कीजिए जहाँ MC वक्र x–अक्ष और y–अक्ष को प्रतिच्छेदित करता है।

10. किसी सामान की x इकाइयों के उत्पादन में औसत लागत मूल्य समीकरण

$$\text{AC} = \frac{x^2}{200} - \frac{x}{50} - 30 + \frac{5000}{x} \text{ से प्रदत्त है।}$$

तो सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि $\frac{d\text{AC}}{dx} = \frac{\text{MC} - \text{AC}}{x}$

18.6 औसत एवं सीमांत आय (Average and Marginal Revenues)

पुनः स्मरण कीजिए कि एक वस्तु की x इकाइयों को p रु प्रति इकाई की दर से विक्रय करने पर प्राप्त कुल आय $R = p.x$ से प्रदत्त है।

अब औसत आय (AR) प्रति इकाई से प्राप्त आय है जो इकाई वस्तु का मूल्य प्रदर्शित करता है।

अतः औसत आय $AR = \frac{R}{x} = p$ (मूल्य प्रति इकाई)

इस प्रकार औसत आय प्रति इकाई मूल्य ही होता है।

सीमांत आय (MR) किसी क्षण विक्रय की गई वस्तुओं के सापेक्ष आय परिवर्तन की दर को इंगित करता है।

इस प्रकार $$MR = \frac{dR}{dx} = \frac{d}{dx}px = x\frac{dp}{dx} + p$$

आर्थिक विश्लेषण के अनुसार जब एक माल का मूल्य उत्पादन स्तर x से स्वतंत्र होता है, तब व्यवसाय शुद्ध प्रतियोगिता के रूप में चलाया जाता है। इस प्रकार शुद्ध प्रतियोगिता के अंतर्गत p, x से स्वतंत्र होता है, इसलिए हम पाते हैं $\frac{dp}{dx} = 0$

इसलिए $MR = p =$ प्रति इकाई मूल्य है।

किसी प्रतियोगिता के अभाव में व्यवसाय एकाधिकार व्यवसाय के रूप में चलाया जाता है। एकाधिकार व्यवसाय में माल का मूल्य उत्पादित और विक्रित वस्तुओं की इकाइयों की संख्या पर आश्रित होता है।

इस पुस्तक में हमारा विवेचन इस मान्यता तक सीमित है कि p, x का एक फलन है अर्थात् व्यवसाय एकाधिकार स्थिति के अंतर्गत चलाया जा रहा है जब तक कि अन्यथा न कहा जाए।

एक विशेष उत्पादन की मांग समीकरण $p = 20 + 5x - 3x^2$ से प्रदर्शित है, जहाँ x मांगी गई इकाइयों की संख्या तथा p प्रति इकाई मूल्य है।

(i) कुल आय (TR) ज्ञात कीजिए। (ii) सीमांत आय (MR) ज्ञात कीजिए।

(iii) सीमांत आय प्राप्त कीजिए जब 2 इकाइयाँ बेची गई हैं।

(i) संपूर्ण आय

TR = मांग × मूल्य

$$= x(20+5x-3x^2) = 20x + 5x^2 - 3x^3$$

से प्रदत्त है।

(ii) सीमांत आय

$$MR = \frac{d}{dx}(TR) = 20 + 10x - 9x^2$$

(iii) $x = 2$ पर सीमांत आय

$$(MR)_{x=2} = 20 + 10(2) - 9(2)^2 = 20 + 20 - 36 = 4$$

से प्रदत्त है।

अत: 2 इकाइयाँ के विक्रय होने पर सीमांत आय 4 रु है।

उदाहरण 12 किसी उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय

$R(x) = 36x + 3x^2 + 5$ से प्रदत्त है।

ज्ञात कीजिए : (i) औसत आय (ii) सीमांत आय

(iii) $x = 5$ पर सीमांत एवं औसत आय तथा

(iv) 50 वीं वस्तु बेचने पर वास्तविक आय

हल दिया है $R(x) = 36x + 3x^2 + 5$, अब

(i) औसत आय $AR = \frac{R}{x} = 36 + 3x + \frac{5}{x}$

(ii) सीमांत आय $MR = \frac{dR}{dx} = 36 + 6x$

(iii) जब $x = 5$

$$AR = 36 + 3(5) + \frac{5}{5} = 52$$

तथा $$MR = 36 + 6(5) = 66$$

(iv) 50 वीं वस्तु को बेचने से प्राप्त वास्तविक आय

= 50 वस्तुओं को बेचने से प्राप्त आय – 49 वस्तुओं को बेचने से प्राप्त आय

$= [36(50) + 3(50)^2 + 5] - [36(49) + 3(49)^2 + 5]$

$= 1800 + 7500 + 5 - 1764 - 7203 - 5 = 333$ रु।

उदाहरण 13 किसी एकाधिकारी व्यवसायी का मांग फलन इसके उत्पादों में से एक के लिए

$$p(x) = ax + b$$

है। वह जानता है कि वह 4 रु प्रति इकाई मूल्य पर 1400 इकाइयाँ तथा 2 रु प्रति इकाई मूल्य पर 1800 इकाइयाँ बेच सकता है। कुल, औसत और सीमांत आय फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही प्रति इकाई मूल्य ज्ञात कीजिए जब सीमांत आय शून्य है।

हल दिया है कि $p(x) = ax + b$ (1)

जब $x = 1400,\ p = 4$ रु

(1) में रखने पर, हम पाते हैं

$$4 = 1400a + b \quad (2)$$

साथ ही जब $x = 1800,\quad p = 2$ रु

(1) में रखने पर, हम पाते हैं

$$2 = 1800\,a + b \quad (3)$$

(2) और (3) को हल करने पर, हम पाते हैं

$$a = -\frac{1}{200} \quad \text{तथा} \quad b = 11$$

इसलिए, मांग फलन $p = 11 - \frac{x}{200}$ से व्यक्त है। (4)

इस प्रकार कुल आय (TR) $= p.x = 11x - \frac{x^2}{200}$

$$\text{औसत आय (AR)} = \frac{\text{TR}}{x} = 11 - \frac{x}{200}$$

$$\text{सीमांत आय (MR)} = \frac{d}{dx}\text{TR} = 11 - \frac{x}{100}$$

जब $\text{MR} = 0$, तब

$$11 - \frac{x}{100} = 0 \quad \text{या} \quad x = 1100$$

(4) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं कि मूल्य $p = 11 - \frac{1100}{200} = 5.50$ रु

इस प्रकार, जब सीमांत आय समाप्त हो जाती है, तो प्रति इकाई मूल्य 5.50 रु है।

उदाहरण 14 एक फर्म की उत्पादन इकाई में यह पाया गया कि उत्पादित इकाइयों की कुल संख्या (x) श्रमिकों की संख्या (n) पर आधारित है और संबंध $x = 25\, n\, (n^3 + 36)^{-\frac{1}{2}}$ से प्राप्त होती है। उत्पाद का मांग फलन $p = \frac{250}{x+15}$ है। $n = 4$ पर सीमांत आय ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $p = \frac{250}{x+15}$

इसलिए कुल आय $R = px = \frac{250x}{x+15}$

अर्थात् $MR = \frac{dR}{dx} = \frac{250\,[(x+15)-x]}{(x+15)^2} = \frac{3750}{(x+15)^2}$

साथ ही दिया है $x = 25n\,(n^3 + 36)^{-\frac{1}{2}}$

इसलिए जब $n = 4,\ x = 25 \times 4\,[4^3 + 36]^{-\frac{1}{2}} = \frac{100}{10} = 10$

तथा जब $n = 4,\ MR = \frac{3750}{(10+15)^2} = 6$

प्रश्नावली 18.3

1. एक उत्पाद की x इकाइयों के विक्रय से प्राप्त कुल आय

$$R(x) = 200 + \frac{x^2}{5}$$

से प्रदत्त है।

ज्ञात कीजिए :

(i) औसत आय (ii) सीमांत आय

(iii) सीमांत आय जब $x = 25$

2. एक एकाधिकारी व्यवसायी का मांग फलन $p = 300 - 5x$ है।

(i) सीमांत आय फलन ज्ञात कीजिए।

(ii) किस मूल्य पर सीमांत आय शून्य है?

3. एक माल की x इकाइयों के लिए कुल आय फलन

$$R(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 7$$

दिया है। सीमांत आय ज्ञात कीजिए जबकि उत्पादित माल की इकाइयों की संख्या (x) 20 है।

4. एक विशिष्ट उत्पाद की मांग समीकरण $p = 300 + 2x - 5x^2$ से प्रदर्शित है जहाँ मांगी गई इकाइयों की संख्या x तथा प्रति इकाई मूल्य p है। ज्ञात कीजिए :

(i) कुल आय (TR) (ii) सीमांत आय (MR)

(iii) सीमांत आय जब $x = 3$

5. एक माल के लिए मांग फलन $x = 10 - 3p$ से प्रदत्त है जहाँ x उत्पादित माल की इकाइयों की संख्या तथा p प्रति इकाई मूल्य है। सीमांत आय फलन तथा $x = 3$ पर सीमांत आय भी ज्ञात कीजिए।

6. एक उत्पाद की x इकाइयों से प्राप्त कुल आय $R(x) = 20x - 0.5x^2$ से प्रदत्त है। ज्ञात कीजिए (i) औसत आय (ii) सीमांत आय (iii) $x = 10$ के लिए सीमांत आय

(iv) 15 वीं वस्तु के विक्रय से वास्तविक आय।

7. कुल आय फलन $R(x) = 8000x + 20x^2 - x^3$ से प्रदत्त है। ज्ञात कीजिए

(i) औसत आय (ii) सीमांत आय

(iii) $x = 50$ के लिए सीमांत आय एवं औसत आय।

8. किसी एकाधिकारी व्यवसायी का अपने उत्पादों में से एक के लिए मांग फलन $p(t) = at + b$ है जहाँ t उत्पादित इकाइयों की संख्या और p प्रति इकाई मूल्य है। यदि 5 इकाइयों के विक्रय पर मूल्य 1800 रु प्रति इकाई तथा 3 इकाइयों के विक्रय पर मूल्य 2000 रु प्रति इकाई है, तो संपूर्ण, औसत एवं सीमांत आय फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही प्रति इकाई मूल्य ज्ञात कीजिए जब सीमांत आय शून्य है।

9. किसी माल का मांग फलन $p = ae^{-x/300}$ से प्रदत्त है जहाँ x मांगी गई इकाई की मात्रा तथा p प्रति इकाई मूल्य है। दिया है कि प्रति इकाई मूल्य 7 रु है जब 600 इकाई उत्पाद का उत्पादन हुआ है। कुल आय, औसत एवं सीमांत आय फलनों को ज्ञात कीजिए। साथ ही प्रति इकाई मूल्य भी ज्ञात कीजिए जब सीमांत आय शून्य है।

10. किसी माल का प्रति इकाई मूल्य p और माल की इकाइयों की संख्या x रैखिक रूप से संबद्ध है। यदि उपभोक्ता उत्पाद की 50 इकाइयों की मांग करता है जब कि प्रति इकाई मूल्य 10 रु है और 20 इकाइयों की माँग करता है जबकि प्रत्येक का मूल्य 15 रु है, तो मांग फलन तथा कुल आय, औसत एवं सीमांत आय फलनों को ज्ञात कीजिए।

11. मांग फलन $x = \dfrac{b - p}{a}$ के लिए सीमांत आय वक्र और औसत आय वक्र के ढालों के मध्य संबंध स्थापित कीजिए जहाँ x प्रति इकाई मूल्य p पर विक्रय की गई इकाइयों की संख्या को निरूपित करता है।

12. एक फैक्ट्री में यह पाया गया कि एक दिन में उत्पादित इकाइयों की कुल संख्या (x) श्रमिकों की संख्या (n) पर आश्रित है और संबंध $x = \frac{5n}{\sqrt{n+5}}$ से प्राप्त होता है। उत्पाद का मांग फलन $p = \frac{2}{x} + x$ है। $n = 20$ के लिए सीमांत आय ज्ञात कीजिए।

13. मांग फलन $p = \frac{b}{a+x}$ के लिए दिखाइए कि सभी $a > 0$ तथा $b < 0$ के लिए सीमांत आय फलन वर्धमान है।

18.7 कुल आय का अधिकतमीकरण (Maximization of Total Revenue)

एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन एवं विक्रय से प्राप्त आय ज्ञात की जा सकती है जब उत्पाद का मांग फलन दिया हो। इस प्रकार वह उत्पादन स्तर ज्ञात करना संभव है जिस पर कुल आय महत्तम हो। यदि एक फर्म के उत्पाद के लिए मांग फलन $p = f(x)$ है तब फर्म का आय फलन R, $R = px = x f(x)$ से दिया जाता है।

आइए पुनः स्मरण करें कि x के उस मान के लिए जिस पर $\frac{dR}{dx} = 0$ तथा $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ तथा R महत्तम होता है।

उदाहरण 15 एक निर्माता के उत्पाद के लिए मांग फलन $p = 20 - \frac{x}{4}$ है जहाँ x इकाइयों की संख्या तथा p प्रति इकाई मूल्य है। x के किस मान के लिए आय महत्तम होगी? महत्तम आय क्या है?

हल आय R

$$R = px = (20 - \frac{x}{4})x = 20x - \frac{x^2}{4}$$

से प्रदत्त है।

अब $$\frac{dR}{dx} = 20 - \frac{x}{2} \text{ तथा } \frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{1}{2}$$

महत्तम आय के लिए, $$\frac{dR}{dx} = 0 \text{ जब}$$

$$20 - \frac{x}{2} = 0 \qquad \text{या} \qquad x = 40$$

साथ ही $$\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)_{x=40} = -\frac{1}{2} < 0$$

इसलिए, R महत्तम है जब $x = 40$ और R का महत्तम मान

$$20 \times 40 - \frac{(40)^2}{4} = 800 - 400 = 400$$

अतः महत्तम आय = 400

उदाहरण 16 एक विशिष्ट माल के लिए मांग फलन $y = 15e^{-x/3}$, $0 \leq x \leq 8$ के लिए है जहाँ y प्रति इकाई मूल्य तथा x मांगी गई इकाइयों की संख्या हैं। मूल्य एवं मात्रा ज्ञात कीजिए जिस पर आय महत्तम है।

हल मान लीजिए R कुल आय है।

तब $$R = (\text{प्रति इकाई मूल्य}) \times (\text{विक्रित इकाइयों की संख्या}) = 15xe^{-x/3}$$

अब $$\frac{dR}{dx} = 15\left[x.e^{-x/3}\left(-\frac{1}{3}\right) + e^{-x/3}.1\right] = 15e^{-x/3}\left(1 - \frac{x}{3}\right)$$

तथा $$\frac{d^2R}{dx^2} = 15e^{-x/3}\left(-\frac{1}{3}\right) + \left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(15e^{-x/3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$= -5\,e^{-x/3}\left(2 - \frac{x}{3}\right)$$

महत्तम आय के लिए $\frac{dR}{dx} = 0$ जब $15e^{-x/3}\left(1 - \frac{x}{3}\right) = 0$ या $x = 3$

और $$\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)_{x=3} = -5\,e^{-1}(2 - 1) = -\frac{5}{e} < 0$$

इस प्रकार, R महत्तम है जब $x = 3$

x के इस मान को मांग फलन $y = 15\,e^{-x/3}$ में प्रतिस्थापित करने पर, हम निम्न मूल्य पाते हैं :

$$y = 15\,e^{-1} = \frac{15}{e} \text{ रु}$$

उदाहरण 17 इकाई मांग फलन $x = \frac{1}{3}(24 - 2p)$ है जहाँ x मांगी गई इकाइयों की संख्या, p प्रति इकाई मूल्य है। ज्ञात कीजिए :

(i) मूल्य p के पदों में आय फलन R तथा

(ii) मूल्य एवं मांगी गई इकाइयों की संख्या जिनके लिए आय महत्तम है।

हल हम जानते हैं कि कुल आय $R = px = \frac{1}{3}(24p - 2p^2)$

अब $$\frac{dR}{dp} = \frac{4}{3}(6 - p) \quad \text{तथा} \quad \frac{d^2R}{dp^2} = -\frac{4}{3}$$

महत्तम आय के लिए, $\frac{dR}{dp} = 0$ या $\frac{4}{3}(6 - p) = 0$ या $p = 6$

अब $$\left(\frac{d^2R}{dp^2}\right)_{p=6} = -\frac{4}{3} < 0$$

इसलिए, जब $p = 6$ तब आय महत्तम है।

साथ ही $$x = \frac{1}{3}(24 - 2p)$$

जब $$p = 6, x = \frac{1}{3}(24 - 12) = 4$$

इस प्रकार, प्रति इकाई मूल्य 6 रु पर 4 इकाइयों की मांग के लिए आय महत्तम होगी।

18.8 कुल लाभ का अधिकतमीकरण (Maximization of Total Profit)

यदि एक माल की x इकाई उत्पादन में कुल लागत तथा प्राप्त कुल आय क्रमशः $C(x)$ और $R(x)$ हों, तब लाभ फलन $P(x)$,

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

से प्रदत्त हैं

अब लाभ महत्तम होगा जबकि $\frac{dp}{dx} = 0$ और $\frac{d^2p}{dx^2} < 0$

अर्थात् $$\frac{dR(x)}{dx} - \frac{dC(x)}{dx} = 0 \quad \text{और} \quad \frac{d^2R(x)}{dx} - \frac{d^2C(x)}{dx^2} < 0$$

या $\quad \text{MR} - \text{MC} = 0$ और $\dfrac{d^2\text{R}(x)}{dx^2} < \dfrac{d^2\text{C}(x)}{dx^2}$

अर्थशास्त्र की भाषा में, हम कह सकते हैं कि लाभ के अधिकतमीकरण के लिए आवश्यक प्रतिबंध हैं कि महत्तम लाभ वाले बिंदु पर सीमांत आय तथा सीमांत लागत समान होने चाहिए।

उदाहरण 18 एक कंपनी x वस्तुएँ उत्पादित करती है और कुल लागत C और कुल आय R समीकरणों $\text{C} = 100 + 0.015\,x^2$ और $\text{R} = 3x$ से प्रदत्त हैं। कितनी वस्तुएँ उत्पादित की जाएँ कि लाभ महत्तम हो? यह लाभ क्या है?

हल मान लीजिए कि $\text{P}(x)$ लाभ फलन है।

तब
$$\text{P}(x) = \text{R}(x) - \text{C}(x) = 3x - (100 + 0.015\,x^2)$$
$$= 3x - 100 - 0.015\,x^2$$

अब
$$\frac{dp}{dx} = 3 - 0.030x \quad \text{और} \quad \frac{d^2p}{dx^2} = -\,0.030$$

लाभ के अधिकतमीकरण के लिए, हम पाते हैं

$$\frac{dp}{dx} = 0 \text{ या } 3 - 0.030x = 0 \text{ या } x = 100$$

साथ ही
$$\left(\frac{d^2p}{dx^2}\right)_{x=100} = -\,0.030 < 0$$

इस प्रकार, जब $x = 100$ है तो $\text{P}(x)$ महत्तम है

और महत्तम लाभ $= 3 \times 100 - 100 - 0.015 \times (100)^2 = 50$

उदाहरण 19 एक रेडियो निर्माता को ज्ञात होता है कि वह प्रति सप्ताह, p रु प्रति रेडियो की दर से x रेडियो बेच सकता है जहाँ $p = 2(100 - \frac{x}{4})$, उसकी प्रति सप्ताह x रेडियो उत्पादित करने की लागत $(120x + \frac{x^2}{2})$ रु है। दिखाइए कि उसका लाभ महत्तम होता है जब वह 40 रेडियो प्रति सप्ताह उत्पादित करता है। प्रति सप्ताह का महत्तम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

हल प्रति रेडियो मूल्य $p = 2(100 - \frac{x}{4})$

इसलिए आय $R = px = 2x\left(100 - \frac{x}{4}\right) = 200x - \frac{x^2}{2}$

साथ ही लागत फलन $C(x) = 120x + \frac{x^2}{2}$ से प्रदत्त है।

लाभ फलन $P(x) = R(x) - C(x)$

$$= 200x - \frac{x^2}{2} - 120x - \frac{x^2}{2} = 80x - x^2$$

अब $$\frac{dP(x)}{dx} = 80 - 2x \text{ और } \frac{d^2P(x)}{dx^2} = -2$$

महत्तम लाभ के लिए $\frac{dP(x)}{dx} = 0$ अर्थात् $80 - 2x = 0$ या $x = 40$

और $$\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right)_{x=40} = -2 < 0$$

इसलिए जब $x = 40$, तो विक्रेता का लाभ महत्तम होगा।

साथ ही महत्तम लाभ $= 80.(40) - (40)^2 = 1600$ रु

उदाहरण 20 किसी एकाधिकारी व्यवसायी के उत्पाद के लिए मांग फलन $p = \frac{50}{\sqrt{x}}$ है और औसत लागत फलन $AC = 0.50 + \frac{1000}{x}$, महत्तम लाभ के लिए मूल्य एवं उत्पादन ज्ञात कीजिए। इस स्तर पर दिखाइए कि सीमांत आय तथा सीमांत लागत बराबर है।

हल मांग फलन $p = \frac{50}{\sqrt{x}}$ है।

इसलिए आय $R(x) = px = \frac{50}{\sqrt{x}}x = 50\sqrt{x}$

मान लीजिए C कुल लागत फलन को निरूपित करता है, तब दिया है कि

औसत लागत $AC = 0.50 + \frac{1000}{x}$

इस प्रकार $C(x) = x\ AC = x\left(0.50 + \frac{1000}{x}\right) = 0.50x + 1000$

अब लाभ $P(x) = R(x) - C(x) = 50\sqrt{x} - 0.50x - 1000$

इसलिए $\frac{dP(x)}{dx} = \frac{50}{2\sqrt{x}} - 0.50 = \frac{25}{\sqrt{x}} - 0.50$ और $\frac{d^2P(x)}{dx^2} = -\frac{25}{2x^{3/2}}$

महत्तम लाभ के लिए $\frac{dP(x)}{dx} = 0$ अर्थात् $\frac{25}{\sqrt{x}} - 0.50 = 0 \quad \Rightarrow x = 2500$

और $\left(\frac{d^2P(x)}{dx^2}\right)_{x=2500} = \frac{-25}{2(2500)^{3/2}} = \frac{-25}{2\times125000} = \frac{-1}{10000} < 0$

इसलिए, $x = 2500$ पर महत्तम लाभ प्राप्त होता है और संगत मूल्य

$$p = \frac{50}{\sqrt{2500}} = 1 \text{रु है।}$$

साथ ही सीमांत आय $(MR) = \frac{dR}{dx} = \frac{25}{\sqrt{x}}$

तथा सीमांत लागत $(MC) = \frac{dC}{dx} = 0.50$

जब $x = 2500$,

$$MR = \frac{25}{\sqrt{2500}} = \frac{25}{50} = 0.50 \text{ और } MC = 0.50$$

इस प्रकार $MR = MC$ जब $x = 2500$

18.9 औसत लागत का न्यूनतमीकरण (Minimization of Average Cost)

हम जानते हैं कि, यदि $C = f(x)$, उत्पाद की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत है, तब औसत लागत (AC)

$$AC = \frac{C}{x}$$ से प्रदत्त है।

अर्थशास्त्र की एक महत्त्वपूर्ण समस्या उत्पादन का वह स्तर ज्ञात करना है जिस पर औसत लागत न्यूनतम हो। उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के प्रतिबंध के प्रयोग से, वह उत्पादन स्तर जिस पर औसत लागत न्यूनतम हो,

$$\frac{dAC}{dx} = 0 \text{ और } \frac{d^2AC}{dx^2} > 0$$

यहाँ, पुनः हम समीकरण $\frac{dAC}{dx} = 0$ को हल करते हैं और ऋणात्मक या भिन्नात्मक मूलों को अस्वीकार कर देते हैं। तब हम शेष मानों के लिए $\frac{d^2AC}{dx^2}$ के चिह्न की जाँच करते हैं। जिस पर $\frac{d^2AC}{dx^2}$ धनात्मक होता है, यह मान वह मूल्य होता है जिस पर AC न्यूनतम हो।

उदाहरण 21 एक वस्तु की निर्माण लागत में स्थिर व्यय 1000 , पदार्थ की कीमत 2 रु प्रति इकाई तथा x इकाइयों के उत्पादन की श्रम लागत $\frac{x^2}{90}$ रु है। ज्ञात कीजिए औसत मूल्य न्यूनतम करने के लिए वस्तु की कितनी इकाइयों का उत्पादन करना चाहिए।

हल कुल लागत $C = 1000 + 2x + \frac{x^2}{90}$ से प्रदत्त है

और औसत लागत $AC = \frac{C}{x} = \frac{1000}{x} + 2 + \frac{x}{90}$ से प्रदत्त है।

न्यूनतम औसत लागत के लिए प्रथम और द्वितीय क्रम के प्रतिबंध क्रमशः $\frac{dAC}{dx} = 0$ और $\frac{d^2AC}{dx^2} > 0$ है।

अब $$\frac{dAC}{dx} = -\frac{1000}{x^2} + \frac{1}{90} \text{ और } \frac{d^2AC}{dx^2} = \frac{2000}{x^3}$$

AC के न्यूनतम होने के लिए $\frac{dAC}{dx} = 0 \Rightarrow -\frac{1000}{x^2} + \frac{1}{90} = 0$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 90000, \Rightarrow x = 300$$

और $$\left(\frac{d^2\text{AC}}{dx^2}\right)_{x=300} = \frac{2000}{(300)^3} > 0$$

अत:, $x = 300$ पर AC न्यूनतम है।

उदाहरण 22 मान लीजिए एक फर्म का लागत फलन निम्नलिखित समीकरण

$C = 300x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ से प्रदत्त है, जहाँ लागत के लिए C तथा उत्पादन के लिए x प्रयुक्त है। परिकलन कीजिए :

(i) उत्पादन की मात्रा जिस पर सीमांत लागत न्यूनतम हो।

(ii) उत्पादन की मात्रा जिस पर औसत लागत न्यूनतम हो।

(iii) उत्पादन की मात्रा जिस पर औसत लागत, सीमांत लागत के बराबर हो।

हल लागत फलन $C = 300x - 10x^2 + \frac{1}{3}x^3$ दिया है।

इसलिए औसत लागत $\text{AC} = \frac{C}{x} = 300 - 10x + \frac{1}{3}x^2$

और सीमांत लागत $\text{MC} = \frac{dC}{dx} = 300 - 20x + x^2$

(i) $\frac{d\text{MC}}{dx} = -20 + 2x$ और $\frac{d^2\text{MC}}{dx^2} = 2$

MC के न्यूनतम होने के लिए, $\frac{d\text{MC}}{dx} = 0 \Rightarrow -20 + 2x = 0 \Rightarrow x = 10$

और $$\left(\frac{d^2\text{MC}}{dx^2}\right)_{x=10} = 2 > 0$$

इसलिए 10 इकाई वह उत्पादन की मात्रा है जिस पर सीमांत लागत न्यूनतम है।

(ii) $$\frac{d\text{AC}}{dx} = -10 + \frac{2}{3}x \text{ और } \frac{d^2\text{AC}}{dx^2} = \frac{2}{3}$$

AC के न्यूनतम होने के लिए,

$$\frac{dAC}{dx} = 0 \Rightarrow -10 + \frac{2}{3}x = 0 \Rightarrow x = 15$$

और $$\left(\frac{d^2AC}{dx^2}\right)_{x=15} = \frac{2}{3} > 0$$

इस प्रकार, जब उत्पादन स्तर 15 इकाई है औसत मूल्य न्यूनतम है।

(iii) $AC = MC \Rightarrow 300 - 10x + \frac{1}{3}x^2 = 300 - 20x + x^2$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}x^2 - 10x = 0 \qquad \Rightarrow x = 0 \text{ या } x = 15$$

परंतु x शून्य नहीं हो सकता, इसलिए $x = 15$ वह उत्पादन स्तर है जिस पर सीमांत लागत और औसत लागत बराबर हैं।

उदाहरण 23 एक फर्म का लागत फलन $C = 5x^2 + 28x + 5$ है, जहाँ लागत C और उत्पादन स्तर x है। 2 रु प्रति इकाई की दर से एक कर लगाया गया है जिसे उत्पादक अपनी लागत में जोड़ लेता है। औसत लागत का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए।

हल उत्पादन की प्रत्येक इकाई पर कर 2 रु है, इसलिए x इकाई के लिए लागत में जोड़ा गया कर $2x$ रु है।

इसलिए कुल लागत $= 5x^2 + 28x + 5 + 2x \Rightarrow C(x) = 5x^2 + 30x + 5$

अब औसत लागत $(AC) = \frac{C}{x} = 5x + 30 + \frac{5}{x}$

अतः $\frac{dAC}{dx} = 5 - \frac{5}{x^2}$ और $\frac{d^2AC}{dx^2} = +\frac{10}{x^3}$

AC के न्यूनतम होने के लिए $\frac{dAC}{dx} = 0 \Rightarrow 5 - \frac{5}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

ऋणात्मक मान अमान्य है अतः $x = 1$

और $$\left(\frac{d^2\text{AC}}{dx^2}\right)_{x=1} = \frac{10}{1^3} > 0$$

इस प्रकार, $x = 1$ पर औसत लागत न्यूनतम है तथा न्यूनतम औसत लागत (MAC)

$$\text{MAC} = 5(1) + 30 + \frac{10}{1} = 45$$

उदाहरण 24 एक हारमोनियम निर्माता प्रति सप्ताह x सेट उत्पादित करता है तथा उत्पादन की कुल लागत संबंध $C(x) = x^3 - 315x^2 + 27{,}000x + 20{,}000$ से प्रदत्त है। ज्ञात कीजिए कितने हारमोनियम उत्पादित किए जाएँ, जिससे कुल लागत न्यूनतम हो?

हल दिया है $$C(x) = x^3 - 315x^2 + 27{,}000x + 20{,}000$$

अब $$\frac{dC}{dx} = 3x^2 - 630x + 27{,}000 = 3(x^2 - 210x + 9000) = 0$$

$$\Rightarrow (x-150)(x-60) = 0 \text{ या } x = 150 \text{ या } 60$$

जब $$x = 60,\quad \frac{d^2C}{dx^2} = 6 \times 60 - 630 = -270 < 0$$

इस प्रकार, $x = 60$ पर $C(x)$ न्यूनतम नहीं है। अब जब $x = 150$ है तब

$\frac{d^2C}{dx^2} = 6 \times 150 - 630 = +270 > 0$, अतः $x = 150$ पर कुल लागत C न्यूनतम है।

उदाहरण 25 एक निर्माता x इकाई प्रति सप्ताह की दर से कंप्यूटर के आंकड़े संग्रह करने की फ्लापी उत्पादित करता है और उसके उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत $C(x) = (\frac{x^3}{3} - 10x^2 + 15x + 30)$ रु है। प्रति सप्ताह उत्पादित फ्लापियों की इष्टतम (Optimal) संख्या ज्ञात कीजिए जिससे सीमांत लागत और औसत चर लागत न्यूनतम हों।

हल दिया है $C(x) = \frac{x^3}{3} - 10x^2 + 15x + 30$

अब $$\frac{dC}{dx} = x^2 - 20x + 15$$

इसलिए $MC = x^2 - 20x + 15$ और $\frac{dMC}{dx} = 2x - 20$

MC के न्यूनतम होने के लिए, $\frac{dMC}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 20 = 0$ या $x = 10$

और $$\left(\frac{d^2MC}{dx^2}\right)_{x=10} = 2 > 0$$

इसलिए, सीमांत लागत न्यूनतम होने के लिए 10 फ्लापियों का उत्पादन और विपणन होना चाहिए। हम जानते हैं कि कुल लागत, स्थिर लागत एवं चर लागत का योग होता है।

इसलिए, चर लागत $= \frac{x^3}{3} - 10x^2 + 15x$ और

औसत चर लागत (AVC) $= \frac{1}{x}$ (चर लागत)

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} - 10x^2 + 15x\right) = \frac{x^2}{3} - 10x + 15$$

अब $$\frac{dAVC}{dx} = \frac{2}{3}x - 10 \text{ और } \frac{d^2AVC}{dx^2} = \frac{2}{3}$$

AVC के न्यूनतम होने के लिए, $\frac{dAVC}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x - 10 = 0 \Rightarrow x = 15$

और $$\left(\frac{d^2AVC}{dx^2}\right)_{x=15} = \frac{2}{3} > 0$$

अतः, औसत चर लागत न्यूनतम करने के लिए 15 फ्लापियों का उत्पादन और विपणन करना चाहिए।

प्रश्नावली 18.4

1. एक निर्माता के उत्पाद के लिए मांग समीकरण $p = \frac{180 - x}{4}$ है, जहाँ x इकाइयों की संख्या और p प्रति इकाई मूल्य है। x के किस मान पर आय महत्तम होगी? महत्तम आय क्या है?
2. एक उत्पादन का आय फलन संबंध $y = 60,00,000 - (x - 2000)^2$ से प्रदत्त है जहाँ y कुल आय है और x विक्रय की गई इकाइयों की संख्या है।

(i) ज्ञात कीजिए कि कुल आय के अधिकतमीकरण के लिए कितनी इकाइयों की संख्या का विक्रय किया जाए।

(ii) महत्तम आय की राशि क्या है?

3. एक रेडियो निर्माता प्रति सप्ताह x सेट $(\frac{x^2}{25}+3x+100)$ रु की कुल लागत पर उत्पादित करता है। वह एकाधिकारी व्यवसायी है और उसके उत्पाद की मांग फलन $x=75-3p$ है जहाँ p प्रति सेट का रुपयों में मूल्य है। दिखाइए कि जब प्रति सप्ताह 30 सेट उत्पन्न हों तो महत्तम शुद्ध लाभ प्राप्त होता है। एकाधिकार मूल्य क्या है?

4. यदि मांग फलन $p=\sqrt{6-x}$ है। ज्ञात कीजिए उत्पाद के किस स्तर पर कुल आय महत्तम होगी।

5. एक आपूर्तिकर्ता डिजिटल डायरी के 50 या कम सेट की मांग पर पैकिंग लागत 620 रु शुल्क लेता है। 50 से अधिक की मांग पर यह शुल्क 5 रु प्रति सैट कम कर देता है। डिजिटल डायरी की मांग की इष्टतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसे आपूर्तिकर्ता को स्वीकार कर लेना चाहिए, जिससे उसकी आय अधिकतम हो जाए।

6. लागत फलन $C(x)=x^3-57x^2+315x+20$ दिया है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर लागत न्यूनतम हो जाए।

7. यदि $C=0.01x^2+5x+100$ लागत फलन है, औसत लागत फलन ज्ञात कीजिए। न्यूनतम औसत लागत के लिए उत्पादन स्तर x क्या होना चाहिए? यह न्यूनतम औसत लागत क्या है?

8. मान लीजिए एक निर्माता x वस्तुएँ प्रति सप्ताह प्रत्येक वस्तु को मूल्य $p=20-0.001x$ रुपए पर बेच सकता है जबकि x वस्तुओं के उत्पादन की लागत $y=5x+2000$ है। अधिकतम लाभ के लिए प्रति सप्ताह उत्पादित वस्तुओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. अधिकतम लाभ के लिए उत्पादन स्तर ज्ञात कीजिए। दिया है $x=200-10p$ और $AC=10+\frac{x}{25}$, जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या, p मूल्य तथा AC औसत मूल्य को प्रदर्शित करते हैं।

10. मांग फलन $y=21-4x$ और औसत लागत फलन $AC=2$ दिया है। अधिकतम लाभ हेतु उत्पादन ज्ञात कीजिए। उत्पादन की प्रति इकाई पर t रु कर लगाने से लाभ पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

11. किसी एकाधिकारी व्यवसायी का मांग फलन और लागत फलन क्रमशः $p=13-5x$ और $C=-x^3+3x^2$ से प्रदत्त है। मूल्य के किस स्तर पर अधिकतम लाभ होगा? अधिकतम लाभ क्या होगा?

12. किसी एकाधिकारी व्यवसायी का लाभ $P(x)=\frac{8000x}{500+x}-x$ से प्रदत्त है। x का मान ज्ञात कीजिए जिससे $P(x)$ अधिकतम हो। अधिकतम लाभ भी ज्ञात कीजिए।

13. एक उत्पाद के लिए मांग फलन $p=15900-9x-2x^2$ से प्रदत्त है। उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर कुल आय अधिकतम हो।

18.10 वाणिज्य एवं अर्थशास्त्र में समाकलन के अनुप्रयोग (Applications of Integration to Commerce and Economics)

पूर्व अनुच्छेद में हमने देखा कि सीमांत फलन लागत फलन को अवकलित करने पर प्राप्त होता है। हमें कुल लागत या आय दी जाती थी और उससे सीमांत लागत या सीमांत आय प्राप्त की जाती थी। अब हम समाकलन के अनुप्रयोग से, जब सीमांत फलन दिया है कुल लागत फलन प्राप्त करने का प्रयास करेंगे।

18.10.1 ***लागत फलन और औसत लागत फलन ज्ञात करना (Determination of cost function and average cost function)*** यदि C कुल लागत फलन निरूपित करता है जो सीमांत लागत फलन (MC), $MC = \dfrac{dC}{dx}$ से प्रदत्त है। अवकलन के प्रतिलोम समाकलन के प्रयोग से हम $C = \int MC\ dx + k$, पाते हैं जहाँ k समाकलन का अचर है, जो कि स्थिर लागत के बराबर है। कुल लागत (C) प्राप्त करके हम औसत लागत $AC = \dfrac{C}{x}$ भी ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 26 एक वस्तु की x इकाई के निर्माण में सीमांत लागत फलन $6 + 10x - 6x^2$ है। एक वस्तु की एक इकाई के उत्पादन की कुल लागत 12 रु है। कुल तथा औसत लागत फलनों को ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है कि सीमांत लागत $MC = 6 + 10x - 6x^2$

अब लागत फलन $C = \int MC\ dx + k = \int (6+10x-6x^2)dx + k$

$$= 6x + 5x^2 - 2x^3 + k \qquad (1)$$

दिया है एक इकाई उत्पादन की कुल लागत 12 रु है अर्थात् जब $x = 1$, $C = 12$, (1) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं

$$12 = 6 \times 1 + 5 \times 1^2 - 2 \times 1^3 + k \text{ अर्थात् } k = 3$$

अतः, कुल लागत फलन $C = 6x + 5x^2 - 2x^3 + 3$ और $AC = \dfrac{C}{x} = 6 + 5x - 2x^2 + \dfrac{3}{x}$ है।

उदाहरण 27 एक उत्पाद का सीमांत लागत फलन MC, $MC = \dfrac{2}{\sqrt{4x+9}}$ से दिया हुआ है और स्थिर लागत 2000 रु है। उत्पाद की 4 इकाई उत्पादित करने के लिए कुल लागत तथा औसत लागत ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $MC = \dfrac{2}{\sqrt{4x+9}}$

इसलिए कुल लागत फलन $C = \int MC \; dx + k = \int \frac{2}{\sqrt{4x+9}} dx + k$

अर्थात् $$C = \frac{2(4x+9)^{1/2}}{\frac{1}{2}\times 4} + k = \sqrt{4x+9} + k$$

दी हुई स्थिर लागत = 2000 रु अर्थात् जब $x = 0$, C = 2000, (1) में प्रतिस्थापित करने पर, हम पाते हैं

$$2000 = 3 + k \Rightarrow k = 1997$$

इस प्रकार कुल लागत फलन $C = \sqrt{4x+9} + 1997$

और औसत लागत फलन $AC = \frac{C}{x} = \frac{\sqrt{4x+9}}{x} + \frac{1997}{x}$

जब $x = 4$ तब कुल लागत $= \sqrt{16+9} + 1997 = 2002$ रु

$$\text{और औसत लागत} = \frac{\sqrt{16+9}}{4} + \frac{1997}{4} = \frac{1001}{2} \text{ रु}$$

उदाहरण 28 दिया है सीमांत लागत MC और औसत लागत AC बराबर है। दिखाइए कि कुल लागत C उत्पादित इकाइयों की संख्या का रैखिक फलन है।

हल मान लीजिए कि कुल लागत C है, तब MC = AC

$$\Rightarrow \quad \frac{dC}{dx} = \frac{C}{x}, \quad (1)$$

जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है। (1) से, हम पाते हैं

$$\frac{dC}{C} = \frac{dx}{x}$$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर, हम पाते हैं

$$\log C = \log x + k, \text{ मान लीजिए } k = \log k'$$

इसलिए $$\log C = \log x + \log k'$$

$\Rightarrow \qquad \log C = \log xk'$

$\Rightarrow \qquad C = x\,k'$, जहाँ k' एक अचर है।

अत:, कुल लागत C, x का रैखिक फलन है।

प्रश्नावली 18.5

1. एक उत्पाद की x इकाई निर्माण का सीमांत लागत फलन $MC = 3x^2 - 10x + 3$ से प्रदत्त है। उत्पाद की एक इकाई उत्पादन की कुल लागत 7 रु है। कुल एवं औसत लागत फलनों को ज्ञात कीजिए।

2. मान लीजिए कि एक माल की x इकाई के उत्पादन की सीमांत लागत (हजारों रुपयों में) $MC = 3e^{0.3x} + 5$ से प्रदत्त है यदि स्थिर लागत 7000 रु है तो कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए जब कि $x = 5$

3. एक फर्म का सीमांत लागत फलन $MC = 33 \log x$ है। कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए जबकि एक इकाई उत्पाद की लागत 11 रु है।

4. उत्पादन की सीमांत लागत $MC = 20 - 0.04x + 0.003x^2$ है, जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है। उत्पादन की स्थिर लागत 7000 रु हैं कुल लागत तथा औसत लागत फलनों को ज्ञात कीजिए।

5. एक माल के लिए सीमांत लागत फलन MC, $MC = \dfrac{14{,}000}{\sqrt{7x+4}}$ से प्रदत्त है और स्थिर लागत 18000 रु है। उत्पाद की 3 इकाई उत्पादित करने की कुल लागत और औसत लागत ज्ञात कीजिए।

6. सीमांत लागत C उत्पादित इकाइयों की संख्या x का एक अचर अपवर्त्य है। कुल लागत तथा औसत लागत फलनों को ज्ञात कीजिए यदि स्थिर लागत 1000 रु है और 30 इकाई उत्पादन की लागत 2800 रु है।

7. एक इलेक्ट्रॉनिक उपकरण की x इकाई उत्पादन की सीमांत लागत $MC = x\sqrt{x+1}$ से प्रदत्त है। उपकरण की 3 इकाई उत्पादन की लागत 7800 रु है, लागत फलन ज्ञात कीजिए।

8. दिया है कि एक उत्पाद की सीमांत लागत MC तथा औसत लागत AC एक-दूसरे के समानुपाती है। कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए ताकि 2 इकाई उत्पादन की लागत 8 रु तथा 4 इकाई उत्पादन की लागत 64 रु हो।

9. एक उत्पाद की x इकाइयों के उत्पादन की सीमांत लागत (लाखों में) $MC = \dfrac{3}{2}e^{-x} + 5x^2 + 4$ है। उत्पादन की कुल लागत ज्ञात कीजिए जब $x = 2$ है तथा यदि स्थिर लागत 8 लाख रु है।

10. यदि सीमांत लागत फलन $MC = \dfrac{p}{\sqrt{px+q}}$, जहाँ p, q अचर हैं।

से प्रदत्त है और उत्पादन की स्थिर लागत शून्य है। कुल लागत फलन ज्ञात कीजिए।

18.10.2 *सीमांत आय फलन से आय फलन और मांग फलन ज्ञात करना* (*Determination of revenue function and the demand function from marginal revenue function*)

हम जानते हैं कि $\mathrm{MR} = \dfrac{d\mathrm{R}}{dx}$ (1)

जहाँ MR : सीमांत आय फलन

R : कुल आय फलन

तथा x : उत्पादित इकाइयों की संख्या

R ज्ञात करने के लिए, (1) का समाकलन करके हम पाते हैं

$\mathrm{R} = \int \mathrm{MR}\,dx + k$, जहाँ k समाकलन का अचर है और इसे $\mathrm{R} = 0$, जबकि $x = 0$ तथ्य का प्रयोग करके ज्ञात करते हैं।

R ज्ञात करने के बाद, संगत मांग फलन परिणाम $\mathrm{R} = px$ या $p = \dfrac{\mathrm{R}}{x}$ का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 29 एक माल का सीमांत आय फलन $\mathrm{MR} = \dfrac{ab}{(x-b)^2} - \mathrm{C}$ से प्रदत्त है। कुल आय फलन और मांग फलन ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $\mathrm{MR} = \dfrac{ab}{(x-b)^2} - \mathrm{C}$

इसलिए
$$\mathrm{R} = \int \mathrm{MR}\,dx + k$$

$$= \int \left(\frac{ab}{(x-b)^2} - \mathrm{C} \right) dx + k$$

$$= ab\left(-\frac{1}{x-b} \right) - \mathrm{C}x + k$$

$$= -\frac{ab}{x-b} - Cx + k$$

जब $x = 0, R = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{-ab}{-b} - 0 + k$ या $k = -a$

अतः कुल आय फलन

$$R = \frac{-ab}{(x-b)} - Cx - a$$

परंतु $$p = \frac{R}{x} = \frac{1}{x}[-\frac{ab}{x-b} - Cx - a]$$

$$= \frac{ab}{x(b-x)} - C - \frac{a}{x} = \frac{a}{b-x} - C$$

अतः मांग फलन $p = \dfrac{a}{b-x} - C$ है।

उदाहरण 30 यदि एक माल के लिए सीमांत आय फलन $MR = 9 - 6x^2 + 2x$ है। कुल आय और संगत मांग फलनों को ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $MR = 9 - 6x^2 + 2x$

अब $$R = \int MR\,dx + k,$$

जहाँ k समाकलन का अचर है।

इसलिए $$R = \int (9 - 6x^2 + 2x)\,dx + k = 9x - 2x^3 + x^2 + k$$

हम जानते हैं, जब $x = 0$, तो $R = 0 \Rightarrow k = 0$

इसलिए $$R = 9x - 2x^3 + x^2$$

इस प्रकार संगत मांग फलन

$$p = \frac{R}{x} = 9 - 2x^2 + x,$$

जहाँ p मूल्य तथा x विक्रय की गई इकाइयाँ हैं।

प्रश्नावली 18.6

1. यदि सीमांत आय फलन $MR = 5 + \dfrac{6}{(x+2)^2}$ से प्रदत्त है। कुल आय फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही कुल अर्जित आय ज्ञात कीजिए जब उत्पादित इकाइयों की संख्या 4 है।

2. यदि एक माल का सीमांत आय फलन $MR = \dfrac{1}{(x+1)^2} + 2$ है। कुल आय फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही कुल आय बताइए जब मूल्य 2.20 रु है।

3. एक माल का सीमांत आय फलन $MR = 9 - 2x + 4x^2$ से प्रदत्त है, मांग फलन ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित प्रश्न 4 से 10 तक दिए गए सीमांत फलनों के लिए कुल आय फलन और मांग फलन ज्ञात कीजिए :

4. $MR = \dfrac{1}{x+1} - 3$

5. $MR = \dfrac{4}{(2x+3)^2} - 1$

6. $MR = a + \dfrac{1}{x+b} - \dfrac{x}{(x+b)^2}$

7. $MR = 100 - 9x^2$

8. $MR = \dfrac{ab}{(x+b)^2} - C$

9. $MR = 20e^{-x/10}\left(1 - \dfrac{x}{10}\right)$

10. $MR = \log(x+1)$

विविध उदाहरण
(MISCELLANEOUS EXAMPLES)

उदाहरण 31 मांग फलन $p = a - bx$ के लिए सीमांत आय वक्र तथा औसत आय वक्र के ढालों के मध्य संबंध ज्ञात कीजिए।

हल दिया है $p = a - bx$

इसलिए $R = px = ax - bx^2$

अब $AR = p = a - bx$

इसलिए AR वक्र का ढाल $= \dfrac{d(AR)}{dx} = -b$ (1)

साथ ही $MR = \dfrac{dR}{dx} = a - 2bx$

इस प्रकार MR वक्र का ढाल $= \frac{d\text{MR}}{dx} = -2b$ (2)

(1) और (2) से, हम पाते हैं

$$\frac{d\text{MR}}{dx} = 2\frac{d}{dx}\text{AR}$$

अर्थात् MR वक्र का ढाल, AR वक्र के ढाल का दो गुना है।

उदाहरण 32 एक केबिल टी वी संचालक के 5000 ग्राहक हैं। उनमें से प्रत्येक उसे 100 रु प्रति माह देता है। संचालक शुल्क बढ़ाना प्रस्तावित करता है तथा वह पाता है कि प्रत्येक 0.50 रु की बढ़ोत्तरी पर 10 ग्राहक उसकी सेवा छोड़ देंगे। ज्ञात कीजिए किस दर से शुल्क बढ़ाया जाए जिससे आय महत्तम हो जाए और महत्तम आय क्या होगी?

हल मान लीजिए संचालक मासिक शुल्क में x रु की वृद्धि करता है। तब प्रत्येक ग्राहक की शुल्क दर

$p = 100 + x$ है।

चूंकि प्रत्येक 0.50 रु की वृद्धि पर 10 ग्राहक सेवा छोड़ देते हैं। इसलिए x रु की वृद्धि पर सेवा छोड़ने वाले ग्राहकों की संख्या

$$\frac{10x}{0.50} = 20x \text{ होगी।}$$

इसलिए, कुल ग्राहकों की संख्या $= 5000 - 20x$

अब, संचालक की कुल आय

$$\begin{aligned} \text{R} &= \text{दर} \times \text{ग्राहक संख्या} \\ &= (100 + x)(5000 - 20x) \\ &= 500000 + 3000x - 20x^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

अब $\frac{d\text{R}}{dx} = 3000 - 40x$ और $\frac{d^2\text{R}}{dx^2} = -40$

R के महत्तम होने के लिए, हम पाते हैं

$$\frac{d\text{R}}{dx} = 0 \Rightarrow 3000 - 40x = 0 \Rightarrow x = 75$$

और $\left(\frac{d^2\text{R}}{dx^2}\right)_{x=75} = -40 < 0$

इसलिए, R महत्तम है जब $x = 75$

(1) में $x = 75$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$\text{महत्तम आय} = [500000 + 3000 \times 75 - 20(75)^2] \text{ रु}$$

$$= 612500 \text{ रु}$$

उदाहरण 33 एक अधिकृत वायुयान में 200 सीटें हैं और प्रति सीट 3000 रु किराए के साथ प्रत्येक आरक्षण रद्द होने पर 150 रु अतिरिक्त शुल्क लेता है। वायुयान के प्रस्थान से पूर्व आरक्षण रद्द कराने वालों की संख्या के पदों में संपूर्ण आय फलन ज्ञात कीजिए। साथ ही रद्द आरक्षण की वह संख्या भी बताइए जिससे संपूर्ण आय महत्तम हो।

हल मान लीजिए वायुयान के प्रस्थान से पूर्व रद्द आरक्षण की संख्या x है, तब आरक्षित सीटों की संख्या $200 - x$

$$\text{प्रत्येक सीट के लिए दी गई राशि} = 3000 + 150x$$

इसलिए $$\text{संपूर्ण आय (R)} = (200 - x)(3000 + 150x)$$

$$= 6{,}00{,}000 + 27{,}000x - 150x^2$$

अब $$\frac{dR}{dx} = 27{,}000 - 300x \text{ और } \frac{d^2R}{dx^2} = -300$$

R के महत्तम होने के लिए, $\frac{dR}{dx} = 0$ या $27000 - 300x = 0$ अर्थात् $x = 90$

$$\left(\frac{d^2R}{dx^2}\right)_{x=90} = -300 < 0$$

इसलिए, $x = 90$ के लिए R महत्तम है।

इस प्रकार, 90 आरक्षण रद्द होने पर एजेंट की कुल आय महत्तम होगी।

उदाहरण 34 एक वस्तु की x इकाइयों के उत्पादन एवं विपणन की कुल लागत $C(x) = x^2 - 22x + 160$ द्वारा प्रदत्त है। सरकार 2 रु प्रति इकाई का कर लगाती है। कर जोड़ने से पूर्व और जोड़ने के बाद न्यूनतम लागत के लिए उत्पादन स्तर क्या होगा? उत्पादक को अपनी लागत में कर को जोड़ना क्यों बेहतर लगता है?

हल दिया है $C(x) = x^2 - 22x + 160$

अब $$\frac{dC}{dx} = 2x - 22 \text{ और } \frac{d^2C}{dx^2} = 2$$

ध्यान दीजिए कि

$$\frac{dC}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 22 = 0 \Rightarrow x = 11 \text{ और } \left(\frac{d^2C}{dx^2}\right)_{x=11} = 2 > 0$$

इस प्रकार कर लगाने से पूर्व न्यूनतम लागत के लिए उत्पादन स्तर 11 इकाई है।

2 रु प्रति इकाई कर लगाने के बाद कुल लागत

$$C(x)=x^2-22x+160+2x=x^2-20x+160$$

अब $\quad \dfrac{dC}{dx}=2x-20$ और $\dfrac{d^2C}{dx^2}=2>0$

$$\frac{dC}{dx}=0 \text{ या } 2x-20=0$$

या $\quad x=10$ और $\left(\dfrac{d^2C}{dx^2}\right)_{x=10}=2>0$

इसलिए, कर लगाने के बाद न्यूनतम लागत के लिए उत्पादन स्तर 10 इकाई है। अतः कर को कुल लागत में सम्मिलित करने से न्यूनतम लागत के लिए इकाइयों की महत्तम संख्या कर लगाने से पूर्व न्यूनतम लागत के लिए इकाइयों की वांछित संख्या से कम है। इसलिए उत्पादक कुल लागत में कर जोड़ना पसंद करेगा।

उदाहरण 35 एक फर्म 144 रु की हानि उठाती है यदि इसका एक विशेष उत्पादन नहीं बिकता है। सीमांत आय $MR=27-5x$ तथा सीमांत लागत $MC=4x-27$ हैं तब कुल लाभ फलन एवं सम विच्छेदन बिंदु ज्ञात कीजिए।

हल यदि R और C क्रमशः कुल आय एवं कुल लागत फलन है तो लाभ फलन P,

$$P(x)=R(x)-C(x) \text{ द्वारा प्रदत्त है।}$$

जहाँ x उत्पादित एवं बेची गई इकाइयाँ प्रदर्शित करता है।

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलित करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dR}{dx}-\frac{dC}{dx}$$

अर्थात् $\quad MP=MR-MC$

जहाँ MP = सीमांत लाभ ; MR = सीमांत आय और MC = सीमांत लागत।

हमें ज्ञात है कि

$$MR=27-5x$$

और $\quad MC=4x-27$

अतः $\quad MP=27-5x-(4x-27)$

$$=54-9x$$

अतः कुल लाभ

$$P(x) = \int MP\, dx = \int (54 - 9x)dx = 54x - \frac{9}{2}x^2 + k \qquad (1)$$

चूंकि 144 रु की हानि होती है जब कोई बिक्री नहीं थी, अतः हम पाते हैं

$$P = -144 \text{ जब } x = 0$$

पुनः (1) से हम $k = -144$ प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार कुल लाभ फलन $P(x) = -144 + 54x - \frac{9}{2}x^2$

सम विच्छेदन बिंदु के लिए $\quad P(x) = 0$

अर्थात् $\quad -144 + 54x - \frac{9}{2}x^2 = 0$

या $\quad x^2 - 12x + 32 = 0$

या $\quad x = 4$ या $x = 8$

इस प्रकार सम विच्छेदन बिंदु $x = 4, 8$ है।

अध्याय 18 पर विविध प्रश्नावली
(MISCELLANEOUS EXERCISE ON CHAPTER 18)

1. कुल लागत फलन $C = 2x^3 - 5x^2 + 7x$ है। सीमांत औसत लागत फलन (MAC) ज्ञात कीजिए। उत्पादन के बढ़ने के साथ MAC बढ़ता है या घटता है, बताइए।

2. एक माल के लिए लागत फलन C, $C = x^2 + 5x + 36$ से प्रदत्त है जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है। वह उत्पादन ज्ञात कीजिए जिस पर औसत लागत AC बढ़ रही है और वह उत्पादन भी बताइए जिस पर AC घट रहा है। साथ ही सीमांत लागत फलन ज्ञात कीजिए।

3. एक स्टील प्लांट x टन प्रतिदिन निम्न स्तरीय स्टील और y टन प्रतिदिन उच्च स्तरीय स्टील उत्पादन करने की सामर्थ्य रखता है जहाँ $y = \frac{5x - 40}{x - 10}$, यदि निम्न स्तरीय स्टील का स्थिर बाजार मूल्य उच्च स्तरीय स्टील का एक तिहाई है, तो प्रतिदिन निम्न स्तरीय स्टील के उत्पादन का स्तर ज्ञात कीजिए, जिससे अधिकतम आय हो।

4. एक उत्पाद का कुल लागत फलन $C = a + bx + cx^2$ है जहाँ $a, b \geq 0$ और $c > 0$, दिखाइए कि न्यूनतम औसत मूल्य पर औसत और सीमांत लागत बराबर है।

5. एक कार सघन प्राकृतिक गैस (CNG) से चलाई जाती है। गैस की खपत y किग्रा/किमी और चाल x किमी/घं, समीकरण $y=\frac{5}{4x}+\frac{x}{2000}$ से संबद्ध है। कार की वह चाल बताइए जिस पर गैस की खपत न्यूनतम हो।

6. यदि एक फर्म की कुल लागत C, $C(x)=\frac{x^3}{3}-5x^2+30x+10$ से प्रदत्त हो जहाँ x उत्पादित इकाइयों की संख्या है। यदि पूर्ण प्रतियोगिता के अंतर्गत प्रति इकाई मूल्य 6 रु है तो उत्पादित और क्रय की गई इकाइयों की वह संख्या बताइए जिस पर लाभ अधिकतम हो।

7. एक ट्रैवेल एजेंट देहली से शिमला और वापसी का पर्यटन आयोजित करता है। उसके पास एक विशेष बस में 60 सीटें हैं। यदि सभी सीटें भर जाती हैं तो प्रत्येक सीट का आरक्षण शुल्क 450 रु है। तथापि प्रत्येक 15 रु की आरक्षण शुल्क में वृद्धि पर एक सीट खाली रह जाएगी। वह मिनरल वाटर और हल्का नाश्ता (स्नैक्स) भी 60 रु प्रति सीट की दर से देना प्रस्तावित करता है। लाभ एवं रिक्त रही सीटों की संख्या में संबंध स्थापित कीजिए। रिक्त सीटों की संख्या क्या है जिससे लाभ अधिकतम हो?

8. एक उत्पादन की x इकाइयों को प्राप्त करने हेतु लागत फलन $C(x)=\sqrt{ax+b}$, a और b धनात्मक हैं। अवकलज को प्रयुक्त करते हुए दर्शाइए कि माध्य और सीमांत लागत वक्र वर्धमान उत्पादन के संगत सतत गिरती जाती है।

9. एक कंपनी का $MR=30x+15x^2$ और $MC=64-16x+\frac{3}{2}x^2$ है। लाभ फलन एवं उत्पादन $x>0$ ज्ञात कीजिए जब कंपनी को कोई लाभ नहीं हो तथा दिया है कि स्थिर लागत शून्य है।

10. किसी उत्पादन की सीमांत आय MR और सीमांत लागत MC क्रमशः $MR=16x-x^2$ और $MC=81-20x+2x^2$ है। यदि स्थिर लागत शून्य हो तो अधिकतम लाभ हेतु उत्पादन तथा इष्टतम उत्पादन पर कुल लाभ ज्ञात कीजिए।

11. यदि सीमांत आय और सीमांत लागत किसी उत्पादन की x इकाई के लिए $MR=3+2x$ और $MC=5-4x+3x^2$ से प्रदत्त है और यदि स्थिर लागत शून्य हो तो लाभ फलन तथा $x=2$ पर उत्पादन ज्ञात कीजिए।

प्रायिकता (क्रमशः)

(PROBABILITY (CONTINUED)) 19

19.1 भूमिका (Introduction)

किसी घटना की प्रायिकता तथा प्रायिकता के कुछ मूल नियमों के बारे में हम पहले ही सीख चुके हैं। सांख्यिकी के अनेक अनुप्रयोगों में कई मौलिक घटनाओं के संयोग (संचय) की प्रायिकता के निर्धारण की आवश्यकता पड़ती है। घटनाओं A और B पर लगाए गए कुछ प्रतिबंधों के अंतर्गत, घटनाओं '$A \cup B$' तथा '$A \cap B$' की प्रायिकताओं के परिकलन का अध्ययन हम पहले ही कर चुके हैं। घटना '$A \cap B$' की प्रायिकता का परिकलन उस स्थिति के अंतर्गत किया गया था जबकि घटनाएँ A और B स्वतंत्र थीं। अब प्रश्न यह उठता है कि क्या वही नियम उस अवस्था में भी लागू होगा जब घटनाएँ A और B पराश्रित हों?

जब दो घटनाएँ A और B पराश्रित हों तो एक के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर पड़ता है और *सप्रतिबंध प्रायिकता* का विचार उत्पन्न होता है। इस अध्याय में हम सप्रतिबंध प्रायिकता और उस पर आधारित बेज़-प्रमेय (Bayes' Theorem) का अध्ययन करेंगे।

'यादृच्छिक चर' तथा यादृच्छिक चर के प्रायिकता बंटन का अध्ययन हम पहले कर चुके हैं। इस अध्याय में हम यादृच्छिक चर के माध्य एवं उसके प्रसरण, द्विपद बंटन (Binomial distribution) एवं प्वासों बंटन (Poission distribution) तथा इनके अनुप्रयोगों का भी अध्ययन करेंगे।

19.2 सप्रतिबंध प्रायिकता (Conditional Probability)

कल्पना कीजिए कि हमारे पास ताश के 52 पत्तों की भली-भाँति फेटी हुई एक गड्डी है। घटना A की प्रायिकता, जहाँ घटना A 'सबसे ऊपर के पत्ते का इक्का होना' है

$$P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

से प्रदत्त है। अब मान लीजिए कि हमें किसी प्रकार यह ज्ञात हो जाता है कि सबसे नीचे का पत्ता पान का इक्का है। अब सबसे ऊपर के पत्ते के इक्का होने की प्रायिकता क्या होगी? हम देखते हैं कि अब कुल 51 पत्ते बचे हैं (सबसे नीचे के पत्ते को छोड़कर) और उनमें से 3 इक्के हैं। अतः वांछित प्रायिकता कि

सबसे ऊपर का पत्ता इक्का हो, जबकि यह दिया है कि सबसे नीचे का पत्ता पान का इक्का है, $\frac{3}{51}$ है।

मूल प्रायिकता P(A) से भिन्न होने के कारण इस दूसरी प्रायिकता को हम P(A|B) से निरूपित करते हैं और इसे A की सप्रतिबंध प्रायिकता कहते हैं, जबकि यह दिया हुआ है कि घटना B "सबसे नीचे का पत्ता पान का इक्का है" घटित हो चुकी है। अतः $P(A|B) = \frac{3}{51}$

हमने देखा कि P(A) और P(A | B) भिन्न हैं। अब प्रश्न उठता है कि P(A | B) का परिकलन कैसे किया जाए। इसके लिए निम्न उदाहरण पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि हम दो सिक्कों को एक बार उछालते हैं। इसका प्रतिदर्श समष्टि है :

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

मान लीजिए कि घटना A 'दो चित या दो पट्ट आना' है और घटना B 'कम से कम एक चित आना' है। हम घटना A की प्रायिकता जबकि घटना B घटित हो चुकी है अर्थात् P(A | B) का परिकलन कहते हैं अर्थात् 'दो चित या दो पट्ट' आने की प्रायिकता जबकि दिया है कि कम से कम एक चित आ चुका है। हमें ज्ञात है कि घटना B घटित हो चुकी है, अतः संभव परिणामों का समुच्चय निम्न है :

$$B = \{HH, HT, TH\} \qquad \text{(क्यों?)}$$

क्योंकि परिणाम TT संभव नहीं है। क्योंकि ये सभी परिणाम मूल प्रतिदर्श समष्टि S में सम संभाव्य है अतः इनको हम समान प्रायिकता प्रदान करते हैं अर्थात् प्रत्येक को $\frac{1}{3}$, इस प्रकार मूल प्रतिदर्श समष्टि S घटकर B हो गई। B को लघुकृत (घटा हुआ) प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं। उपर्युक्त स्थिति में A के घटित होने की प्रायिकता क्या है? क्योंकि B घटित हो चुका है अतः A के घटित होने की संभावना तभी है जब A एवं B दोनों ही घटित हों अर्थात् $A \cap B$ घटित हो।

अब $\qquad A = \{HH, TT\}$

$$A \cap B = \{HH, TT\} \cap \{HH, HT, TH\} = \{HH\}$$

इसलिए $\qquad P(A \mid B) = \frac{1}{3}$

[ध्यान दीजिए कि यहाँ B को प्रतिदर्श समष्टि लिया गया है जिसके तीन अवयव HH, HT और TH हैं, जिनमें से केवल एक अर्थात् HH घटना A के अनुकूल है।]

आइए अब हम घटनाओं A, B और $A \cap B$ की प्रयिकताएँ, मूल प्रतिदर्श समष्टि S के सापेक्ष परिकलित करें।

$$P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(A \text{ और } B) = \frac{1}{4}$$

हम देखते हैं कि $P(B) . P(A \mid B) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ [चूंकि $P(A \mid B) = \frac{1}{3}$]

और $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

इन दोनों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$P(A \cap B) = P(B). P(A \mid B)$$

या $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \qquad (1)$$

उपर्युक्त परिणामों से इस बात का संकेत मिलता है कि $P(A \mid B)$ के परिकलन हेतु निष्कर्ष (1) के प्रकार का सूत्र होना चाहिए। वास्तव में सूत्र (1) व्यापक रूप से सत्य होता है। तथापि हम इस सूत्र को सिद्ध नहीं करेंगे।

अत: हम देखते हैं कि

एक ही यादृच्छिक प्रयोग से संबंधित दो दी हुई घटनाओं A और B की सप्रतिबंध प्रायिकता $P(A / B)$ अर्थात् घटना A के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता, जबकि ज्ञात है कि घटना B घटित हो चुकी है, निम्नलिखित सूत्र से प्राप्त होती है।

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, P(B) \neq 0 \qquad (2)$$

इसी प्रकार $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, P(A) \neq 0 \qquad (3)$$

टिप्पणी

1. जब कभी हम $P(A \mid B)$ परिकलित करते हैं, हम आवश्यक रूप से, $P(A)$ का परिकलन, मूल प्रतिदर्श समष्टि S के स्थान पर, घटे हुए प्रतिदर्श समष्टि B के सापेक्ष करते हैं।
2. सूत्र (2) में हम यह मानते हैं कि $P(B) \neq 0$। क्योंकि यदि $P(B) = 0$ हो, तो दाएँ पक्ष के व्यंजक का

कोई अर्थ नहीं रह जाता है। इसके अतिरिक्त यदि $P(B) = 0$, तो B एक असंभव घटना होगी और यह मानना कि घटना B घटित हो चुकी है, अर्थहीन हो जाता है।

इसी प्रकार सूत्र (3) में $P(A)$ शून्य नहीं हो सकता है।

3. यदि सूत्र (2) में $B = S$ हो, तब

$$P(A \mid B) = P(A \mid S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = P(A), \text{ क्योंकि } P(S) = 1$$

4. यदि सूत्र (2) में $A = B$ हो, तब

$$P(B \mid B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1, \text{ क्योंकि } B \cap B = B$$

इसी प्रकार सूत्र (3) से

$$P(A \mid A) = \frac{P(A)}{P(A)} = 1, \text{ क्योंकि } A \cap A = A$$

5. सूत्र (2) तथा (3) को निम्न प्रकार भी लिख सकते हैं

$$P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B) \quad (4)$$

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A) \quad (5)$$

सूत्र (4) तथा (5) को, किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाओं A और B की *प्रायिकताओं का गुणन नियम* कहते हैं।

6. याद कीजिए कि दो घटनाएँ A और B स्वतंत्र कहलाती हैं, यदि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटना की प्रायिकता पर नहीं पड़ता है। अत: यदि घटनाएँ A और B स्वतंत्र हों, तो

$$P(A \mid B) = P(A), \quad P(B \mid A) = P(B) \quad (6)$$

अत: इस दशा में उपर्युक्त सूत्र (4) और (5) निम्न रूप ले लेते हैं :

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

जिसे स्वतंत्र घटनाओं के लिए प्रायिकता का गुणन नियम कहते हैं।

7. पूर्व चर्चित सप्रतिबंध प्रायिकता में हमने मान लिया है कि प्रयोग की मौलिक घटनाएँ सम संभाव्य हैं और तदनुसार प्रायिकता की परिभाषा का प्रयोग किया गया है। तथापि, सप्रतिबंध प्रायिकता की यही परिभाषा, व्यापक रूप से, उस स्थिति में भी प्रयोग की जा सकती है, जब मौलिक घटनाएँ सम संभाव्य न हों और प्रायिकताओं $P(A \cap B)$ और $P(B)$ या $P(A)$ का परिकलन तदनुसार किया जा सकता है।

उदाहरण 1 यदि $P(A) = \frac{7}{13}$, $P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A \mid B)$ का मान निकालिए।

हल $$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ और } B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$$

उदाहरण 2 पासों का एक जोड़ा फेंका गया है। $P(A \mid B)$ ज्ञात कीजिए यदि

A : 'कम से कम एक पासे पर संख्या 2 प्राप्त है'

B : 'दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 6 है'

हल हमें प्राप्त होता है कि

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$
$$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$
$$A \cap B = \{(2,4), (4,2)\},$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36}$$

$$P(B) = \frac{5}{36}$$

अतः $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 3 एक बक्से में से, जिसमें संगमरमर के 3 काले और 4 सफेद टुकड़े हैं, दो टुकड़े, एक के बाद एक निकाले जाते हैं। यदि पहला टुकड़ा दूसरे टुकड़े के निकालने से पहले वापस नहीं रखा जाता है तो दोनों टुकडों के काले होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल माना कि B_1 पहले काले टुकड़े के निकालने की घटना है।

तब $P(B_1) = \frac{3}{7}$ [क्योंकि टुकड़ों की कुल संख्या = 3 + 4 = 7]

माना कि B_2, दूसरे टुकड़े के काले होने की घटना है।

तब $P(B_2 \mid B_1)$ = घटना B_2 की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि ज्ञात हो कि घटना B_1 घटित हो चुकी है

$$= \frac{2}{6} \text{ [क्यों?]}$$

अतः, प्रायिकता के गुणन नियम द्वारा,

$$P(B_1 \text{ और } B_2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)\, P(B_2 \mid B_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$$

उदाहरण 4 ताश के 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी हुई एक गड्डी से एक पत्ता निकालने के बाद एक दूसरा पत्ता निकाला जाता है। यदि दूसरे पत्ते के निकालने से पहले पहला पत्ता वापस नहीं रखा जाता हो, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहला पत्ता हुकुम का और दूसरा पत्ता चिड़ी का हो।

हल स्पष्ट है कि

$$P(\text{पहला पत्ता हुकुम (spade) का हो}) = P(S) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

पहले पत्ते के हुकुम होने की घटना के घटित होने के बाद गड्डी में 51 पत्ते रह जाएँगे, जिनमें से 13 पत्ते चिड़ी (C) के होंगे।

$$\therefore \quad P(C \mid S) = \frac{13}{51}$$

अतः

$$P(S \text{ एवं } C) = P(S).\, P(C \mid S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{204}$$

उदाहरण 5 यह ज्ञात है कि दो पासों को फेंकने से उन पर प्राप्त संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं। दोनों संख्याओं के योग 4 होने की घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल माना कि A दोनों पासों पर भिन्न-भिन्न संख्याएँ प्राप्त होने की घटना है तथा B दोनों संख्याओं के योग 4 होने की घटना है।

अतः $$P(A) = \frac{30}{36} \quad \text{(क्यों?)}$$

$$P(B \cap A) = \frac{2}{36}$$ [क्योंकि (3,1) और (1,3) ही ऐसे दो परिणाम हैं जिनमें संख्याएँ भिन्न-भिन्न हैं और उनका योग 4 है]

इसलिए $$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{30}{36}} = \frac{1}{15}$$

प्रश्नावली 19.1

1. यदि $P(B) = 0.5$ और $P(A \cap B) = 0.32$ हो, तो $P(A \mid B)$ का परिकलन कीजिए।
2. यदि $P(A) = 0.8, P(B) = 0.5$ और $P(B \mid A) = 0.4$ हो, तो ज्ञात कीजिए :

   (i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A \mid B)$ (iii) $P(A \cup B)$
3. $P(A \mid B)$ का मान निकालिए जबकि $P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{5}$ और $P(A \cup B) = \frac{3}{5}$
4. यदि $2\,P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ तथा $P(A \mid B) = \frac{2}{5}$ हो, तो $P(A \cup B)$ का मान निकालिए।
5. यदि $P(A) = \frac{6}{11}, P(B) = \frac{5}{11}$ और $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$ हो, तो

   (i) $P(A \cap B)$, (ii) $P(A \mid B)$, (iii) $P(B \mid A)$

   का मान ज्ञात कीजिए।
6. दिया है कि $P(A) = \frac{7}{13}, P(B) = \frac{9}{13}$ और $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$, तो $P(A' \mid B)$ का मान ज्ञात कीजिए।
7. पासों का एक जोड़ा एक बार फेंका जाता है। यदि 'दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग ≥ 10' घटना E हो और घटना F 'प्रथम पासे पर प्राप्त संख्या 5 हो', तो $P(E \mid F)$ का मान ज्ञात कीजिए।
8. यदि प्रश्न 7 में 'कम से कम एक पासे पर प्राप्त संख्या 5 होना' घटना F हो, तो $P(E \mid F)$ का मान ज्ञात कीजिए।
9. पासों का एक जोड़ा एक बार फेंका जाता है। यदि पासों पर प्राप्त संख्याएँ असमान हों, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि

(i) प्राप्त संख्याओं का योग = 6

(ii) प्राप्त संख्याओं का योग ≤ 4

10. एक सिक्के को उछाला जाता है और फिर एक पासे को फेंका जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर प्राप्त होने वाली संख्या 6 हो जबकि दिया है कि सिक्के पर चित आता है।

11. दो पासे फेंके जाते हैं और यह ज्ञात है कि पहले पासे पर प्राप्त संख्या 6 है। दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं के योग 7 होने की घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

12. ताश के 52 पत्तों की भली-भाँति फेंटी गड्डी से एक पत्ता निकालने के बाद एक दूसरा पत्ता निकाला जाता है। यदि दूसरे पत्ते को निकालने से पूर्व पहले पत्ते को वापस नहीं रखा जाता है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहला पत्ता पान का और दूसरा पत्ता ईंट का हो।

13. दो सिक्के उछाले जाते हैं। यदि यह ज्ञात हो, कि कम से कम एक सिक्के पर चित आता है, तो दोनों सिक्कों पर चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

14. एक थैले में 3 हरी और 7 सफेद गेंदे हैं। दो गेंदे, यादृच्छया बिना प्रतिस्थापना के, चुनी (निकाली) जाती हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बाद में निकाली गई गेंद हरे रंग की है, तो पहले निकाली गई गेंद के भी हरे रंग की होने की क्या प्रायिकता है?

15 एक दंपत्ति के दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. प्रश्न 15 में यदि यह ज्ञात हो कि बड़ा बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. मान लीजिए कि हमारे पास 20 फ्यूज तारों वाला एक फ्यूज बाक्स है, जिनमें से 5 फ्यूज तार खराब है। बाक्स में से 2 फ्यूज तारें क्रमशः एक के बाद दूसरी यादृच्छया बिना पहली तार को वापस रखे निकाली जाती है, तो दोनों तारों के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

18. एक विद्यार्थी, जिसे एक कक्षा से यादृच्छया चुना गया है, गणित में उत्तीर्ण होगा इसकी प्रायिकता $\frac{4}{5}$ है और इस विद्यार्थी के गणित और कंप्यूटर विज्ञान दोनों में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है। यदि यह ज्ञात हो कि वह गणित में उत्तीर्ण है, तो उसके कंप्यूटर विज्ञान में भी उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या होगी?

19. किसी मनुष्य द्वारा एक कमीज खरीदने की प्रायिकता 0.2 है, उसके द्वारा एक पतलून खरीदने की प्रायिकता 0.3 है और उसके द्वारा एक कमीज खरीदने की प्रायिकता, जबकि यह ज्ञात हो कि उसने एक पतलून खरीद ली है, 0.4 है। उसके द्वारा एक कमीज और एक पतलून दोनों को खरीदने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए। उसके द्वारा एक पतलून खरीदने की प्रायिकता भी ज्ञात कीजिए जबकि यह ज्ञात है कि उसने एक कमीज खरीद रखी है।

20. एक थैले में 4 लाल गेंदे और 3 नीली गेंदे हैं और एक दूसरे थैले में 3 लाल और 5 नीली गेंदे हैं। पहले थैले में से एक गेंद यादृच्छया निकाली जाती है और उसे बिना देखे हुए दूसरे थैले में रख दिया जाता है। अब दूसरे थैले से निकाली गई कोई गेंद नीले रंग की हो इसकी प्रायिकता क्या है?

19.3 बेज़-प्रमेय (Bayes' Theorem)

पिछले अनुच्छेद में, हम नीचे दिए दो महत्त्वपूर्ण परिणामों का अध्ययन कर चुके हैं :

$$P(A \text{ और } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A),\ P(A) \neq 0 \qquad (1)$$

$$= P(B) \cdot P(A \mid B),\ P(B) \neq 0, \qquad (2)$$

जहाँ A और B किसी एक प्रतिदर्श समष्टि की कोई दो घटनाएँ हैं। ऐसी अनेक स्थितियाँ आती है जहाँ किसी परीक्षण का परिणाम इस बात पर निर्भर करता है कि अनेक मध्यवर्ती चरणों में क्या घटित हुआ। निम्न उदाहरण ऐसा है जिसके अंतर्गत एक मध्यवर्ती चरण के दो विकल्प हैं।

उदाहरण 6 किसी मनुष्य ने एक निर्माण कार्य का ठेका लिया है। हड़ताल होने की प्रायिकता 0.65 है। हड़ताल न होने की तथा हड़ताल होने की स्थितियों में निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.80 तथा 0.32 हैं। निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल मान लीजिए कि 'निर्माण कार्य के समयानुसार पूर्ण होने' की घटना को A और 'हड़ताल होने' की घटना को B द्वारा निरूपित किया जाता है। हमें P(A) ज्ञात करना है।

हमें ज्ञात है कि

$$P(B) = 0.65,\ P(\text{हड़ताल नहीं}) = P(B') = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35$$

$$P(A \mid B) = 0.32, \quad P(A \mid B') = 0.80$$

चूँकि $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

इसलिए $P(A) = P[(A \cap B) \cup (A \cap B')] = P(A \cap B \text{ या } A \cap B')$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap B')$$

[क्योंकि $(A \cap B)$ और $(A \cap B')$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं]

$$= P(B).\ P(A \mid B) + P(B')\ P(A \mid B') \qquad \text{[उपर्युक्त (2) से]}$$

$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.49 \text{ (लगभग)}$$

अतः निर्माण कार्य समयानुसार पूर्ण होने की प्रायिकता 0.49 है।

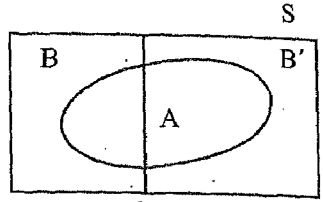
उपर्युक्त उदाहरण से हमें ज्ञात होता है कि यदि घटनाएँ B और B′ अपवर्जी घटनाएँ हैं तथा

$B \cup B' = S$ (आकृति 19.1)

$P(B) \neq 0, P(B') \neq 0$

तब S में किसी घटना A के लिए जो B या B' के साथ घटित होती है,

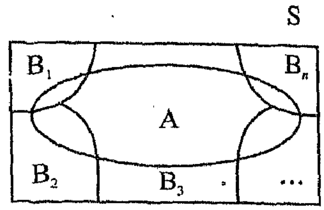
$$P(A) = P(B)\, P(A \mid B) + P(B')\, P(A \mid B')$$



आकृति 19.1

यह *संपूर्ण प्रायिकता के नियम* की एक विशेष स्थिति है। इसको और अधिक विस्तरित किया जा सकता है और इस प्रकार हमें नीचे दिया हुआ *संपूर्ण प्रायिकता का नियम* प्राप्त होता है :

यदि $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *किसी प्रतिदर्श समष्टि S की परस्पर अपवर्जी और नि:शेष (परिपूर्ण) घटनाएँ हों और A समष्टि S की एक ऐसी घटना हो जो घटनाओं* B_1 *या* $B_2, \ldots,$ *या* B_n, *के साथ घटित होती है* (आकृति 19.2 देखिए), तब



आकृति 19.2

$$P(A) = P(B_1)\, P(A \mid B_1) + P(B_2)\, P(A \mid B_2) + \ldots + P(B_n)\, P(A \mid B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)\, P(A \mid B_i) \qquad (3)$$

प्रायिकता के प्रश्नों को हल करने में यह नियम अपने आप में उपयोगी हैं तथापि हम इस नियम का प्रयोग अंग्रेज गणितज्ञ थॉमस बेज़ (Thomas Bayes) (1702 - 1761) के नाम पर विख्यात *बेज़-प्रमेय (Bayes' Theorem)* या *बेज-सूत्र (Bayes' formula)* के निकालने में करेंगे।

बेज़ का प्रमेय *यदि* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *परस्पर अपवर्जी और नि:शेष (परिपूर्ण) घटनाएँ हैं और A कोई ऐसी घटना है, जो* B_1 *या* $B_2, \ldots$ *या* B_n, *के साथ घटित होती है, तो*

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

उपपत्ति हमें ज्ञात है कि $P(A \cap B_i) = P(A).\, P(B_i \mid A), \; i = 1, 2, \ldots, n$ (4)

इससे प्राप्त होता है कि

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(B_i)\ P(A|B_i)}{P(A)} \qquad [(2) \text{ द्वारा }]$$

$$= \frac{P(B_i)\ P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A|B_i)}, i = 1, 2, \ldots, n \qquad [(3) \text{ द्वारा }]$$

टिप्पणी

1. प्रायिकताएँ $P(B_i), i = 1, 2, \ldots, n$, जिनका ज्ञान परीक्षण संपन्न होने के पहले से ही था, पूर्ववर्ती (पूर्वकालीन) प्रायिकताएँ कहलाती हैं और सप्रतिबंध प्रायिकताएँ $P(B_i | A)$, जिनका परिकलन परीक्षण संपन्न होने के बाद किया जाता है, परवर्ती (उत्तरकालीन) प्रायिकताएँ कहलाती हैं। कुछ लोग इनको केवल पूर्व प्रायिकताएँ और उत्तर प्रायिकताएँ भी कहते हैं। घटनाएँ $B_1, B_2, \ldots, B_n$ प्रायः परिकल्पनाएँ कहलाती हैं।

2. बेज़-प्रमेय में, $P(B_i)$, घटनाओं $B_i, i = 1, 2, \ldots, n$ के घटित होने की प्रायिकताएँ हैं। परीक्षण किया जाता है और यह ज्ञात होता है कि घटना A घटित हो चुकी है। इस अतिरिक्त सूचना के आधार पर प्रायिकताओं $P(B_i)$ को प्रायिकताओं $P(B_i | A)$ में परिवर्तित किया जाता है। हम $P(B_i | A)$ का परिकलन बेज़-प्रमेय की सहायता से कर सकते हैं यदि प्रायिकताएँ $P(B_i)$ और $P(A | B_i)$ सभी ज्ञात हों। यह बेज़-प्रमेय के महत्त्व की विशिष्टता को उजागर करता है।

उदाहरण 7 दो थैले I और II दिए हैं। थैले I में 2 सफेद और 3 लाल गेंदे हैं और थैले II में 4 सफेद और 5 लाल रंग की गेंदे हैं। किसी एक थैले में एक गेंद यादृच्छया निकाली गई है जो कि लाल रंग की है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले II से निकाली गई है।

हल 'निकाली गई गेंद लाल रंग की है' को घटना A मान लीजिए। मान लीजिए कि B_1 और B_2 क्रमशः घटनाओं 'गेंद थैले I से निकाली गई है और 'गेंद थैले II से निकाली गई है' को व्यक्त करते हैं।

अतः $\quad P(B_1) = \frac{1}{2}$ और $P(B_2) = \frac{1}{2}$

$P(A | B_1)$ = थैले I से निकाली गई गेंद के लाल रंग की होने की प्रायिकता

$$= \frac{3}{5}$$

$P(A | B_2)$ = थैले II से निकाली गई गेंद के लाल रंग की होने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{9}$$

इसलिए, बेज़-प्रमेय द्वारा

$P(B_2 | A)$ = निकाली गई लाल रंग की गेंद के थैले II से होने की प्रायिकता

$$= \frac{P(B_2)\ P(A|B_2)}{P(B_1)\ P(A|B_1) + P(B_2)\ P(A|B_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{9}} = \frac{5}{18}\times\frac{90}{52} = \frac{25}{52}$$

अतः थैली II से लाल रंग की गेंद के निकाले जाने की प्रायिकता $\frac{25}{52}$ है।

उदाहरण 8 एक बोल्ट बनाने के कारखाने में मशीनें (यंत्र) A, B और C कुल उत्पादन का क्रमशः 25%, 35% और 40% बोल्ट बनाती हैं। इन मशीनों के उत्पादन का क्रमशः 5, 4 और 2 प्रतिशत भाग खराब (त्रुटिपूर्ण) है। बोल्टों के कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यदृच्छया निकाला जाता है और वह खराब पाया जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि यह बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया हो?

हल मान लिया कि घटनाएँ B_1, B_2 और B_3 निम्न प्रकार हैं :

B_1 : बोल्ट मशीन A द्वारा बनाया गया है

B_2 : बोल्ट मशीन B द्वारा बनाया गया है

B_3 : बोल्ट मशीन C द्वारा बनाया गया है

स्पष्ट है कि घटनाएँ B_1, B_2 और B_3 परस्पर अपवर्जी और परिपूर्ण हैं। मान लिया कि घटना E निम्न प्रकार है :

E : बोल्ट खराब है

घटना E, घटनाओं B_1 या B_2 या B_3 के साथ घटित होती है। दिया है :

$P(B_1) = 25\% = 0.25$, $P(B_2) = 0.35$ और $P(B_3) = 0.40$

पुनः $P(E | B_1)$ = बोल्ट के खराब होने की प्रायिकता जबकि दिया हो कि वह मशीन B द्वारा निर्मित है

$= 5\% = 0.05$

इसी प्रकार $P(E | B_2) = 0.04$ और $P(E | B_3) = 0.02$

बेज़-प्रमेय द्वारा हमें ज्ञात है कि

$$P(B_2 \mid E) = \frac{P(B_2)\, P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1)+P(B_2)P(E|B_2)+P(B_3)P(E|B_3)}$$

$$= \frac{0.35\times 0.04}{0.25\times 0.05+0.35\times 0.04+0.40\times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

उदाहरण 9 तीन पात्रों में रखी वस्तुएँ निम्न प्रकार हैं :

पात्र I : 1 सफेद, 2 काली और 3 लाल गेंदे

पात्र II : 2 सफेद, 1 काली और 1 लाल गेंदे

पात्र III : 4 सफेद, 5 काली और 3 लाल गेंदे

एक पात्र यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से दो गेंदे निकाली जाती है। ये गेंदे सफेद और लाल हैं। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि ये गेंदे पात्र I से निकाली गई हैं?

हल मान लीजिए कि घटना E निम्न प्रकार है,

E : निकाली गई दो गेंदे सफेद और लाल हैं

मान लीजिए कि U_1, U_2 और U_3 क्रमशः घटनाओं गेंद 'पात्र I से निकाली गई है', 'पात्र II से निकाली गई है', 'पात्र III से निकाली गई है' को व्यक्त करते हैं।

$$P(U_1) = \frac{1}{3},\ P(U_2) = \frac{1}{3},\ \text{और } P(U_3) = \frac{1}{3}$$

इसके अतिरिक्त, $P(E \mid U_1)$ = एक सफेद और एक लाल गेंद की पात्र I से निकाले जाने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^1C_1 \times {}^3C_1}{{}^6C_2} = \frac{1\times 3}{15} = \frac{1}{5}$$

$P(E \mid U_2)$ = एक सफेद और एक लाल गेंद की पात्र II से निकाले जाने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^2C_1 \times {}^1C_1}{{}^4C_2} = \frac{2\times 1}{6} = \frac{1}{3}$$

$P(E \mid U_3)$ = एक सफेद और एक लाल गेदों की पात्र III से निकाले जाने की प्रायिकता

$$= \frac{{}^4C_1 \times {}^3C_1}{{}^{12}C_2}$$

$$= \frac{4 \times 3}{66} = \frac{2}{11}$$

अतः बेज़-प्रमेय द्वारा

$$P(U_1 \mid E) = \frac{P(U_1)\,P(E|U_1)}{P(U_1)\,P(E|U_1) + P(U_2)\,P(E|U_2) + P(U_3)\,P(E|U_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{11}} = \frac{1}{15} \times \frac{495}{118} = \frac{33}{118}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{33}{118}$ है।

उदाहरण 10 एक कार बनाने के कारखाने (फैक्ट्री) में दो संयंत्र X तथा Y हैं। संयंत्र X, 70 % और संयंत्र Y, 30 % कारों का निर्माण करते हैं। संयंत्र X के 80 % कारों को मानक गुणता (गुणवत्ता) वाला माना गया है और संयंत्र Y के 90 % कारों को मानक गुणता वाला माना गया है। एक कार को यादृच्छया चुना जाता है और ये पाया जाता है कि वह मानक गुणता वाली है। इस कार के संयंत्र X से लिए जाने की प्रायिकता क्या है?

हल 'कार मानक गुणता वाली है' को घटना E मान लीजिए। मान लीजिए कि B_1 और B_2 क्रमशः घटनाएँ 'कार संयंत्र X में निर्मित हुई' और 'कार संयंत्र Y में निर्मित हुई' को व्यक्त करते हैं। तब

$P(B_1)$ = 'कार संयंत्र X में निर्मित हुई' की प्रायिकता $= \frac{70}{100} = 0.7$

$P(B_2)$ = 'कार संयंत्र Y में निर्मित हुई' की प्रायिकता $= \frac{30}{100} = 0.3$

$P(E \mid B_1)$ = मानक गुणता वाली कार के संयंत्र X में निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{80}{100} = 0.8$$

$P(E \mid B_2)$ = मानक गुणता वाली कार के संयंत्र Y में निर्मित होने की प्रायिकता

$$= \frac{90}{100} = 0.9$$

अतः $P(B_1 \mid E)$ = मानक गुणता वाली कार के संयंत्र X से लिए जाने की प्रायिकता

$$= \frac{P(B_1) \times P(E|B_1)}{P(B_1) \times P(E|B_1) + P(B_2) \times P(E|B_2)}$$

$$= \frac{0.7 \times 0.8}{0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.9} = \frac{0.56}{0.83} = \frac{56}{83}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{56}{83}$ है।

एक डॉक्टर को एक रोगी को देखने आना है। पहले के अनुभवों से यह ज्ञात है कि उसके ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$ या $\frac{2}{5}$ हैं। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$ या $\frac{1}{12}$ हैं, परंतु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया, तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए कि 'डॉक्टर के रोगी के यहाँ देर से आने' की घटना E है। यदि डॉक्टर के ट्रेन, बस, स्कूटर या किसी अन्य वाहन द्वारा आने की घटनाएँ क्रमशः T_1, T_2, T_3 और T_4 हों, तब

$$P(T_1) = \frac{3}{10}, P(T_2) = \frac{1}{5}, P(T_3) = \frac{1}{10} \text{ और } P(T_4) = \frac{2}{5} \qquad \text{(दिया है)}$$

$P(E \mid T_1)$ = डॉक्टर के ट्रेन द्वारा आने पर देर से पहुँचने की प्रायिकता $= \frac{1}{4}$

इसी प्रकार,

$P(E|T_2) = \frac{1}{3}$, $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$, $P(E|T_4) = 0$, (चूँकि अन्य वाहन द्वारा आने पर उसे देर नहीं होती)

अतः बेज़-प्रमेय द्वारा

$P(T_1|E)$ = डॉक्टर द्वारा देर से आने पर ट्रेन द्वारा आने की प्रायिकता

$$= \frac{P(T_1)\ P(E|T_1)}{P(T_1)\,P(E|T_1) + P(T_2)\ P(E|T_2) + P(T_3)P(E|T_3) + P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{12} + \frac{2}{5} \times 0}$$

$$= \frac{3}{40} \times \frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

उदाहरण 12 एक व्यक्ति के बारे में ज्ञात है कि वह 4 में से 3 बार सत्य बोलता है। वह एक पासे को फेंकता है और बतलाता है कि उस पर आने वाली संख्या 6 है। इस की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है।

हल मान लीजिए कि E, 'व्यक्ति द्वारा पासे को फेंक कर यह बताने की कि उस पर आने वाली संख्या 6 है' की घटना है। मान लीजिए कि S_1, पासे पर संख्या 6 आने की घटना और S_2, पासे पर संख्या 6 के नहीं आने की घटना हैं।

$\therefore$ $P(S_1)$ = संख्या 6 आने की घटना की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

$P(S_2)$ = संख्या 6 नहीं आने की घटना की प्रायिकता = $\frac{5}{6}$

$P(E\,|\,S_1)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य बोलने की प्रायिकता = $\frac{3}{4}$

$P(E\,|\,S_2)$ = व्यक्ति द्वारा यह बताने की कि पासे पर संख्या 6 आई है जबकि पासे पर आने वाली संख्या वास्तव में 6 नहीं है, की प्रायिकता

= व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता = $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

अतः बेज़-प्रमेय द्वारा

$$P(S_1 \mid E) = \frac{P(S_1)P(E|S_1)}{P(S_1)P(E|S_1) + P(S_2)P(E|S_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{6} \times \frac{3}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{4}} = \frac{1}{8} \times \frac{24}{8} = \frac{3}{8}$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $\frac{3}{8}$ है।

प्रश्नावली 13.3

तीन पात्रों में काले और सफेद गेंदों का संग्रह निम्न प्रकार है।

पात्र I : 7 सफेद और 3 काली गेंदे

पात्र II : 4 सफेद और 6 काली गेंदे

पात्र III : 2 सफेद और 8 काली गेंदे

इन पात्रों में से एक पात्र को यादृच्छया चुना जाता है, जिसकी प्रायिकताएँ क्रमशः 0.2, 0.6 और 0.2 हैं। चुने गए पात्र में से बिना वापस रखे दो गेंदों को यादृच्छया निकाला जाता है। निकाले गए दोनों गेंद सफेद पाए जाते हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंदो को पात्र III से निकाला गया था।

तीन पात्रों में क्रमशः 2 सफेद और 3 काले गेंद; 3 सफेद और 2 काले गेंद और 4 सफेद और 1 काली गेंद हैं। पात्रों के चयन की प्रायिकता समान है। चुने गए पात्र में से एक गेंद यादृच्छया निकाली गई और वह गेंद सफेद पाई जाती है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद द्वितीय पात्र से निकाली गई थी।

तीन पात्रों में क्रमशः 6 लाल, 4 काली; 4 लाल, 6 काली और 5 लाल, 5 काली गेंदे हैं। एक पात्र यादृच्छया चुना जाता है और उससे एक गेंद निकाली जाती है। यदि निकाली गई गेंद लाल रंग की है, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि गेंद पहले पात्र से निकाली गई है।

एक बीमा कंपनी 2000 स्कूटर चालकों का, 4000 कार चालकों का और 6000 ट्रक चालकों का बीमा करती है। दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.01, 0.03 और 0.15 है। बीमाकृत व्यक्तियों (चालकों) में से एक दुर्घटनाग्रस्त हो जाता है। उस व्यक्ति के स्कूटर चालक होने की प्रायिकता क्या है?

छाती के एक्स-रे की जाँच द्वारा, एक व्यक्ति में क्षय रोग के पाए जाने की प्रायिकता, जबकि वह व्यक्ति वास्तव में इस रोग से ग्रसित है, 0.99 है। त्रुटिपूर्ण रोग निदान की प्रायिकता 0.001 है। किसी नगर में 1000 व्यक्तियों में 1 व्यक्ति क्षय रोग से ग्रसित है। एक व्यक्ति यादृच्छया चुना जाता है और निदान से पता लगता

है कि उसे क्षय रोग है। इस बात की क्या प्रायिकता है कि वह व्यक्ति वास्तव में क्षय रोग से ग्रसित है?

[संकेत 'डॉक्टर का अनुमान सही है' को घटना E, 'चुना गया व्यक्ति क्षय रोग से ग्रसित है' को घटना T_1 और 'चुना गया व्यक्ति क्षय रोग से ग्रसित नहीं है' को घटना T_2 मान लीजिए। तब $P(T_1) = 0.001, P(T_2) = 0.999, P(E|T_1) = 0.99, P(E|T_2) = 0.001$. $P(T_1|E)$ ज्ञात कीजिए।]

6. एक कारखाने में A और B दो मशीनें लगी हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60 % मशीन A और 40 % मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2 % और मशीन B का 1 % उत्पादन खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई एक वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A से बने होने की प्रायिकता क्या होगी?

7. किसी परीक्षा में एक परीक्षार्थी एक चार विकल्प वाले बहु–विकल्पीय (Multiple-choice) प्रश्न का उत्तर या तो अनुमान से होता है या वह उत्तर नकल कर के देता है या उसे सही उत्तर ज्ञात है। अनुमान लगाने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ है और नकल करने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है। उसके उत्तर के सही होने की प्रायिकता जबकि दिया हो कि उसने नकल किया है $\frac{1}{8}$ है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उसे प्रश्न का उत्तर ज्ञात था जबकि यह दिया है कि उसका उत्तर सही है।

8. दो दल एक निगत के निदेशक मंडल में स्थान पाने की प्रतिस्पर्धा में हैं। पहले तथा दूसरे दल के जीतने की प्रायिकताएँ क्रमशः 0.6 तथा 0.4 हैं। इसके अतिरिक्त यदि पहला दल जीतता है तो एक नए उत्पादन के प्रारंभ होने की प्रायिकता 0.7 है और यदि दूसरा दल जीतता है तो इस बात की संगत प्रायिकता 0.3 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि नया उत्पादन दूसरे दल द्वारा प्रारंभ किया गया था।

9. एक बोल्ट बनाने वाले कारखाने में मशीनें A, B और C कुल बोल्ट्स का क्रमशः 25 %, 35 % और 40 %, उत्पादन करते हैं। मशीनों के उत्पादन के क्रमशः 5 %, 4 % और 2 % बोल्ट्स त्रुटिपूर्ण (खराब) हैं। कुल उत्पादन में से एक बोल्ट यादृच्छया निकाला जाता है। यदि निकाला गया बोल्ट त्रुटिपूर्ण हो, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि उस बोल्ट का उत्पादन मशीन A द्वारा हुआ हो? इसकी क्या प्रायिकता है कि बोल्ट का उत्पादन मशीन C द्वारा हुआ हो?

10. उदाहरण 9 में यदि सब दी हुई घटनाएँ यथावत रहें तो इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंदे पात्र II से निकाली गई हैं? इसकी प्रायिकता क्या होगी कि गेंदे पात्र III से निकाली गई हैं?

11. मान लीजिए कि कोई लड़की एक पासा फेंकती है। यदि उसे 5 या 6 की संख्या प्राप्त होती है तो वह एक सिक्के को तीन बार उछालती है और 'चितों' की संख्या नोट करती है। यदि उसे 1, 2, 3 या 4 की संख्या प्राप्त होती है, तो वह एक सिक्के को एक बार उछालती है और यह नोट करती है कि उस पर 'चित' या 'पट' प्राप्त हुआ। यदि उसे ठीक एक 'चित' प्राप्त होता है, तो उसके द्वारा फेंके गए पासे पर 1, 2, 3 या 4 प्राप्त होने की प्रायिकता क्या है?

12. मान लीजिए कि हमारे पास चार बक्से A, B, C और D हैं जिनमें रंगीन संगमरमर के रखे टुकड़ों का विवरण निम्न प्रकार है :

बॉक्स	संगमरमर का रंग		
	लाल	सफेद	काला
A	1	6	3
B	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

एक बॉक्स यादृच्छया चुना जाता है और उसमें से एक संगमरमर का टुकड़ा यादृच्छया निकाला जाता है। यदि निकाला गया टुकड़ा लाल है तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उसे बॉक्स A से निकाला गया है? टुकड़े के बॉक्स B से निकाले जाने की प्रायिकता क्या है? टुकड़े के बॉक्स C से निकाले जाने की प्रायिकता क्या है?

13. किसी निर्माता के कारखाने में A, B और C तीन यंत्र चालक हैं। पहला चालक A, 1% वस्तुएँ खराब बनाता है, जबकि अन्य दो चालक B और C क्रमशः 5% और 7% वस्तुएँ खराब बनाते हैं। A,B और C कुल निर्माण काल का क्रमशः 50%, 30%, और 20% समयावधि तक कार्य करते हैं। एक खराब वस्तु का उत्पादन होता है इसकी क्या प्रायिकता है कि यह वस्तु A द्वारा बनाई गई है?

14. किसी वस्तु का निर्माण A, B और C तीन मशीनों द्वारा होता है। किसी निश्चित समयावधि में कुल निर्मित वस्तुओं का 50% A द्वारा, 30% B द्वारा और 20% C द्वारा होता है। मशीन A द्वारा निर्मित 2%, मशीन B द्वारा निर्मित 2% और मशीन C द्वारा निर्मित 3% वस्तुएँ खराब हैं। कुल निर्मित वस्तुओं का एक ढेर बना लिया जाता है। इस ढेर से एक वस्तु यादृच्छया निकाली जाती है, जो कि खराब पाई जाती है। इस वस्तु के मशीन A द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता क्या है?

15. प्रश्न संख्या 14 देखें। खराब वस्तु के मशीन B द्वारा निर्मित होने की प्रायिकता क्या है?

19.4 यादृच्छिक चर और प्रायिकता बंटन (Random Variables and Probability Distributions)

हम अध्याय 3, में असंतत यादृच्छिक चर (discrete random variable) और उनके प्रायिकता बंटन के विषय में परिचर्चा कर चुके हैं। स्मरण कीजिए कि एक यादृच्छिक चर मात्र ऐसा चर है जिसका मान एक यादृच्छिक परीक्षण के परिणामों द्वारा निर्धारित होता है।

माना कि एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। तब प्रतिदर्श समष्टि S निम्न होगी :

$$S = \{HH, HT, TH, TT\},$$

जहाँ 'H' चित और 'T' पट को व्यक्त करते हैं।

मान लीजिए कि चित की संख्या को X से दर्शाया जाता है। यदि हमें ज्ञात हो कि परीक्षण का परिणाम HH है तो X का मान 2 होगा। यदि हमें ज्ञात हो कि परीक्षण का परिणाम HT या TH है तो X = 1 और परिणाम TT के लिए X = 0 है। अतः X एक यादृच्छिक चर है जिसके मानों का निर्धारण एक यादृच्छिक

परीक्षण के परिणामों द्वारा होता है। एक यादृच्छिक चर को सामान्यतः अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से व्यक्त करते हैं; जैसे- X, Y, Z आदि और इन यादृच्छिक चरों के मानों को संगत छोटे अक्षरों से व्यक्त करते हैं; जैसे $-x, y, z$ आदि।

यादृच्छिक X तथा P(X) से बनने वाले निकाय को प्रायिकता बंटन कहते हैं।

आइए, हम एक सिक्के को दो बार उछालने वाले परीक्षण में चित की संख्या व्यक्त करने वाले यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात करें। हमें ज्ञात है कि X मानों 0, 1 या 2 को धारण कर सकता है।

$$P(X = 0) = P(\text{एक भी चित नहीं}) = \frac{1}{4},\ P(X = 1) = P(\text{एक चित}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2) = P(\text{दो चित}) = \frac{1}{4}$$

अतः X का प्रायिकता बंटन है :

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ध्यान दीजिए कि $\sum P(X) = 1$

19.4.1 *यादृच्छिक चरों के माध्य और प्रसरण* (*Mean and variance of random variables*) प्रायिकता बंटन और बारंबारता बंटन के बीच बहुत अधिक समानता पाई जाती है। किसी यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन यह बताता है कि कुल प्रायिकता 1 यादृच्छिक चर के विभिन्न मानों पर किस प्रकार बंटित है जबकि बारंबारता बंटन यह बतलाता है कि कुल बारंबारता n विभिन्न वर्गों अर्थात् वर्गों के क्रमशः वर्ग चिह्नों पर किस प्रकार बंटित है। हम पहले माध्य की केंद्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में और प्रसरण की परिक्षेपण (विसर्जन) के माप के रूप में संकल्पना की परिचर्चा कर चुके हैं। इन संकल्पनाओं को प्रायिकता बंटन के लिए भी इसी प्रकार पारिभाषित किया गया है।

यदि कोई यादृच्छिक चर X, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ मानों को अपनाता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$, है, तो इसके माध्य, μ द्वारा प्रदर्शित [या प्रत्याशित मान E(X) द्वारा प्रदर्शित] की परिभाषा इस प्रकार है

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \qquad (1)$$

और प्रसरण, σ^2 द्वारा प्रदर्शित, की परिभाषा इस प्रकार है :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \; p_i \qquad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 \qquad (3)$$

मानक विचलन σ, निम्न प्रकार प्राप्त होता है :

$$\sigma = \sqrt{\text{प्रसरण}}$$

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 13 एक सिक्के को दो बार उछालने पर चितों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल हम देख चुके हैं कि दिए गए परीक्षण में चित की संख्या व्यक्त करने वाले यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्न है :

$X = x_i$	p_i
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

जहाँ $p_i = P(X = x_i)$ । हम $x_i p_i$ के लिए एक स्तंभ की रचना करते हैं, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

x_i	p_i	$x_i p_i$
0	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

इसलिए $$\mu = \sum x_i\, p_i = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} = 1$$

अत: चितों की संख्या का माध्य 1 है।

टिप्पणी उपर्युक्त उदाहरण में माध्य 1 है। इसका अर्थ है कि यदि हम सिक्के को दो बार उछालने के परीक्षण को बहुत बार (व्यापक रूप से) दोहराएँ तो प्रत्येक बार हमें औसतन चित आने की प्रत्याशिता (संभावना) को 1 मानना चाहिए।

उदाहरण 14 यदि एक सिक्के को तीन बार उछालने पर पट आने की संख्या Y हो, तो Y का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल एक सिक्के को तीन बार उछालने पर पट आने की संख्या का प्रायिकता बंटन नीचे दिया है :

y_i	p_i
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

उपर्युक्त सारणी में एक स्तंभ $y_i p_i$ के लिए बढ़ाए तो निम्न सारणी

y_i	p_i	$y_i\, p_i$
0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$

प्राप्त होती है। अब हम माध्य का परिकलन निम्न प्रकार करते हैं :

$$\text{माध्य } \mu = \sum y_i p_i = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

अतः पट की संख्या का माध्य $\frac{3}{2}$ है।

उदाहरण 15 निम्नलिखित प्रायिकता बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

X	– 3	– 1	0	2
P(X)	0.2	0.4	0.3	0.1

हल हम माध्य का परिकलन निम्न प्रकार करते हैं :

x_i	p_i	$x_i\, p_i$
– 3	0.2	– 0.6
– 1	0.4	– 0.4
0	0.3	0
2	0.1	0.2

$$\mu = \sum x_i\, p_i = -0.8$$

अतः दिए गए बंटन का माध्य – 0.8 है।

उदाहरण 16 एक बक्से में किसी वस्तु की 12 इकाइयाँ रखी हैं जिनमें से 3 इकाइयाँ खराब हैं। बाक्स में से 3 इकाइयों का एक नमूना चुना जाता है। मान लिया कि नमूने में खराब इकाइयों की संख्या X द्वारा व्यक्त की जाती है, तो X का माध्य ज्ञात कीजिए।

हल अध्याय 3 (भाग 1) के उदाहरण 35 को देखने से ज्ञात होता है कि X का प्रायिकता बंटन निम्न है :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

हम माध्य का परिकलन अग्रलिखित प्रकार से करते हैं :

x_i	p_i	$x_i\, p_i$
0	$\frac{84}{220}$	0
1	$\frac{108}{220}$	$\frac{108}{220}$
2	$\frac{27}{220}$	$\frac{54}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	$\frac{3}{220}$

अत: $$\text{माध्य} = \mu = \frac{108}{220} + \frac{54}{220} + \frac{3}{220} = \frac{165}{220} = \frac{3}{4}$$

उदाहरण 17 एक सिक्के को दो बार उछालने पर चित आने की संख्या का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

हल ध्यान दीजिए कि माध्य $= \mu = 1$, माध्य के इस मान का परिकलन हम उदाहरण 13 में पहले ही कर चुके हैं। अब हम सूत्र (2) का प्रयोग करके प्रसरण का मान ज्ञात करेंगे :

x_i	p_i	$x_i - \mu$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2\, p_i$
0	$\frac{1}{4}$	$0 - 1$	1	$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$1 - 1$	0	$0 \times \frac{1}{2} = 0$
2	$\frac{1}{4}$	$2 - 1$	1	$1 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

अत: $$\text{प्रसरण} = \sigma^2 = \sum (x_i - \mu)^2\, p_i = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

उदाहरण 18 एक सिक्के को तीन बार उछालने पर पट आने की संख्या का मानक विचलन और प्रसरण ज्ञात कीजिए (उदाहरण 14 को भी देखिए)।

हल हमें ज्ञात है कि $\mu=\frac{3}{2}$, अतः यहाँ हम σ^2 ज्ञात करने के लिए सूत्र (3) का प्रयोग करेंगे,

y_i	p_i	y_i^2	$y_i^2 p_i$
0	$\frac{1}{8}$	0	$0\times\frac{1}{8}=0$
1	$\frac{3}{8}$	1	$1\times\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$	4	$4\times\frac{3}{8}=\frac{12}{8}$
3	$\frac{1}{8}$	9	$9\times\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$

हम देखते हैं कि $\sum y_i^2 p_i=\frac{24}{8}=3$

अतः $$\sigma^2 = \sum y_i^2 p_i-(\mu)^2 = 3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

इस प्रकार मानक विचलन $=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

उदाहरण 19 निम्नलिखित प्रायिकता बंटन के लिए σ^2 और σ का परिकलन कीजिए :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{84}{220}$	$\frac{108}{220}$	$\frac{27}{220}$	$\frac{1}{220}$

हल उदाहरण 16 में हम परिकलन कर चुके हैं कि $\mu=\frac{3}{4}$, अतः सूत्र (3) के प्रयोग द्वारा हम σ^2 को ज्ञात करेंगे,

x_i	p_i	x_i^2	$x_i^2 . p_i$
0	$\frac{84}{220}$	0	$0 \times \frac{84}{220} = 0$
1	$\frac{108}{220}$	1	$1 \times \frac{108}{220} = \frac{108}{220}$
2	$\frac{27}{220}$	4	$4 \times \frac{27}{220} = \frac{108}{220}$
3	$\frac{1}{220}$	9	$9 \times \frac{1}{220} = \frac{9}{220}$

हम देखते हैं कि $$\sum x_i^2 p_i = \frac{225}{220} = \frac{45}{44}$$

इसलिए $$\sigma^2 = \sum x_i^2 p_i - \mu^2 = \frac{45}{44} - \frac{9}{16} = 0.46 \text{ (लगभग)}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.46} = 0.678 \text{ (लगभग)}$$

प्रश्नावली 19.3

नीचे दिए प्रायिकता बंटनों में से प्रत्येक का माध्य (μ), प्रसरण (σ^2) तथा मानक विचलन (σ) ज्ञात कीजिए :

1.

X	1	2	3	4
P(X)	0.4	0.3	0.2	0.1

2.

X	0	1	3	5
P(X)	0.2	0.5	0.2	0.1

3.

Y	−2	−1	0	1	2
P(Y)	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

4.

Z	– 3	– 1	0	1	3
P(Z)	0.05	0.45	0.20	0.25	0.05

5. मान लीजिए कि यादृच्छिक चर X और संगत प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है :

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

X का माध्य ज्ञात कीजिए।

6. एक पासा दो बार फेंका जाता है। पासे पर प्राप्त होने वाली संख्या विषम हो तो उसे एक 'सफलता' कहेंगे। 'सफलताओं' की संख्या का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

7. यदि सिक्के को तीन बार उछालने पर चितों की संख्या X हो, तो X का माध्य, प्रसरण और मानक विचलन क्या होगा?

8. पाँच पत्तों पर 1 से 5 तक के अंक इस प्रकार लिखे हैं कि प्रत्येक पत्ते पर केवल एक अंक लिखा है। इनमें से दो पत्तों को यादृच्छया निकाला जाता है। मान लीजिए कि दोनों पत्तों पर प्राप्त अंकों का योग X द्वारा प्रगट हो, तो X का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

9. ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी हुई (सुमिश्रित) गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापन के साथ निकाले जाते हैं। यदि X इक्कों के निकलने की संख्या हो, तो यादृच्छिक चर X का माध्य और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

10. ऐसे यादृच्छिक चर X का माध्य ज्ञात कीजिए जो दो पासों को चार बार फेंकने पर प्राप्त होने वाले अंक दिकों की संख्याओं को दर्शाता हो।

11. ताश के 52 पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी हुई गड्डी में से दो पत्ते उत्तरोत्तर बिना प्रतिस्थापन के निकाले जाते हैं। इक्कों के निकलने की संख्या के लिए प्रसरण का परिकलन कीजिए।

12. एक पासे को दो बार फेंका जाता है। पासे पर प्राप्त होने वाली 'संख्या का 4 से अधिक' होना एक 'सफलता' मानी जाती है। 'सफलताओं' की संख्या के प्रायिकता बंटन का प्रसरण ज्ञात कीजिए।

13. एक गाँव में परिवारों पर बच्चों की संख्या दो तक सीमित रखने का प्रतिबंध है। किसी दिए हुए व्यक्ति के बच्चों की संख्या का प्रायिकता बंटन नीचे दिया गया है :

बच्चों की संख्या	0	1	2
प्रायिकता	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

बच्चों की संख्या का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

14. दस अच्छे अंडों के साथ दो खराब अंडे अचानक मिल जाते हैं। अब इनमें से तीन अंडे यादृच्छया प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। निकाले गए खराब अंडों के लिए μ का परिकलन कीजिए।

15. किसी खेल में, तीन सिक्कों को उछालने पर यदि सभी पर चित या सभी पर पट आता है, तो एक व्यक्ति को 5 रुपए प्राप्त होते हैं और यदि केवल एक या दो चित आते हैं तो उसे 3 रुपए देने पड़ते हैं। प्रति बार खेल में उसे कितने रुपए जीतने की संभावना करनी चाहिए?

[संकेत : $X=5$, $P(X)=\frac{1}{4}$; $X=-3$, $P(X)=\frac{3}{4}$, μ ज्ञात कीजिए।]

19.5 द्विपद बंटन (Binomial Distribution)

अनेक प्रयोगों की प्रकृति द्विपरिणामी होती है। उदाहरणार्थ उछाला गया सिक्का एक 'चित' या एक 'पट' दर्शाता है, किसी प्रश्न का उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' हो सकता है, एक अंडे से बच्चा 'निकल चुका है' या 'नहीं' निकल चुका है, एक निर्णय 'हाँ' या 'नहीं' है आदि। इस प्रकार की स्थितियों में ऐसा प्रचलन है कि प्राप्त परिणामों में से एक को 'सफलता' और दूसरे को 'असफलता' कहा जाता है। उदाहरण के लिए, एक सिक्के को उछालने पर 'चित' आने को सफलता माना जाए तो 'पट' आने को असफलता कहते हैं।

प्रत्येक बार, जब हम एक सिक्का उछालते हैं या एक पासा फेंकते हैं या कोई अन्य प्रयोग करते हैं, तब हम इसे एक परीक्षण कहते हैं। यदि एक सिक्का मान लीजिए, चार बार उछाला जाए तो परीक्षण की संख्या 4 होगी और इनमें से प्रत्येक के परिणाम तथ्यतः दो होंगे अर्थात् *सफलता* या *असफलता* । किसी एक परीक्षण का परिणाम किसी दूसरे परीक्षण के परिणाम से स्वतंत्र होता है। इस प्रकार के प्रत्येक परीक्षण में सफलता (असफलता) की प्रायिकताएँ अचर होती हैं। इस प्रकार के स्वतंत्र परीक्षण, जिनके केवल दो परिणाम होते हैं जो प्रायः 'सफलता' या 'असफलता' कहलाते हैं, बरनौली (बर्नूली) परीक्षण कहलाते हैं।

अनेक महत्त्वपूर्ण प्रायिकता बंटनों को उन प्रयोगों से प्राप्त किया गया है, जिनके परीक्षण द्विपरिणामी होते हैं। इनमें से सबसे महत्त्वपूर्ण द्विपद बंटन है, जिस पर हम नीचे विचार करेंगे।

मान लीजिए कि एक द्विपरिणामी प्रयोग के n परीक्षण किए गए हों और एक यादृच्छिक चर X इन n परीक्षणों से प्राप्त होने वाली सफलताओं की संख्या निरूपित करता हो। मान लीजिए कि प्रत्येक परीक्षण में एक सफलता की प्रायिकता p है (अतः प्रत्येक परीक्षण में एक असफलता की प्रायिकता $q=1-p$)। हम परीक्षणों को स्वतंत्र मान लेते हैं।

अब हम एक द्विपरिणामी प्रयोग के n परीक्षणों में से तथ्यतः r सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए एक सूत्र का निगमन (की व्युत्पत्ति) करेंगे। r लगातार सफलताओं के बाद आने वाले $(n-r)$ असफलताओं का एक विशेष अनुक्रम आगे दिया है।

$$\underbrace{SSS...S}_{r \text{ सफलताएँ}} \quad \underbrace{FFF...F}_{(n-r) \text{ असफलताएँ}} \qquad (1)$$

अत: $$P\left(\underbrace{SSS...S}_{r \text{ बार}} \ \underbrace{FFF...F}_{(n-r) \text{ बार}}\right)$$

$$= \underbrace{P(S)P(S)...P(S)}_{r \text{ गुणनखंड}} \times \underbrace{P(F)P(F)...P(F)}_{(n-r) \text{ गुणनखंड}}$$

$$= \underbrace{p \cdot p ... p}_{r \text{ गुणनखंड}} \times \underbrace{q \cdot q ... q}_{(n-r) \text{ गुणनखंड}}$$

$$= p^r q^{n-r}, \qquad (q = 1-p)$$

क्योंकि सभी n परीक्षण स्वतंत्र हैं और सफलता (असफलता) की प्रायिकता परीक्षणों के साथ परिवर्तित नहीं होती हैं। r सफलताओं और $(n-r)$ असफलताओं को प्राप्त करने की प्रायिकता किसी भी r सफलताओं वाले अनुक्रम में $p^r q^{n-r}$ ही होगी, क्योंकि सभी गुणनखंड समान रूप से व्यंजक (1) से ही प्राप्त होते हैं, केवल उनका क्रम अलग होता है। किंतु हमारी रुचि उस प्रायिकता विशेष को ज्ञात करने की है जिसमें सभी r परीक्षणों में सफलताएँ ही मिलती हों और क्योंकि n परीक्षणों से r सफलताएँ पाने की संख्या (संचय) ${}^nC_r$ है, अत: अभीष्ट प्रायिकता निम्नलिखित सूत्र से ज्ञात होती है :

$$P(X = r) = {}^nC_r \ p^r q^{n-r}, \qquad (2)$$

जहाँ $q = 1-p$, और $r = 0, 1, 2, \ldots, n$

हम, सामान्यत: $P(X = r)$ को $P(r)$ से प्रदर्शित करते है।

यहाँ ध्यान दीजिए कि सूत्र (2) में r को क्रमश: $0, 1, 2, \ldots, n$ मान देने से प्राप्त क्रमिक प्रायिकताएँ $P(r)$ क्रमश: $(q+p)^n$ के द्विपद प्रसार में आने वाले संगत पदों के तुल्य होती हैं और इसी कारण इस बंटन को 'द्विपद बंटन' कहते हैं। r के मान और संगत प्रायिकताओं $P(r)$ के मान आगे सारणी में दिए हैं

यादृच्छिक चर X का द्विपद बंटन

$X = r$	$P(r)$
0	q^n
1	${}^nC_1\, p\, q^{n-1}$
2	${}^nC_2\, p^2\, q^{n-2}$
.	.
.	.
n	${}^nC_n\, p^n\, q^{n-n}\ (= p^n)$

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त सभी प्रायिकताएँ एक अऋणात्मक भिन्नें हैं और सभी प्रायिकताओं का योग 1 है, क्योंकि $\sum_{r=0}^{n} P(r) = (q+p)^n = 1^n = 1$

मानों $0, 1, 2, ..., n$, को लेने वाला एक यादृच्छिक चर X में प्राचल n और p का द्विपद बंटन सन्निहित है, यदि इसका प्रायिकता बंटन उपर्युक्त (2) द्वारा प्रदत्त है।

किसी प्रश्न को द्विपद बंटन के सूत्र (2) द्वारा हल करते समय हमें सबसे पहले यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि क्या बरनौली परीक्षण के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं या नहीं। ये प्रतिबंध नीचे दिए गए हैं :

(i) परीक्षणों की संख्या निश्चित होनी चाहिए।

(ii) परीक्षण स्वतंत्र होने चाहिए।

(iii) प्रत्येक परीक्षण का तथ्यतः एक ही परिणाम होना चाहिए; सफलता या असफलता।

(iv) किसी परिणाम की प्रायिकता प्रत्येक परीक्षण में एक ही (समान) रहनी चाहिए।

19.5.1 *द्विपद बंटन के लिए आवर्तन सूत्र (Recurrence or recursion formula for the binomial distribution)* हमें ज्ञात है कि

$$P(r) = {}^nC_r\ p^r q^{n-r}$$

और $$P(r+1) = {}^nC_{r+1}\ p^{r+1}\ q^{n-r-1}$$

इसलिए $$\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{{}^nC_{r+1}\ p^{r+1}\ q^{n-r-1}}{{}^nC_r\ p^r\ q^{n-r}}$$

$$= \frac{n!\, p^{r+1}\, q^{n-r-1}}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \times \frac{r!\,(n-r)!}{n!\, p^r\, q^{n-r}}$$

$$= \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$$

अत: $$P(r+1) = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}\, P(r) \qquad (1)$$

यह अभीष्ट आवर्तन सूत्र (पुनरावृत्ति सूत्र) हैं। यदि $P(0)$ ज्ञात हो, तो हम इस सूत्र का उत्तरोत्तर प्रयोग करके प्रायिकताएँ $P(1), P(2), P(3)$ आदि ज्ञात कर सकते हैं।

अत:, जब $r = 0$, तो (1) द्वारा ज्ञात होता है कि

$$P(1) = n\frac{p}{q}\, P(0)$$

परंतु $$P(0) = p^0 q^n = q^n$$

इसलिए $$P(1) = npq^{n-1}$$

पुन: (1) में $r = 1$ रखने पर हमें प्राप्त होता है कि

$$P(2) = \frac{n-1}{2}\, \frac{p}{q}\, P(1)$$

$$= \frac{n-1}{2}\, \frac{p}{q}\, npq^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2} p^2 q^{n-2}$$

आदि।

19.5.2 *दि्वपद बंटन का माध्य और प्रसरण* (*Mean (or expectation) and variance of the binomial distribution*)

हमें ज्ञात है कि यदि एक यादृच्छिक चर X के मान $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हों और उनकी संगत प्रायिकताएँ क्रमश: $p_1, p_2, \ldots, p_n$ हों, तो यादृच्छिक चर X का माध्य μ निम्नलिखित सूत्र द्वारा परिभाषित है

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, P(X = x_i) \qquad (1)$$

इसे X के प्रायिकता बंटन का औसत, प्रत्याशित मान, या प्रत्याशा भी कहते हैं।

दि्वपद बंटन के लिए,

$$P(X = r) = P(r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r},\ r = 0, 1, 2, \ldots, n \qquad (2)$$

अत:

$$\mu = E(X) = \sum_{r=0}^{n} r\, P(r) \qquad (3)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r\ {}^nC_r\ p^r\, q^{n-r}$$

$$= 0 + {}^nC_1\, pq^{n-1} + 2.\ {}^nC_2\, p^2\, q^{n-2} + \ldots + n\ {}^nC_n\, p^n\, q^{n-n}$$

$$= np\ q^{n-1} + 2.\ \frac{n(n-1)}{2!}\ p^2\ q^{n-2} + \ldots + n\ p^n$$

$$= np\ [q^{n-1} + (n-1)\ p\ q^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\ p^2\ q^{n-3} + \ldots + p^{n-1}]$$

$$= np\ (q + p)^{n-1}$$

$$= np \qquad (\text{क्योंकि } q + p = 1) \qquad (4)$$

अत: दि्वपद बंटन का माध्य np होता है।

प्रसरण σ^2 हमें ज्ञात है कि प्रसरण σ^2 निम्न सूत्र दि्वारा प्राप्त होता है,

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2\ P(r) - \mu^2 \qquad (5)$$

अत: दि्वपद बंटन के लिए,

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^nC_r\, p^r q^{n-r} - \mu^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \{r + r(r-1)\}\ {}^nC_r p^r q^{n-r} - \mu^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r\ {}^nC_r p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} r(r-1)\ {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} - \mu^2 \qquad (6)$$

$$= np + \sum_{r=2}^{n} r\,(r-1)\,{}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} - \mu^2 \qquad (7)$$

[क्योंकि $\sum_{r=0}^{n} r\,{}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} = \mu = np$, और (6) में दूसरे पद का मान $r = 0$ तथा $r = 1$ के लिए 0 होगा।]

अब $\sum_{r=2}^{n} r(r-1)\ {}^nC_r\ p^r\ q^{n-r}$

$$= 2 \cdot 1\ {}^nC_2\, p^2\, q^{n-2} + 3 \cdot 2\ {}^nC_3\, p^3 q^{n-3} + \ldots + n\,(n-1)\ {}^nC_n\, p^n\, q^{n-n}$$

$$= n\,(n-1)\,p^2\,q^{n-2}\left[1 + (n-2)\left(\frac{p}{q}\right) + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2}\right]$$

$$= n(n-1)p^2q^{n-2}\left(1+\frac{p}{q}\right)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2q^{n-2}\left(\frac{1}{q}\right)^{n-2} \quad [\text{क्योंकि } q + p = 1]$$

$$= n\,(n-1)\,p^2$$

अतः (7) से, हमें प्राप्त होता है कि

$$\sigma^2 = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2$$

$$= np\,(1-p)$$

$$= npq \qquad (8)$$

अतः द्विपद बंटन का प्रसरण npq होता है।

अग्रतः, मानक विचलन $= \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{npq}$

उदाहरण 20 एक पासे को 6 बार फेंका जाता है, यदि 'पासे पर सम संख्या प्राप्त करना' एक 'सफलता' हो, तो निम्न की प्रायिकताएँ क्या होंगी?

(i) तथ्यतः 5 सफलताएँ।

(ii) कम से कम 5 सफलताएँ।

(iii) अधिक से अधिक 5 सफलताएँ।

हल एक अकेले परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p निम्न प्रकार होगी

$$p = \text{P(पासे पर सम संख्या 2, 4 या 6 प्राप्त करना)}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

और $$q = 1 - p = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

जहाँ q असफलता की प्रायिकता है।

यह बात सत्यापित की जा सकती है कि बरनौली परीक्षण के सभी प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं।

यहाँ $$n = 6, p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2}, r = 5$$

$$\text{P}(r) = {}^6\text{C}_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}, r = 0, 1, 2, ..., 6$$

(i) $\text{P(तथ्यत: 5 सफलताएँ)} = \text{P}(5) = {}^6\text{C}_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{32}$

(ii) $\text{P(कम से कम 5 सफलताएँ)} = \text{P}(5) + \text{P}(6)$

$$= {}^6\text{C}_5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = \frac{7}{64}$$

(iii) $\text{P(अधिक से अधिक 5 सफलताएँ)} = \text{P}(0) + \text{P}(1) + \text{P}(2) + \text{P}(3) + \text{P}(4) + \text{P}(5)$

$$= 1 - \text{P}(6)$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{63}{64}$$

उदाहरण 21 अनुच्छेद 19.5.1 में द्विपद बंटन के लिए प्राप्त आवर्तन सूत्र के प्रयोग द्वारा $r = 1, 2, 3, 4$ और 5 के लिए $\text{P}(r)$ का मान $p = \frac{1}{3}$ और $n = 5$ लेकर परिकलन कीजिए।

हल हमें ज्ञात है कि

$$P(r+1) = \frac{n-r}{r+1}\,\frac{p}{q}\;P(r) \qquad \text{(आवर्तन सूत्र)}$$

उपर्युक्त में $p = \frac{1}{3},\; q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ और $n = 5$, रखने पर हम पाते हैं

$$P(r+1) = \frac{5-r}{r+1} \cdot \frac{1}{2} \cdot P(r) \qquad (1)$$

अब $P(0) = q^n = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0.1317$ (लगभग)

(1) में r का मान क्रमशः 0, 1, 2, 3 और 4 रखने पर हमें निम्न परिणाम प्राप्त होते हैं,

$$P(1) = \frac{5}{2}\,P(0) = \frac{5 \times 0.1317}{2} = 0.3292 \text{ (लगभग)}$$

$$P(2) = P(1) = 0.3292$$

$$P(3) = \frac{3}{6}\,P(2) = \frac{0.3292}{2} = 0.1646 \text{ (लगभग)}$$

$$P(4) = \frac{2}{8}\,P(3) = \frac{0.1646}{4} = 0.0412 \text{ (लगभग)}$$

$$P(5) = \frac{1}{10}\,P(4) = .0041 \text{ (लगभग)}$$

उदाहरण 22 एक सिक्के को 5 बार उछाला जाता है। यदि 'एक चित आना' एक सफलता मानी जाती है, तो कम से कम 3 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल एक अकेले परीक्षण में सफलता की प्रायिकता p निम्न समीकरण से प्राप्त होती है :

$$p = P(\text{एक चित आना}) = \frac{1}{2}$$

अतः $q = 1 - p = \frac{1}{2}$

अब $$n = 5,\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$$

इसलिए $$P(r) = {}^5C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \left(\frac{1}{2}\right)^{5-r},\ r = 0,1,2,3,4,5.$$

तथा P(कम से कम 3 सफलताएँ) = P(3) + P(4) + P(5) (1)

$$\left.\begin{aligned} P(3) &= {}^5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} \\ P(4) &= {}^5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{32} \\ P(5) &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} \end{aligned}\right] \quad (2)$$

अत: P(कम से कम 3 सफलताएँ) $= \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}$ [(1) और (2) द्वारा]

टिप्पणी प्रायिकताएँ P(1),…,P(5) का परिकलन अनुच्छेद 19.5.1 के आवर्तन सूत्र (1) द्वारा भी किया जा सकता है।

उदाहरण 23 एक पासे को 180 बार फेंका जाता है। पासे पर 3 के अंक प्राप्त होने की संख्या की प्रत्याशा संख्या (μ) ज्ञात कीजिए। मानक विचलन (σ) और प्रसरण (σ^2) भी ज्ञात कीजिए।

हल इस प्रश्न में,

$$n = 180,\ p = \frac{1}{6} \text{ और } q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

हैं।

अत: प्रत्याशा संख्या $= \mu = np = 180.\frac{1}{6} = 30$

$$\text{प्रसरण} = \sigma^2 = npq = 180.\ \frac{1}{6}.\frac{5}{6} = 25$$

तथा मानक विचलन $= \sigma = \sqrt{25} = 5$

उदाहरण 24 किसी द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण क्रमशः 4 और $\frac{4}{3}$ हैं। $P(X \geq 1)$ ज्ञात कीजिए।

हल हमें दिया है कि

$$\text{माध्य} = \mu = np = 4 \qquad (1)$$

और $$\text{प्रसरण} = \sigma^2 = npq = \frac{4}{3} \qquad (2)$$

(2) को (1) से विभाजित करने पर

$$q = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

इसलिए $$p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \qquad [p = 1 - q]$$

अब $$n = \frac{4}{p} = \frac{4 \times 3}{2} = 6 \qquad [(1) \text{ द्वारा}]$$

अतः $$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - q^n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 1 - .0014$$

$$= 0.9986 \text{ (लगभग)}$$

उदाहरण 25 बल्बों के एक बड़े ढेर में 5 % बल्ब खराब हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि 10 बल्बों के एक नमूने में खराब बल्बों की संख्या 1 से अधिक नहीं हो?

हल यहाँ $$p = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

और $$q = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

P(खराब बल्बों की संख्या 1 से अधिक नहीं)

$$= P(\text{कोई बल्ब खराब नहीं}) + P(\text{एक बल्ब खराब})$$

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^{10} + {}^{10}C_1\left(\frac{1}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$$

$$= \left(\frac{19}{20}\right)^9 \left(\frac{19}{20} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{19}{20}\right)^9 \left(\frac{29}{20}\right)$$

किसी दिए गए द्विपद बंटन से संबंधित प्रायिकताओं का परिकलन, सूत्र $P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$ के प्रयोग द्वारा, संपन्न किया जा सकता है। कभी-कभी जब n और p के मान इस प्रकार होते हैं कि परिकलन करना कठिन और अधिक समय लेने वाला होता है, जैसा कि उपर्युक्त उदाहरण में है। इस समस्या को दूर करने के लिए, द्विपद प्रायिकताओं का परिकलन पहले ही व्यापक रूप से किया जा चुका है। $n = 2,3,\ldots,15$, और p के 0.1 से 0.9 तक के कुछ चुने हुए मानों के लिए-पुस्तक के अंत में संलग्न सारणी में द्विपद प्रायिकताएँ दी गई है। इस सारणी के प्रयोग को निम्नलिखित उदाहरण में स्पष्ट किया गया है। चूंकि सारणी में दिए गए मान सन्निकट हैं अतः सारणी के प्रयोग द्वारा प्राप्त प्रश्नों के हल भी सन्निकट हैं।

उदाहरण 26 एक असाधारण रक्त विकार से एक रोगी के अच्छे होने की प्रायिकता 0.4 है। 10 व्यक्ति इस रक्त विकार के शिकार हो जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि रोगियों में से

(i) तथ्यतः 3 अच्छे हो जाएँगे?

(ii) कम से कम 7 अच्छे हो जाएँगे?

(iii) 3 से 5 रोगी अच्छे हो जाएँगे?

हल मान लीजिए कि अच्छे हो जाने वाले रोगियों की संख्या X है।

यहाँ p = अच्छे होने की प्रायिकता = 0.4

$q = 1 - 0.4 = 0.6$ और $n = 10$

(i) P(तथ्यतः 3 रोगी अच्छे होते हैं) $= P(X = 3) = 0.2150$ [सारणी में $n = 10$, $X = 3$ और $p = 0.40$ वाली प्रविष्टि देखिए]

(ii) P(कम से कम 7 रोगी अच्छे होते हैं) $= P(X \geq 7) = P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$= 0.0425 + 0.0106 + 0.0016 + 0.0001$

$= 0.0548$

[सारणी से $P(X = 7), P(X = 8), \ldots, P(X = 10)$ के मानों को लिखिए। $n = 10$ के नीचे क्रमशः $X = 7$, 8, 9, 10 और $p = 0.40$ के संगत मानों की प्रविष्टियाँ देखिए]

(iii) P(3 से 5 तक रोगी अच्छे होते हैं) $= P(3 \le X \le 5)$

$$= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0.2150 + 0.2508 + 0.2007$$

$$= 0.6665 \text{ (लगभग)}$$

प्रश्नावली 19.4

1. एक पासे को 5 बार फेंका जाता है। तथ्यतः तीन '2' प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक पासे को 4 बार फेंका जाता है। 'पासे पर अंक 1 या 6 का प्राप्त होना' एक सफलता मानी जाती है। निम्नलिखित प्रायिकताएँ क्या होंगी?

   (i) तथ्यतः 3 सफलताएँ (ii) तथ्यतः 4 सफलताएँ

   (iii) अधिकतम 2 सफलताएँ।
3. पासों के एक जोड़े को 4 बार फेंका जाता है। यदि 'पासों पर प्राप्त अंकों का एक द्विक होना एक सफलता मानी जाती हो, तो 2 सफलताओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. पासों के एक जोड़े को 7 बार फेंका जाता है। यदि 'पासों पर प्राप्त संख्याओं के योग का 7 होना' एक सफलता मानी जाती हो, तो निम्नलिखित प्रायिकताएँ क्या होंगी?

   (i) कोई भी सफलता नहीं (ii) 6 सफलताएँ

   (iii) न्यूनतम (कम से कम) 6 सफलताएँ (iv) अधिकतम (अधिक से अधिक) 6 सफलताएँ।
5. किसी फैक्ट्री में बने एक बल्ब की 100 दिनों के प्रयोग के बाद फ्यूज होने की प्रायिकता 0.05 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि इस प्रकार के 5 बल्बों में से

   (i) एक भी नहीं (ii) एक से अधिक नहीं

   (iii) एक से अधिक (iv) कम से कम एक

   100 दिनों के प्रयोग के बाद फ्यूज हो जाएँगे।
6. एक थैले में 10 गेंदे हैं जिनमें से प्रत्येक पर 0 से 9 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि थैले से 4 गेंदे उत्तरोत्तर बिना वापस रखे (बिना प्रतिस्थापित किए) निकाली जाती हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि उनमें से किसी भी गेंद पर अंक 0 न लिखा हो?
7. एक सिक्के को 6 बार उछाला जाता है। यदि 'चित आना' एक सफलता हो, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

   (i) तथ्यतः 2 चित प्रकट हों। (ii) कम से कम 4 चित प्रकट हों।

8. द्विपद बंटन के लिए $P(r)$ का परिकलन कीजिए जहाँ

(i) $n=5, p=\frac{1}{3}$ तथा $r=2$ (ii) $n=10, p=\frac{1}{2}$ तथा $r=6$

9. आवर्तन सूत्र की सहायता से द्विपद बंटन के लिए $P(r)$ का परिकलन $r=1, 2, 3, 4$ और 5 के लिए कीजिए, जबकि दिया है कि $n=5$ और $p=\frac{1}{6}$

10. चार सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। मान लीजिए कि X पट आने की संख्या को निरूपित करता है। X के प्रत्याशित मान की गणना कीजिए।

11. एक पासे को 20 बार फेंका जाता है। 'पासे पर 4 से अधिक संख्या का प्राप्त होना' एक सफलता है। सफलता की संख्याओं का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

12. हरी द्वारा लक्ष्य-भेदन की प्रायिकता $P=\frac{1}{4}$ है। वह 64 बार गोली चलाता है। इस बात की प्रत्याशा संख्या (μ), कि वह कितनी बार लक्ष्य-भेदन करेगा, ज्ञात कीजिए और प्रसरण (σ^2) भी ज्ञात कीजिए।

13. सत्य-असत्य प्रकार के 50 प्रश्नों के अनुमान द्वारा प्राप्त होने वाले सही उत्तरों की संख्या की प्रत्याशा E(X) ज्ञात कीजिए।

14. एक थैले में 5 सफेद, 7 लाल और 8 काले गेंद हैं। यदि 4 गेंदों को एक के बाद एक, प्रतिस्थापना सहित निकाला गया हो, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि,
(i) एक भी गेंद सफेद नहीं हो। (ii) सभी गेंदे सफेद हों। (iii) केवल 2 गेंदे सफेद हों।

15. एक बॉक्स में 100 टिकट हैं जिनमें से प्रत्येक पर 1 से 100 तक के अंकों में से एक अंक लिखा है। यदि बॉक्स में से 5 टिकट उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाएँ, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि सभी टिकट पर लिखी संख्याएँ 10 से भाज्य हैं।

16. मान लीजिए कि एक फैक्ट्री में बनने वाली वस्तुओं में से 10 % खराब हैं। मान लीजिए कि 4 वस्तुएँ यादृच्छया चुनी जाती हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि,

(i) 2 वस्तुएँ खराब हों। (ii) एक भी वस्तु खराब न हो।

17. मान लीजिए कि 90 % लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हैं। इसकी प्रायिकता क्या है कि 10 लोगों में से यादृच्छया चुने गए अधिक से अधिक 6 लोग दाहिने हाथ से काम करने वाले हों?

18. एक कलश (पात्र) में 25 गेंदे हैं, जिनमें से 10 गेंदों पर चिह्न 'X' अंकित है और शेष 15 पर चिह्न 'Y' अंकित है। कलश में से एक गेंद यादृच्छया निकाला जाता है और उस पर अंकित चिह्न को नोट (लिख) करके उसे कलश में प्रतिस्थापित कर दिया जाता है। यदि इस प्रकार से 6 गेंदे निकली जाती हों, तो अग्रलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

(i) सभी पर चिह्न 'X' अंकित हो। (ii) 2 से अधिक पर चिह्न 'Y' नहीं अंकित हो।

(iii) कम से कम 1 गेंद पर चिह्न 'Y' अंकित हो।

(iv) 'X' तथा 'Y' चिह्नों से अंकित गेंदों की संख्याएँ समान हों।

'X' चिह्न से अंकित गेंदों की संख्या का माध्य भी ज्ञात कीजिए।

19. एक बाधा दौड़ में एक प्रतियोगी को 10 बाधाएँ पार करनी हैं। इसकी प्रायिकता कि वह प्रत्येक बाधा को पार कर लेगा $\frac{5}{6}$ है। इसकी क्या प्रायिकता है कि वह 2 से कम बाधाओं को गिरा देगा (नहीं पार कर पाएगा)?

20. एक पासे, को बार-बार तब तक फेंका जाता है जब तक कि उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे पर 6 का अंक उसे छठी बार फेंकने पर प्राप्त होता हो।

[संकेत: अभीष्ट प्रायिकता = P(पाँच बार फेंकने पर दो बार 6 का अंक और छठी बार फेंकने पर एक बार 6 का अंक प्राप्त होना) $= {}^5C_2 \times p^2 q^{5-2} \times p$]

21. 52 ताश के पत्तों की एक भली-भाँति फेंटी हुई गड्डी में से 5 पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाले जाते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि

(i) सभी 5 पत्ते हुकुम के हों? (ii) केवल 3 पत्ते हुकुम के हों?

(iii) एक भी पत्ता हुकुम का नहीं हो?

22. यदि एक द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण क्रमशः 9 और 6 हों, तो बंटन ज्ञात कीजिए।

23. यदि किसी द्विपद बंटन का, 5 परीक्षणों के लिए, माध्य और प्रसरण का योग 1.8 हो, तो बंटन ज्ञात कीजिए।

24. एक रोगी के एक गंभीर रोग से अच्छे होने की प्रायिकता 0.9 है। इस रोग से ग्रसित अगले 7 रोगियों में से 5 के अच्छे (ठीक) होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. किसी प्रयोग के सफल होने की संख्या उसके असफल होने की संख्या से दूनी है। अगले 6 परीक्षणों में कम से कम 4 परीक्षणों के सफल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

[संकेत : $p = 2q, p + q = 1$ जिससे $p = \frac{2}{3}, q = \frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।]

19.6 प्वासों बंटन (Poisson Distribution)

पिछले अनुच्छेद में, हम द्विपद बंटन की परिचर्चा कर चुके हैं। जब n का मान बहुत बड़ा और p का मान बहुत छोटा होता है, तब द्विपद प्रायिकताओं का परिकलन करना प्रायः बहुत कठिन हो जाता है। मान लीजिए कि वस्तुओं के एक बड़े ढेर में 1% वस्तुएँ खराब हैं और इस ढेर में से चुने गए 400 वस्तुओं के एक नमूने में से 4 खराब वस्तुओं की प्रायिकता ज्ञात करनी है। यदि हम सूत्र (2) (अनुच्छेद 19.5) का प्रयोग करें तो हमें अग्रलिखित का परिकलन करना होगा :

$$P(X = 4) = {}^{400}C_4 \, (0.01)^4 \, (0.99)^{396}$$

जो कि वास्तव में एक कठिन कार्य है।

अतः, इस प्रकार के प्रश्नों के लिए हमें कोई वैकल्पिक सूत्र ज्ञात करना पड़ेगा।

इस अनुच्छेद में, हम एक और असंतत प्रायिकता बंटन प्रस्तुत कर रहे हैं जिसे प्वासों प्रायिकता बंटन या केवल प्वासों बंटन कहते हैं और जिसका प्रयोग इस प्रकार के द्विपद बंटनों का निकटतम मान निकालने के लिए किया जा सकता है। इस बंटन की खोज एक फ्रांसिसी गणितज्ञ साइमन डेनिस प्वासों (Simeon Denis Poisson, 1781-1840) ने की थी।

प्वासों बंटन, द्विपद बंटन का सीमांत रूप है, जब n परीक्षणों की संख्या, बहुत बड़ी अर्थात् $n \to \infty$ और p सफलता की प्रायिकता, बहुत छोटी अर्थात् $p \to 0$ हो, जबकि np का मान सीमित बना रहता है।

19.6.1 ***प्वासों बंटन द्विपद बंटन के सीमांत रूप में (Poisson distribution as a limiting form of the binomial distribution)*** हम प्वासों बंटन का निगमन (की व्युत्पत्ति) एक द्विपद बंटन से, यह मान कर कि $n \to \infty$ और $p \to 0$ इस प्रकार कि गुणनफल np सदैव सीमित, कहिए λ, रहता है, करेंगे।

क्योंकि $np = \lambda,\ p = \dfrac{\lambda}{n}$

द्विपद बंटन से हमें ज्ञात है कि

$$P(X = r) = {}^nC_r \, p^r \, q^{n-r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \times p^r (1-p)^{n-r}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} \times \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-r}$$

$$= \frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right) \times \frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r}$$

$$= \frac{\lambda^r}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\times\frac{\left[\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda}}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{r}} \qquad (1)$$

अब हम कलन में वर्णित सीमा के अत्यंत महत्त्वपूर्ण परिणाम का प्रयोग करेंगे। हम इस परिणाम को बिना सिद्‌ध किए नीचे व्यक्त करते हैं।

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e \qquad (2)$$

जहाँ e एक स्थिरांक है जिसका मान 2 और 3 के बीच होता है और जो निम्न प्रकार से पारिभाषित है :

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad (3)$$

जहाँ x एक वास्तविक संख्या है। (1) में हम देखते हैं कि ज्यों-ज्यों $n \to \infty$, $(r-1)$ गुणनखंडों $\left(1-\frac{1}{n}\right)$, $\left(1-\frac{2}{n}\right), \ldots, \left(1-\frac{r-1}{n}\right)$ में से प्रत्येक तथा गुणनखंड $\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^r$ का मान 1 की ओर अग्रसर होता है, क्योंकि r के किसी भी वास्तविक मान के लिए $\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=0$ इसके अतिरिक्त (2) से, हम नोट करते हैं कि

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}} = \lim_{\frac{n}{\lambda}\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}} = e \qquad \left[\text{क्योंकि जैसे } n\to\infty, \frac{n}{\lambda}\to\infty\right]$$

अत:

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right\}^{-\lambda} = \left\{\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{\frac{-n}{\lambda}}\right\}^{-\lambda} = e^{-\lambda}$$

अत:, सीमांत स्थिति में जब $n \to \infty$, तब (1) से हमें प्राप्त होता है कि

$$P(X=r)=\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!},\quad r=0, 1, 2, 3, \ldots \tag{4}$$

जहाँ λ एक सीमित संख्या है, जिसका मान np है और इसे प्वासों बंटन का प्राचल कहते हैं।

$r=0, 1, 2, \ldots$ के लिए प्रायिकताओं $P(X=r)$ या केवल $P(r)$ का योग 1 होता है। इसका सत्यापन (4) में $r=0, 1, 2, \ldots$ रखकर और प्राप्त प्रायिकताओं को जोड़ कर किया जा सकता है।

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r)=e^{-\lambda}+\frac{\lambda e^{-\lambda}}{1!}+\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}+\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}+\ldots$$

$$=e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1!}+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots\right)$$

$$=e^{-\lambda}.e^{\lambda}=1 \qquad \text{[(3) के प्रयोग द्वारा]}$$

साथ ही प्रत्येक प्रायिकता एक अ-ऋणात्मक भिन्न है। यह निम्न बंटन की ओर ले जाता है।

मानों 0, 1, 2, . . . को लेने वाला एक यादृच्छिक चर X में प्राचल λ (निश्चित संख्या) के साथ प्वासों बंटन सन्निहित है यदि इसकी प्रायिकता बंटन

$$P(r)=P(X=r)=\frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, r=0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

द्वारा प्रदत्त है।

दैनिक जीवन में, ऐसी अनेक परिस्थितियाँ आती हैं जब n का मान बहुत बड़ा और p का मान बहुत छोटा होता है। ऐसी परिस्थितियों में द्विपद बंटन के प्रयोग के स्थान पर प्वासों बंटन को द्विपद बंटन के सन्निकटन के रूप में सुविधापूर्वक प्रयोग कर सकते हैं, क्योंकि द्विपद बंटन का प्रयोग n के बड़े मानों के लिए कठिन हो सकता है। इस प्रक्रिया को *द्विपद बंटन का प्वासों सन्निकटन* कहते हैं। द्विपद बंटन का प्वासों सन्निकटन का प्रत्यक्ष रीति से परिकलन और सारणीयन, द्विपद बंटन की अपेक्षा सरल होता है, क्योंकि λ के विभिन्न मानों के लिए $e^{-\lambda}$ का मान मानक सारणी द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। (λ के 0 से 9.9 तक के मानों के लिए $e^{-\lambda}$ के संगत (सन्निकट) मानों को सारणी पुस्तक के अंत में दी गई है। स्पष्टतया, सारणी को प्रयुक्त करने पर प्राप्त प्रश्नों के उत्तर भी सन्निकट मान होंगे। इस प्रकार की परिस्थितियों के कुछ उदाहरण निम्नलिखित हैं :

(i) टेलीफोन ट्रंक लाइन के उपभोक्ताओं की अत्यधिक संख्या ओर टेलीफोन लाइन के उपलब्ध होने की प्रायिकता अत्यंत कम होना।

(ii) घटनाओं के घटित होने की पुनरावृत्त वाली यातायात की समस्याएँ जैसे दुर्घटनाएँ, जिनकी प्रायिकता बहुत कम होती है।

(iii) व्यापक पैमाने पर उत्पादन से संबंधित अनेकों औद्योगिक प्रक्रियाएँ जिनमें संयंत्रों में खराबी आने या रुकावट पैदा होने की प्रायिकता अत्यंत कम होती है, इत्यादि।

19.6.2 *प्वासों बंटन की प्रायिकताओं के लिए आवर्तन सूत्र* (*Recurrence formula for the probabilities of the Poisson distribution*) हमें ज्ञात है कि

$$P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

और $$P(r+1) = \frac{\lambda^{r+1} e^{-\lambda}}{(r+1)!}$$

इसलिए $$\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{\lambda}{r+1}$$

या $$P(r+1) = \frac{\lambda}{r+1} P(r), \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots \qquad (1)$$

संबंध (1) प्वासों बंटन का आवर्तन सूत्र है। इस सूत्र द्वारा, एक बार P(0) का मान मालूम होने पर, हम P(1), P(2), P(3),..., के मानों को ज्ञात कर सकते हैं। स्पष्टतया

$$P(0) = e^{-\lambda}$$

सूत्र (1) में $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है कि,

$$P(1) = \lambda e^{-\lambda}$$

$$P(2) = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$$

$$P(3) = \frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!}$$

आदि।

19.6.3 *प्वासों बंटन का माध्य और प्रसरण* (*Mean and variance of the Poisson distribution*)

माध्य μ प्वासों बंटन के लिए

$$P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

$$E(X) = \mu = \sum_{r=0}^{\infty} r\, P(r)$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} r \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

$$= 0 + 1.\lambda e^{-\lambda} + 2.\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!} + 3.\frac{\lambda^3 e^{-\lambda}}{3!} + \ldots$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} . e^{\lambda} = \lambda$$

अतः प्वासों बंटन का माध्य उसके प्राचल λ के बराबर होता है।

प्रसरण σ^2 प्रसरण σ^2 निम्न प्रकार प्राप्त होता है,

$$\sigma^2 = \sum_{r=0}^{\infty} r^2 \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!} - \mu^2$$

$$= e^{-\lambda}\left[\frac{1^2\lambda}{1!} + \frac{2^2\lambda^2}{2!} + \frac{3^2\lambda^3}{3!} + \frac{4^2\lambda^4}{4!} + \frac{5^2\lambda^5}{5!} + \ldots\right] - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + \frac{2\lambda}{1!} + \frac{3\lambda^2}{2!} + \frac{4\lambda^3}{3!} + \frac{5\lambda^4}{4!} + \ldots\right] - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + \frac{(1+1)\lambda}{1!} + \frac{(1+2)\lambda^2}{2!} + \frac{(1+3)\lambda^3}{3!} + \frac{(1+4)\lambda^4}{4!} + \ldots\right] - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right] + \lambda\left(1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right) - \lambda^2$$

$$= \lambda e^{-\lambda} (e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}) - \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda$$

इसलिए प्वासों बंटन का प्रसरण भी λ होता है।

अत: प्वासों बंटन के माध्य और प्रसरण में से प्रत्येक λ के बराबर होता है। यह प्वासों बंटन का एक महत्त्वपूर्ण गुण है।

टिप्पणी प्वासों बंटन के माध्य और प्रसरण को हम द्विपद बंटन के माध्य और प्रसरण की सीमांत स्थितियों के रूप में भी निकाल सकते हैं जब $n \to \infty$, $p \to 0$ और $np = \lambda$ (स्थिरांक)। क्योंकि द्विपद बंटन का माध्य np है अत: प्वासों बंटन का माध्य

$$\lim_{n\to\infty} (np) = \lim_{n\to\infty} (\lambda) = \lambda, \text{ क्योंकि } \lambda \text{ एक स्थिरांक है।}$$

इसी प्रकार, प्वासों बंटन का प्रसरण

$$= \lim_{n\to\infty} np(1-p) \quad [\text{द्विपद बंटन का प्रसरण} = np(1-p)]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda\left(1-\frac{\lambda}{n}\right) \quad [\text{क्योंकि } np = \lambda]$$

$$= \lambda \qquad \left[\text{जब } n\to\infty, \frac{\lambda}{n}\to 0\right]$$

उदाहरण 27 प्वासों बंटन के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) P(2), दिया है $\lambda = 1$ (ii) P(3), दिया है $\lambda = \frac{1}{2}$

हल हमें ज्ञात है कि

$$P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}, \text{ अत:}$$

(i) $$P(2) = \frac{1^2 . e^{-1}}{2!} = \frac{0.368}{2} \qquad [e^{-1} = 0.368, \text{ सारणी देखें}]$$

$$= 0.184$$

(ii) $$P(3) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3 e^{-0.5}}{3!} = \frac{\frac{1}{8}\times 0.607}{6} \qquad [e^{-0.5} = 0.607]$$

$$= \frac{0.607}{48} = 0.013$$

उदाहरण 28 मान लीजिए कि 8% लोग बाएँ हाथ से काम करते हैं। इसकी क्या प्रायिकता है कि एक 25 लोगों के यादृच्छिक प्रतिदर्श में से 2 या अधिक बाएँ हाथ से काम करते हों?

हल हमें ज्ञात है कि,

$$p = \frac{8}{100}, n = 25$$

इसलिए $\lambda = np = \frac{8}{100} \times 25 = 2$

अब $P(2 \text{ या अधिक}) = P(X \geq 2)$

$$= 1 - P(X \leq 1)$$

$$= 1 - [P(1) + P(0)] \quad (1)$$

अब $P(1) = \frac{2^1 . e^{-2}}{1!} = 2 \times 0.135 = 0.270 \qquad [e^{-2} = 0.135]$

$$P(0) = \frac{2^0 . e^{-2}}{0!} = 0.135$$

अत: (1) द्वारा, हमें प्राप्त होता है कि,

$$P(2 \text{ या अधिक}) = 1 - [0.270 + 0.135]$$

$$= 1 - 0.405$$

$$= 0.595$$

उदाहरण 29 एक पेट्रोल पंप स्टेशन में प्रतिदिन प्राप्त होने वाली शिकायतों की संख्या एक ऐसा यादृच्छिक चर है, जिसके प्वासों बंटन में $\lambda = 3.3$ । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि स्टेशन में प्राप्त होने वाली शिकायतों की संख्या

(i) किसी दिए गए दिन में केवल 2 हो।

(ii) किसी दिए गए दिन में अधिकतम 2 हो।

हल यहाँ $\lambda = 3.3$ और

$$P(r) = \frac{\lambda^r e^{-\lambda}}{r!}$$

अत: (i) $P(2) = \frac{(3.3)^2 . e^{-3.3}}{2!}$

$$= \frac{(3.3)^2 .(0.037)}{2} \qquad [\text{चूँकि } e^{-3.3} = 0.037]$$

$$= \frac{10.89 \times 0.037}{2}$$

$$= 0.2015$$

अत: किसी दिए हुए दिन में स्टेशन में प्राप्त होने वाली शिकायतों की संख्या केवल दो होगी इसकी प्रायिकता 0.2015 है।

(ii) $P(r \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2)$

$$= e^{-3.3} + (3.3)\, e^{-3.3} + \frac{(3.3)^2 . e^{-3.3}}{2}$$

$$= 0.037 + (3.3)\,(.037) + 0.2015$$

$$= 0.037 + 0.1221 + 0.2015$$

$$= 0.3606$$

उदाहरण [illegible] एक व्यस्त यातायात चौराहे पर किसी एक कार के दुर्घटनाग्रस्त होने की प्रायिकता बहुत कम, माना कि 0.0001 है। तथापित दिन के किसी समय विशेष में कारों की एक बड़ी संख्या माना कि 1000, उस चौराहे से होकर गुजरती हैं। इन परिस्थितियों के अंतर्गत, उस समय विशेष में 2 या अधिक दुर्घटनाओं के होने की क्या प्रायिकता है?

हल यहाँ $n = 1000$ और $p = 0.0001$ है। क्योंकि n बहुत बड़ा और p बहुत छोटा है अत: हम अभीष्ट प्रायिकता के परिकलन हेतु प्वासों बंटन का प्रयोग कर सकते हैं। मान लीजिए कि यादृच्छिक चर X दुर्घटनाओं की संख्या निरूपित करता है।

अब P(2 या अधिक दुर्घटनाएँ)

$$= P(X \geq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$= 1 - [e^{-\lambda} + \frac{\lambda . e^{-\lambda}}{1!}]$$

$$= 1 - [e^{-0.1} + 0.1 \times e^{-0.1}] \qquad [\text{क्योंकि } \lambda = np = 0.1]$$

$$= 1-(e^{-0.1} \times 1.1)$$

$$= 1-(0.905 \times 1.1) \qquad [\text{सारणी से } e^{-0.1} = 0.905]$$

$$= 0.0045$$

प्रश्नावली 19.5

1. प्वासों बंटन के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

   (i) P(2); दिया है $\lambda = 0.7$ (ii) P(3) ; दिया है $\lambda = 2$

   (iii) P(2) ; दिया है $\lambda = 0.6$

2. मान लीजिए कि एक फैक्ट्री (दिया है) द्‌वारा उत्पादित 1 % वस्तुएँ खराब हैं। 100 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श (नमूने) में 3 या अधिक वस्तुओं के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. मान लीजिए कि 8 % लोग बाएँ हाथ से काम करते हैं (वामहस्तिक हैं)। 50 लोगों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में 4 या अधिक लोगों के वामहस्तिक होने की क्या प्रायिकता है?

4. 20 वस्तुओं के एक प्रतिदर्श में खराब वस्तुओं की औसत संख्या 1.6 है। इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक प्रतिदर्श में

   (i) 3 खराब वस्तुएँ होंगी। (ii) 3 या अधिक खराब वस्तुएँ होगी।

5. मान लीजिए कि 200 मुद्रण अशुद्‌धियाँ, 500 पृष्ठ की एक पुस्तक में आद्‌योपांत (प्रारंभ से अंत तक) यादृच्छया वितरित हैं। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक प्रदत्त पृष्ठ पर

   (i) तथ्यत: 2 अशुद्‌धियाँ हों। (ii) 2 या अधिक अशुद्‌धियाँ हों।

6. एक कारखाने में जिल्दबंद हुई पुस्तकों में से 2 % की जिल्द खराब हैं 400 जिल्दबंद पुस्तकों में से 5 पुस्तकों की जिल्द खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

7. प्रलेख (रेकार्ड) दर्शाता है कि किसी पुल को पार करते समय एक कार के खराब हाने की प्रायिकता $\frac{1}{20000}$ हैं इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पुल को पार करने वाली 10,000 कारों में से अधिकतम 2 कारें खराब होती हैं।

8. एक शहर के किसी डिपो पर एक दिन में आने वाली बसों की औसत संख्या 6 है। किसी निश्चित दिन इस डिपो में आने वाली बसों की संख्या 3 से कम होने की प्रायिकता क्या है?

   [**संकेत** $\lambda = 6, P(X < 3)$ ज्ञात कीजिए]

9. अनुभव दर्शाता है कि टेलीफोन (दूरभाष) पर आने वाले कॉल में 1.4 % नंबर आते हैं। 150 आने वाली कॉलों में 2 कॉलों के गलत नंबर होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए।

10. पुलिस रिकार्ड दर्शाता है कि एक शहर के किसी विशेष चौराहे पर प्रति माह होने वाली दुर्घटनाओं का औसत (माध्य) 5 है। दुर्घटनाओं की संख्या का वितरण एक प्वासों बंटन के अनुसार है। किसी माह में तथ्यत: 0,1, 2, 3 या 4 दुर्घटनाओं की प्रायिकताएँ निर्धारित कीजिए।

11. उपर्युक्त प्रश्न 10 में प्रति माह 3 या कम दुर्घटनाओं की प्रायिकता क्या होगी?

12. मान लीजिए कि एक कोयला खनिक की एक वर्ष के दौरान खान दुर्घटना में मारे जाने की संभावना $\frac{1}{1400}$ है। प्वासों बंटन के प्रयोग द्वारा इस बात की प्रायिकता परिकलित कीजिए कि एक ऐसी खान में, जिसमें 420 खनिक कार्यरत हैं, एक वर्ष के अंदर न्यूनतम एक घातक दुर्घटना घटित होगी।

13. अपराह्न 1 बजे से 3 बजे के बीच, एक कंपनी के स्विच-बोर्ड पर प्रति मिनट आने वाले टेलीफोन कॉलों की औसत संख्या 2.5 है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि किसी विशेष मिनट में,

(i) एक भी फोन कॉल नहीं होगा। (ii) तथ्यत: 2 फोन कॉल होंगे।

14. पासों के एक जोड़े को 200 बार फेंका जाता है। यदि पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग 9 होना एक सफलता मानी जाए, तो सफलताओं की संख्या का माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

15. एक बॉक्स में 200 टिकट हैं जिनमें से प्रत्येक पर 1 से 200 तक की संख्याएँ अंकित हैं (प्रत्येक टिकट पर केवल एक संख्या)। बॉक्स में से 20 टिकटें उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना सहित निकाली जाती हैं। अधिकतम 4 टिकटों पर अंकित संख्याओं की 20 से भाज्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

16. यदि एक प्वासों बंटन का प्रसरण 2 हो तो प्वासों बंटन के आवर्तन संबंध द्वारा $r=1; 2, 3, 4$ और 5 के लिए प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

17. मान लीजिए कि किसी यंत्र विशेष द्वारा उत्पादित एक वस्तु के खराब होने की प्रायिकता 0.2 है। यदि इस यंत्र द्वारा उत्पादित 10 वस्तुओं का यादृच्छया चयन किया जाए, तो एक से अधिक वस्तु के खराब नहीं होने की प्रायिकता क्या होगी?

18. मान लीजिए कि 614 पृष्ठ वाली पुस्तक में 43 टंकण त्रुटियाँ हैं। यदि यह त्रुटियाँ पुस्तक में आद्योपांत यादृच्छया वितरित हों, तो इस पुस्तक के यादृच्छया चुने हुए 10 पृष्ठों के त्रुटि मुक्त होने की प्रायिकता क्या होगी?

19. मान लीजिए कि एक यादृच्छिक चर X का एक प्वासों बंटन है। यदि $P(X=2) = \frac{2}{3} P(X=1)$, तो $P(X=0)$ का मान निकालिए।

20. यदि किसी नगर में रहने वाले 3 % लोग सरकारी कर्मचारी हों, तो नगर के 50 लोगों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में एक भी सरकारी कर्मचारी न पाए जाने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए। प्रतिदर्श में 3 या 3 से कम सरकारी कर्मचारियों के होने की प्रायिकता क्या है?

19.7 अनुप्रयोग (Applications)

इस अनुच्छेद में हम प्रायिकता के विभिन्न क्षेत्रों में अनुप्रयोगों पर आधारित कुछ प्रश्न पर विचार करेंगे।

उदाहरण 31 एक कार उत्पादन करने वाली कंपनी को पूर्व अनुभव से यह ज्ञात है कि कारों के मांग (आर्डर) के समय पर नौभरण हेतु तैयार होने की प्रायिकता 0.85 है और समय पर नौभरण के साथ कारों की समय पर प्रदानगी की प्रायिकता 0.75 है। इस बात की क्या प्रायिकता है एक ऐसी मांग की समय पर प्रदानगी हो जाएगी, जिसके बारे में दिया है कि वह मांग नौभरण हेतु समय पर तैयार थी?

हल मांग की नौभरण हेतु समय पर तैयार होने को घटना A और मांग की समय पर प्रदानगी को घटना B मान लीजिए।

$$P(A) = 0.85, \quad P(A \text{ और } B) = 0.75$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \text{ और } B)}{P(A)} = \frac{0.75}{0.85} = 0.88 \text{ (लगभग)}$$

अत: 88 % नौभरण की समय पर प्रदानगी हो जाएगी।

उदाहरण 32 मान लीजिए कि d_1, d_2, d_3 परस्पर अपवर्जी रोग हैं। मान लीजिए कि $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_6\}$ रोगों के दृष्टिगोचर लक्षणों का समुच्चय है। उदाहरणार्थ s_1 सांस की कमी, s_2 भार की कमी, s_3 थकावट आदि। मान लीजिए कि 10,000 रोगियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श में 3200 रोग d_1 से, 3500 रोग d_2 से और 3300 रोग d_3 से ग्रसित हैं। इसके अतिरिक्त 3100 रोग d_1 से, 3300 रोग d_2 से और 3000 रोग d_3 से ग्रसित रोगी लक्षण S प्रदर्शित करते हैं। डॉक्टर एक ऐसे रोगी के रोग का निर्धारण करना चाहते हैं, जिसके बारे में उसे ज्ञात है कि वह लक्षण S प्रदर्शित करता है। इस जानकारी के आधार पर डॉक्टर को क्या निष्कर्ष निकालना चाहिए?

हल मान लीजिए कि रोगी के रोग d_1 से ग्रसित होने को घटना D_1 से निरूपित किया जाता है। इसी प्रकार, घटनाएँ D_2 और D_3 को भी परिभाषित किया जाता है।

$$P(D_1) = \frac{3200}{10000} = 0.32,$$

$$P(D_2) = \frac{3500}{10000} = 0.35,$$

और $$P(D_3) = \frac{3300}{10000} = 0.33$$

पुन:

$$P(S \mid D_1) = \frac{P(S \cap D_1)}{P(D_1)} = \frac{3100}{3200} = 0.97 \text{ (लगभग)}$$

$$P(S \mid D_2) = \frac{3300}{3500} = 0.94 \text{ (लगभग)}$$

और $$P(S \mid D_3) = \frac{3000}{3300} = 0.91 \text{ (लगभग)}$$

बेज़-प्रमेय के प्रयोग द्वारा, हमें प्राप्त होता है कि

$P(D_1 \mid S)$ = रोगी के रोग d_1 से ग्रसित हेने की प्रायिकता जब यह ज्ञात है वह लक्षण $s_1, s_2, \ldots s_n$ प्रदर्शित करता है

$$= \frac{P(D_1)\,P(S|D_1)}{P(D_1)\,P(S|D_1) + P(D_2)\,P(S|D_2) + P(D_3\;P(S|D_3)}$$

$$= \frac{0.32 \times 0.97}{0.32 \times 0.97 + 0.35 \times 0.94 + 0.33 \times 0.91}$$

$$= \frac{0.3104}{0.3104 + 0.329 + 0.3003}$$

$$= \frac{0.3104}{0.9397} = 0.33 \text{ (लगभग)}$$

इसी प्रकार $$P(D_2 \mid S) = \frac{0.329}{0.9397} = 0.35 \text{ (लगभग)}$$

और $$P(D_3 \mid S) = \frac{0.3003}{0.9397} = 0.32 \text{ (लगभग)}$$

अत: यह जानते हुए कि रोगी लक्षण $s_1, s_2, \ldots, s_6$, प्रदर्शित करता है, उसके रोग d_1, d_2, d_3 से ग्रसित होने की प्रायिकताएँ क्रमश: 0.33, 0.35 या 0.32 हैं। अतएव डॉक्टर को यह निष्कर्ष निकालना चाहिए कि रोगी के रोग d_2 से ग्रसित होने की संभावना सर्वाधिक है।

उदाहरण 33 कार में प्रयुक्त होने वाले कुछ पुर्जों का एक निर्माता यह आश्वासन देता है कि पुर्जों के एक

बॉक्स में अधिकतम दो पुर्जे ही खराब होंगे। यदि बॉक्स में 20 पुर्जे हैं और अनुभव यह दर्शाता हो कि उसकी निर्माण प्रक्रिया में 2 % खराब पुर्जे उत्पादित होते हैं, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि पुर्जों का एक (कोई) बॉक्स उसके द्वारा दिए गए आश्वासन (प्रतिश्रुति) को पूरा करेगा?

हल इस प्रश्न को एक ऐसे द्विपद बंटन के प्रश्न के रूप में देखा जा सकता है जिसके लिए

$$n = 20,\ p = 0.02$$

निर्माता द्वारा दिए गए आश्वासन का पूर्ण होना तभी संभव है जब खराब पुर्जों की संख्या 0, 1 और 2 हो। हमें ज्ञात है कि

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

अब $P(X = 0) = {}^{20}C_0\,(0.02)^0\,(0.98)^{20} = (0.98)^{20} = 0.668$

$P(X = 1) = {}^{20}C_1\,(0.02)^1(0.98)^{19} = 20(0.02)\,(0.98)^{19} = 0.273$

$P(X = 2) = {}^{20}C_2\,(0.02)^2(0.98)^{18} = 190(0.02)^2\,(0.98)^{18} = 0.053$

(सरलीकरण के लिए लघुगणक सारणी का प्रयोग करने पर)

इसलिए $P(X \le 2) = 0.668 + 0.273 + 0.053 = 0.994$

इससे प्रकट होता है कि निर्माता द्वारा दिया गया आश्वासन लगभग सदैव पूर्ण होगा।

प्रश्नावली 19.6

1. किसी ग्रामीण क्षेत्र में किए गए अध्ययन से प्रदर्शित होता है कि एक यादृच्छया चुने गए व्यक्ति की किसी प्रकार के अपतृण के प्रति एलर्जी (प्रत्यूर्जता) की प्रायिकता $\frac{7}{20}$ है और उसकी धूल के प्रति एलर्जी की प्रायिकता $\frac{3}{17}$ है। उस व्यक्ति की धूल के प्रति एलर्जी की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि दिया हो कि उसको अपतृण के प्रति एलर्जी है।

2. एक विशेष प्रकार के विद्युत जनरेटर के कार्य प्रदर्शन का दीर्घकालीन विवरण यह प्रकट करता है कि उस प्रकार के जनरेटर के पूर्ण कार्यकाल के प्रथम 10 वर्षों में खराब होने की प्रायिकता 0.22 है। यह दिया हुआ है कि जनरेटर खराब हो गया है, इसकी सप्रतिबंध प्रायिकता कि खराबी ठीक नहीं की जा सकती 0.45 है। इस प्रकार के जनरेटर में उसके कार्यविधि के प्रथम 10 वर्षों में ठीक न हो सकने योग्य खराबी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

3. किसी विशेष रोग का पता लगाने के लिए एक परीक्षण सुस्पष्ट नहीं हैं। 90 % बार परीक्षण द्वारा रोग का पता सही लगता है, किंतु 1% बार रोग का पता सही नहीं लगता हैं। एक ऐसे बड़े जनसमुदाय से, जिसमें अनुमानित 0.2% लोगों को यह रोग है, यादृच्छया चुने गए एक व्यक्ति का उपर्युक्त परीक्षण किया जाता है और बताया जाता है कि उस व्यक्ति को यह विशेष रोग है। इसकी क्या संभावना (प्रायिकता) है कि वह व्यक्ति वास्तव में उस रोग से ग्रसित है?

[संकेत मान लीजिए कि D_1 = रोग ग्रसित लोग, D_2 = वे लोग जिन्हें रोग नहीं हैं

$P(D_1) = 0.002, P(D_2) = 0.998, P(E|D_1) = 0.90, P(E|D_2) = 0.01$, जहाँ E घटना, परीक्षण से रोग होना प्रकट होता है, को निरूपित करता है। $P(D_1|E)$ ज्ञात कीजिए।]

4. किसी फैक्ट्री में कुल उत्पादन का 30 % यंत्र A, 25% यंत्र B और शेष यंत्र C द्वारा किया जाता है। यंत्र A के उत्पादन का 1 %, यंत्र B के उत्पादन का 1.2 % और यंत्र C के उत्पादन का 2 % खराब हैं। तीनों यंत्र एक साथ कार्य करते हुए एक दिन में 10,000 वस्तुएँ बनाते हैं। एक दिन के उत्पादन से यादृच्छया निकाली गई एक वस्तु खराब पाई जाती है। इस वस्तु के यंत्र B द्वारा उत्पादित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

5. मान लीजिए कि किसी प्रकार के सेट में लगे एक रेडियो ट्यूब की 500 घंटे से अधिक कार्य करने की प्रायिकता 0.2 है। यदि हम 4 ट्यूबों का यादृच्छया परीक्षण करें, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि इनमें से तथ्यतः 3 ट्यूब 500 घंटे से अधिक कार्य करेंगी?

6. किसी प्रकार के एक घटक द्वारा दिए हुए एक प्राघात परीक्षण को सहन करने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि 5 परीक्षित घटकों में से

(i) तथ्यतः 2 घटक परीक्षण सहन कर पाएँगे। (ii) अधिकतम 3 घटक परीक्षण सहन कर पाएँगे।

7. यह ज्ञात है कि ऐसे चूहों में से, जिन्हें एक सीरम का टीका लगाया गया हो, 60 % का एक विशेष रोग से बचाव हो जाता है। यदि 5 चूहों को टीका लगा हो, तो इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(i) एक भी चूहे को वह रोग नहीं होगा। (ii) 3 से अधिक चूहों को वह रोग होगा।

8. किसी चिकित्सालय में 20 डाइलिसिस (अपोहन) यंत्र हैं और इस बात की संभावना कि किसी दिन उनमें से कोई एक खराब हो 0.02 है। किसी एक ही दिन उनमें से तथ्यतः 3 यंत्रों के खराब होने की प्रायिकता निर्धारित कीजिए।

9. मान लीजिए कि किसी विमान से गिराए गए एक बम द्वारा किसी तक्ष्य पर प्रहार करने की प्रायिकता 0.2 है। यदि 6 बम गिराए जाते हैं तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उनमें से

(i) तथ्यतः 2 बम लक्ष्य पर प्रहार करेंगे (ii) न्यूनतम 2 बम लक्ष्य पर प्रहार करेंगे।

10. एक पेंच निर्माता को ज्ञात है कि उसके उत्पादन का 4% खराब है। यदि वह 100 पेंचों से भरे बक्सों द्वारा पेंचों का विक्रय इस आश्वासन (गारंटी) के साथ करता हो कि किसी भी बक्से में 5 पेंचों से अधिक खराब नहीं होंगे, तो किसी एक बक्से द्वारा गुणवत्ता के इस आश्वासन के पूर्ण नहीं होने की प्रायिकता का निकटतम मान क्या होगा?

[संकेत अभीष्ट प्रायिकता = P(खराब पेंचों की संख्या 5 से अधिक)]

11. एक बीमा कंपनी यह ज्ञात करती है कि प्रतिवर्ष जन समुदाय का केवल 0.1% ही दुर्घटनाग्रस्त होता है। यदि जनसमुदाय से कंपनी के 1000 पालिसी धारकों को यादृच्छया चुना जाए, तो इसकी क्या प्रायिकता है कि आगामी वर्ष उसके ग्राहकों में से 5 से अधिक दुर्घटनाग्रस्त नहीं होते हैं?

12. किसी 35 वर्षीय मनुष्य के 40 वर्ष की आयु तक पहुँचने से पहले मरने की प्रायिकता 0.018 मानी जा सकती है। 400 मनुष्यों के एक ऐसे समूह से, जिसकी वर्तमान आयु 35 वर्ष है, 2 मनुष्यों के आगामी 5 वर्षों के अंदर मरने की निकटतम प्रायिकता क्या है?

13. मान लीजिए कि d_1, d_2, d_3 परस्पर अपवर्जी रोग हैं। मान लीजिए कि S इन रोगों के दृष्टिगोचर लक्षणों का समुच्चय है। 5000 रोगियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श द्वारा डॉक्टर को निम्नलिखित सूचनाएँ प्राप्त होती हैं :

1800 रोगियों को रोग d_1 था, 2100 रोगियों को रोग d_2 था और शेष रोगियों को रोग d_3 था।

1500 रोग d_1, 1200 रोग d_2 और 900 रोग d_3 के रोगियों में लक्षण S दिखाई पड़ता है। एक रोगी को इन रोगों में से किस रोग के होने की संभावना अधिक है?

14. एक निर्माता अपने उत्पादन को 10 वस्तुओं से भरे बक्सों में रख कर जहाज से भेजता है। निर्माता आश्वासन देता है कि किसी भी बक्से में रखी 10 वस्तुओं में से 2 से अधिक खराब नहीं है। यदि उसके उत्पादन में से यादृच्छया चुनी गई एक वस्तु के खराब होने की प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है, तो निर्माता द्वारा दिए गए आश्वासन के पूर्ण होने की प्रायिकता क्या है?

15. एक एयरलाइन 98 सीट वाले किसी विमान की एक विशेष उड़ान के लिए सीटों का आरक्षण स्वीकार करती है। पिछले अनुभवों से ज्ञात है कि सीटों को आरक्षित कराने वाले यात्रियों में से, वास्तव में 3% यात्रा के लिए उपस्थित नहीं होते हैं, अतः एयरलाइन की नीति है कि वह 100 यात्रियों को उड़ान के लिए सीट आरक्षित कराने की अनुमति देती है। उड़ान पर यात्रा के लिए 98 यात्रियों से अधिक के उपस्थित होने की प्रायिकता क्या है?

[संकेत $\lambda = np = 100 \times 0.03 = 3$, $P(0) + P(1)$ ज्ञात कीजिए]

सारणी I (क्रमशः)

लघुगणक

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5	9	13	17	21	26	30	34	38
						0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	18	22	26	29	33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3	7	11	14	18	21	25	28	32
						0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	6	10	13	16	19	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	7	10	13	16	19	22	25	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	15	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	14	17	20	23	26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3	6	9	11	14	17	20	23	26
						1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	19	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3	6	8	11	14	16	19	22	24
						2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3	5	8	10	13	15	18	20	23
						2430	2455	2480	2504	2529	3	5	8	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	9	12	14	17	19	21
						2672	2695	2718	2742	2765	2	4	7	9	11	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2	4	7	9	11	13	16	18	20
						2900	2923	2945	2967	2989	2	4	6	8	11	13	15	17	19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6471	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8

सारणी I

लघुगणक

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	5	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7768	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8466	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

सारणी I

प्रतिलघुगणक

.N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	3	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	3	4	5	6	6

सारणी II (क्रमश:)

प्रतिलघुगणक

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5476	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

सारणी III

वार्षिकी की धनराशि

$$S_{\overline{n}|}\, r = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

आवर्तक	दर r						
n	.0025 $\left(\frac{1}{4}\%\right)$	.005 $\left(\frac{1}{2}\%\right)$	.0075 $\left(\frac{3}{4}\%\right)$	.01 (1%)	.0125 $\left(1\frac{1}{4}\%\right)$	.015 $\left(1\frac{1}{2}\%\right)$	.0175 $\left(1\frac{3}{4}\%\right)$
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0025	2.0050	2.0075	2.0100	2.0125	2.0150	2.0175
3	3.0075	3.0150	3.0226	3.0301	3.0377	3.0452	3.0528
4	4.0150	4.0301	4.0452	4.0604	4.0756	4.0909	4.1062
5	5.0251	5.0503	5.0756	5.1010	5.1266	5.1523	5.1781
6	6.0376	6.0755	6.1136	5.1520	6.1907	6.2296	6.2687
7	7.0527	7.1059	7.1595	7.2135	7.2680	7.3230	7.3784
8	8.0704	8.1414	8.2132	8.2857	8.3589	8.4328	8.5075
9	9.0905	9.1821	9.2748	9.3685	9.4634	9.5593	9.6564
10	10.1133	10.2280	10.3443	10.4622	10.5817	10.7027	10.8254
11	11.1385	11.2792	11.4219	11.5668	11.7139	11.8633	12.0148
12	12.1664	12.3356	12.5076	12.6825	12.8604	13.0412	13.2251
13	13.1968	13.3972	13.6014	13.8093	14.0211	14.2368	14.4565
14	14.2298	14.4642	14.7034	14.9474	15.1964	15.4504	15.7095
15	15.2654	15.5365	15.8137	16.0969	16.3863	16.6821	16.9844
16	16.3035	16.6142	16.9323	17.2579	17.5912	17.9324	18.2816
17	17.3443	17.6973	18.0593	18.4304	18.8111	19.2014	19.6016
18	18.3876	18.7858	19.1947	19.6147	20.0462	20.4894	20.9446
19	19.4336	19.8797	20.3387	20.8109	21.2968	21.7967	22.3112
20	20.4822	20.9791	21.4912	22.0190	22.5630	23.1237	23.7016
21	21.5334	22.0840	22.6524	23.2392	23.8450	24.4705	25.1164
22	22.5872	23.1944	23.8223	24.4716	25.1431	25.8376	26.5559
23	23.6437	24.3104	25.0010	25.7163	26.4574	27.2251	28.0207
24	24.7028	25.4320	26.1885	26.9735	27.7881	28.6335	29.5110
25	25.7646	26.5591	27.3849	28.2432	29.1354	30.0630	31.0275
26	26.8290	27.6919	28.5903	29.5256	30.4996	31.5140	32.5704
27	27.8961	28.8304	29.8047	30.8209	31.8809	32.9867	34.1404
28	28.9658	29.9745	31.0282	32.1291	33.2794	34.4815	35.7379
29	30.0382	31.1244	32.2609	33.4504	34.6954	35.9987	37.3633
30	31.1133	32.2800	33.5029	34.7849	36.1291	37.5387	39.0172
31	32.1911	33.4414	34.7542	36.1327	37.5807	39.1018	40.7000
32	33.2716	34.6086	36.0148	37.4941	39.0504	40.6883	42.4122
33	34.3547	35.7817	37.2849	38.8690	40.5386	42.2986	44.1544
34	35.4406	36.9606	38.5646	40.2577	42.0453	43.9331	45.9271
35	36.5292	38.1454	39.8538	41.6603	43.5709	45.5921	47.7308
36	37.6206	39.3361	41.1527	43.0769	45.1155	47.2760	49.5661
37	38.7146	40.5328	42.4614	44.5076	46.6794	48.9851	51.4335
38	39.8114	41.7354	43.7798	45.9527	48.2629	50.7199	53.3336
39	40.9109	42.9441	45.1082	47.4123	49.8662	52.4807	55.2670
40	42.0132	44.1588	46.4465	48.8864	51.4896	54.2679	57.2341
41	43.1182	45.3796	47.7948	50.3752	53.1332	56.0819	59.2357
42	44.2260	46.6065	49.1533	51.8790	54.7973	57.9231	61.2724
43	45.3366	47.8396	50.5219	53.3978	56.4823	59.7920	63.3446
44	46.4499	49.0788	51.9009	54.9318	58.1883	61.6889	65.4532
45	47.5661	50.3242	53.2901	56.4811	59.9157	63.6142	67.5986
46	48.6850	51.5758	54.6898	58.0459	61.6646	65.5684	69.7816
47	49.8067	52.8337	56.1000	59.6263	63.4354	67.5519	72.0027
48	50.9312	54.0978	57.5207	61.2226	65.2284	69.5652	74.2628
49	52.0585	55.3683	58.9521	62.8348	67.0437	71.6087	76.5624
50	53.1887	56.6452	60.3943	64.4632	68.8818	73.6828	78.9022

सारणी III

वार्षिकी की धनराशि

$$S_{\overline{n}|}\, r = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

आवर्तक	दर r						
n	.02 (2%)	.025 $\left(2\frac{1}{2}\%\right)$	.03 (3%)	.035 $\left(3\frac{1}{2}\%\right)$	.04 (4%)	.045 $\left(4\frac{1}{2}\%\right)$	.05 (5%)
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0200	2.0250	2.0300	2.0350	2.0400	2.0450	2.0500
3	3.0604	3.0756	3.0909	3.1062	3.1216	3.1370	3.1525
4	4.1216	4.1525	4.1836	4.2149	4.2465	4.2782	4.3101
5	5.2040	5.2563	5.3091	5.3625	5.4163	5.4707	5.5256
6	6.3081	6.3877	6.4684	6.5502	6.6330	6.7169	6.8019
7	7.4343	7.5474	7.6625	7.7794	7.8983	8.0192	8.1420
8	8.5830	8.7361	8.8923	9.0517	9.2142	9.3800	9.5491
9	9.7546	9.9545	10.1591	10.3685	10.5828	10.8021	11.0266
10	10.9497	11.2034	11.4639	11.7314	12.0061	12.2882	12.5779
11	12.1687	12.4835	12.8078	13.1420	13.4864	13.8412	14.2068
12	13.4121	13.7956	14.1920	14.6020	15.0258	15.4640	15.9171
13	14.6803	15.1404	15.6178	16.1130	16.6268	17.1599	17.7130
14	15.9739	16.5190	17.0863	17.6770	18.2919	18.9321	19.5986
15	17.2934	17.9319	18.5989	19.2957	20.0236	20.7841	21.5786
16	18.6393	19.3802	20.1569	20.9710	21.8245	22.7193	23.6575
17	20.0121	20.8647	21.7616	22.7050	23.6975	24.7417	25.8404
18	21.4123	22.3863	23.4144	24.4997	25.6454	26.8551	28.1324
19	22.8406	23.9460	25.1169	26.3572	27.6712	29.0636	30.5390
20	24.2974	25.5447	26.8704	28.2797	29.7781	31.3714	33.0660
21	25.7833	27.1833	28.6765	30.2695	31.9692	33.7831	35.7193
22	27.2990	28.8629	30.5368	32.3289	34.2480	36.3034	38.5052
23	28.8450	30.5844	32.4529	34.4604	36.6179	38.9370	41.4305
24	30.4219	32.3490	34.4265	36.6665	39.0826	41.6892	44.5020
25	32.0303	34.1578	36.4593	38.9499	41.6459	44.5652	47.7271
26	33.6709	36.0117	38.5530	41.3131	44.3117	47.5706	51.1135
27	35.3443	37.9120	40.7096	43.7591	47.0842	50.7113	54.6691
28	37.0512	39.8598	42.9309	46.2906	49.9676	53.9933	58.4026
29	38.7922	41.4563	45.2189	48.9108	52.9663	57.4230	62.3227
30	40.4681	43.9027	47.5754	51.6227	56.0849	61.0071	66.4388
31	42.3794	46.0003	50.0027	54.4295	59.3283	64.7524	70.7608
32	44.2270	48.1503	52.5028	57.3345	62.7015	68.6662	75.2988
33	46.1116	50.3540	55.0778	60.3412	66.2095	72.7562	80.0638
34	48.0338	52.6129	57.7302	63.4532	69.8579	77.0303	85.0670
35	49.9945	54.9282	60.4621	66.6740	73.6522	81.4966	90.3203
36	51.9944	57.3014	63.2759	70.0076	77.5983	86.1640	95.8363
37	54.0343	59.7339	66.1742	73.4579	81.7022	91.0413	101.6281
38	56.1149	62.2273	69.1595	77.0289	85.9703	96.1382	107.7095
39	58.2372	64.7930	72.2342	80.7249	90.4091	101.4644	114.0950
40	60.4020	67.4026	75.4013	84.5503	95.0255	107.0303	120.7998
41	62.6100	70.0876	78.6633	88.5095	99.8265	112.8467	127.8398
42	64.8622	72.8398	82.0232	92.6074	104.8196	118.9248	135.2318
43	67.1595	75.6608	85.4839	96.8486	110.0124	125.2764	142.9933
44	69.5027	78.5523	89.0484	101.2383	115.4129	131.9138	151.1430
45	71.8927	81.5161	92.7199	105.7817	121.0294	138.8500	159.7002
46	74.3306	84.5540	96.5015	110.4840	126.8706	146.0982	168.6852
47	76.8172	87.6679	100.3965	115.3510	132.9454	153.6726	178.1194
48	79.3535	90.8596	104.4084	120.3883	139.2632	161.5879	188.0254
49	81.9406	94.1311	108.5406	125.6018	145.8337	169.8594	198.4267
50	84.5794	97.4843	112.7969	130.9979	152.6671	178.5030	209.3480

सारणी III
वार्षिकी की धनराशि

$$S_{\overline{n}|}r = \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

आवर्तक	वर r					
n	.055 $\left(5\frac{1}{2}\%\right)$	.06 (6%)	.065 $\left(6\frac{1}{2}\%\right)$	.07 (7%)	.075 $\left(7\frac{1}{2}\%\right)$	.08 (8%)
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0550	2.0600	2.0650	2.0700	2.0750	2.0800
3	3.1680	3.1836	3.1992	3.2149	3.2306	3.2464
4	4.3423	4.3746	4.4072	4.4399	4.4729	4.5061
5	5.5811	5.6371	5.6936	5.7507	5.8084	5.8666
6	6.8881	6.9753	7.0637	7.1533	7.2440	7.3359
7	8.2669	8.3938	8.5229	8.6540	8.7873	8.9228
8	9.7216	9.8975	10.0769	10.2598	10.4464	10.6366
9	11.2563	11.4913	11.7319	11.9780	12.2298	12.4876
10	12.8754	13.1808	13.7944	13.8164	14.1471	14.4866
11	14.5835	14.9716	15.3716	15.7836	16.2081	16.6455
12	16.3856	16.8699	17.3707	17.8885	18.4237	18.9771
13	18.2868	18.8821	19.4998	20.1406	20.8055	21.4953
14	20.2926	21.0151	21.7673	22.5505	23.3659	24.2149
15	22.4087	23.2760	24.1822	25.1290	26.1184	27.1521
16	24.6411	25.6725	26.7540	27.8881	29.0772	30.3243
17	26.9964	28.2129	29.4930	30.8402	32.2580	33.7502
18	29.4812	30.9057	32.4101	33.9990	35.6774	37.4502
19	32.1027	33.7600	35.5167	37.3790	39.3532	41.4463
20	34.8683	36.7856	38.8253	40.9955	43.3047	45.7620
21	37.7861	39.9927	42.3490	44.8652	47.5525	50.4229
22	40.8643	43.3923	46.1016	49.0057	52.1190	55.4568
23	44.1118	46.9958	50.0982	53.4361	57.0279	60.8933
24	47.5380	50.8156	54.3546	58.1767	62.3050	66.7648
25	51.1526	54.8645	58.8877	63.2490	67.9779	73.1059
26	54.9660	59.1564	63.7154	68.6765	74.0762	79.9544
27	58.9891	63.7058	68.8569	74.4838	80.6319	87.3508
28	63.2335	68.5281	74.3326	80.6977	87.6793	95.3388
29	67.7114	73.6398	80.1642	87.3465	95.2553	103.9659
30	72.4355	79.0582	86.3749	94.4608	103.3994	113.2832
31	77.4194	84.8017	92.9892	102.0730	112.1544	123.3459
32	82.6775	90.8898	100.0335	110.2182	121.5659	134.2135
33	88.2248	97.3432	107.5357	118.9334	131.6834	145.9506
34	94.0771	104.1838	115.5255	128.2588	142.5596	158.6267
35	100.2514	111.4348	124.0347	138.2369	154.2516	172.3168
36	106.7652	119.1209	133.0969	148.9135	166.8205	187.1021
37	113.6373	127.2681	142.7482	160.3374	180.3320	203.0703
38	120.8873	135.9042	153.0269	172.5610	194.8569	220.3159
39	128.5361	145.0585	163.9736	185.6403	210.4712	238.9412
40	136.6056	154.7620	175.6319	199.6351	227.2565	259.0565
41	145.1189	165.0477	188.0480	214.6096	245.3008	280.7810
42	154.1005	175.9505	201.2711	230.6322	264.6983	304.2435
43	163.5760	187.5076	215.3537	247.7765	285.5507	329.5830
44	173.5727	199.7580	230.3517	266.1209	307.9670	356.9496
45	184.1192	212.7435	246.3246	285.7493	332.0645	386.5056
46	195.2457	226.5081	263.3357	306.7518	357.9694	418.4261
47	206.9842	241.0986	281.4525	329.2244	385.8171	452.9002
48	219.3684	256.5645	300.7469	353.2701	415.7533	490.1322
49	232.4336	272.9584	321.2955	378.9990	447.9348	530.3427
50	246.2175	290.3359	343.1797	406.5289	482.5299	573.7702

सारणी IV

वार्षिकी का वर्तमान मूल्य

$$a_{\overline{n}|}r = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

आवर्तक	दर r						
n	.0025 $\left(\frac{1}{4}\%\right)$	.005 $\left(\frac{1}{2}\%\right)$	.0075 $\left(\frac{3}{4}\%\right)$	.01 (1%)	.0125 $\left(1\frac{1}{4}\%\right)$	.015 $\left(1\frac{1}{2}\%\right)$	.0175 $\left(1\frac{3}{4}\%\right)$
1	0.9975	0.9950	0.9926	0.9901	0.9877	0.9852	0.9828
2	1.9925	1.9851	1.9777	1.9704	1.9631	1.9559	1.9487
3	2.9851	2.9702	2.9556	2.9410	2.9265	2.9122	2.8980
4	3.9751	3.9505	3.9261	3.9020	3.8781	3.8544	3.8309
5	4.9627	4.9259	4.8894	4.8535	4.8178	4.7826	4.7479
6	5.9478	5.8964	5.8456	5.7955	5.7460	5.6972	5.6490
7	6.9305	6.8621	6.7946	6.7282	6.6627	6.5982	6.5346
8	7.9107	7.8230	7.7366	7.6517	7.5681	7.4859	7.4051
9	8.8885	8.7791	8.6716	8.5660	8.4623	8.3605	8.2605
10	9.8639	9.7304	9.5996	9.4713	9.3455	9.2222	9.1012
11	10.8368	10.6770	10.5207	10.3676	10.2178	10.0711	9.9275
12	11.8073	11.6189	11.4349	11.2551	11.0793	10.9075	10.7395
13	12.7753	12.5562	12.3423	12.1337	11.9302	11.7315	11.5376
14	13.7410	13.4887	13.2430	13.0037	12.7706	12.5434	12.3220
15	14.7042	14.4166	14.1370	13.8651	13.6005	13.3432	13.0929
16	15.6650	15.3399	15.0243	14.7179	14.4203	14.1313	13.8505
17	16.6235	16.2586	15.9050	15.5623	15.2299	14.9076	14.5951
18	17.5795	17.1728	16.7792	16.3983	16.0295	15.6726	15.3269
19	18.5332	18.0824	17.6468	17.2260	16.8193	16.4262	16.0461
20	19.4845	18.9874	18.5080	18.0456	17.5993	17.1686	16.7529
21	20.4334	19.8880	19.3628	18.8570	18.3697	17.9001	17.4475
22	21.3800	20.7841	20.2112	19.6604	19.1306	18.6208	18.1303
23	22.3241	21.6757	21.0533	20.4558	19.8820	19.3309	18.8012
24	23.2660	22.5629	21.8891	21.2434	20.6242	20.0304	19.4607
25	24.2055	23.4456	22.7188	22.0232	21.3573	20.7196	20.1088
26	25.1426	24.3240	23.5422	22.7952	22.0813	21.3986	20.7457
27	26.0774	25.1980	24.3595	23.5596	22.7963	22.0676	21.3717
28	27.0099	26.0677	25.1707	24.3164	23.5025	22.7267	21.9870
29	27.9400	26.9330	25.9759	25.0658	24.2000	23.3761	22.5916
30	28.8679	27.7941	26.7751	25.8077	24.8889	24.0158	23.1858
31	29.7934	28.6508	27.5683	26.5423	25.5693	24.6461	23.7699
32	30.7166	29.5033	28.3557	27.2696	26.2413	25.2671	24.3439
33	31.6375	30.3515	29.1371	27.9897	26.9050	25.8790	24.9080
34	32.5561	31.1955	29.9128	28.7027	27.5605	26.4817	25.4624
35	33.4724	32.0354	30.6827	29.4086	28.2079	27.0756	26.0073
36	34.3865	32.8710	31.4468	30.1075	28.8473	27.6607	26.5428
37	35.2982	33.7052	32.2053	30.7995	29.4788	28.2371	27.0690
38	36.2077	34.5299	32.9581	31.4847	30.1025	28.8051	27.5863
39	37.1149	35.3531	33.7053	32.1630	30.7185	29.3646	28.0946
40	38.0199	36.1722	34.4469	32.8347	31.3269	29.9158	28.5942
41	38.9226	36.9873	35.1831	33.4997	31.9278	30.4590	29.0852
42	39.8230	37.7983	35.9137	34.1581	32.5213	30.9941	29.5678
43	40.7212	38.6053	36.6389	34.8100	33.1075	31.5212	30.0421
44	41.6172	39.4082	37.3587	35.4555	33.6864	32.0406	30.5082
45	42.5109	40.2072	38.0732	36.0945	34.2582	32.5523	30.9663
46	43.4024	41 0022	38.7823	36.7272	34.8229	33.0565	31.4165
47	44.2916	41.7932	39.4862	37.3537	35.2806	33.5532	31.8589
48	45.1787	42.5803	40.1848	37.9740	35.9315	34.0426	32.2938
49	46.0635	43.3635	40.8782	38.5881	36.4755	34.5247	32.7212
50	46.9462	44.1428	41.5664	39.1961	37.0129	34.9997	33.1412

सारणी IV
वार्षिकी का वर्तमान मूल्य

$$a_{\overline{n}|}\, r = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

आवर्तक	दर r						
n	.02 (2%)	.025 $\left(2\frac{1}{2}\%\right)$	.03 (3%)	.035 $\left(3\frac{1}{2}\%\right)$	.04 (4%)	.045 $\left(4\frac{1}{2}\%\right)$	.05 (5%)
1	0.9804	0.9756	0.9709	0.9662	0.9615	0.9569	0.9524
2	1.9416	1.9274	1.9135	1.8997	1.8861	1.8727	1.8594
3	2.8839	2.8560	2.8286	2.8016	2.7751	2.7490	2.7232
4	3.8077	3.7620	3.7171	3.6731	3.6299	3.5875	3.5460
5	4.7135	4.6458	4.5797	4.5151	4.4518	4.3900	4.3295
6	5.6014	5.5081	5.4172	5.3286	5.2421	5.1579	5.0757
7	6.4720	6.3494	6.2303	6.1145	6.0021	5.8927	5.7864
8	7.3255	7.1701	7.0197	6.8740	6.7327	6.5959	6.4632
9	8.1622	7.9709	7.7861	7.6077	7.4353	7.2688	7.1078
10	8.9826	8.7521	8.5302	8.3166	8.1109	7.9127	7.7217
11	9.7868	9.5142	9.2526	9.0016	8.7605	8.5289	8.3064
12	10.5753	10.2578	9.9540	9.6633	9.3851	9.1186	8.8633
13	11.3484	10.9832	10.6350	10.3027	9.9856	9.6829	9.3936
14	12.1062	11.6909	11.2961	10.9205	10.5631	10.2228	9.8986
15	12.8493	12.3814	11.9379	11.5174	11.1184	10.7395	10.3797
16	13.5777	13.0550	12.5611	12.0941	11.6523	11.2340	10.8378
17	14.2919	13.7122	13.1661	12.6513	12.1657	11.7072	11.2741
18	14.9920	14.3534	13.7535	13.1897	12.6593	12.1600	11.6896
19	15.6785	14.9789	14.3238	13.7098	13.1339	12.5933	12.0853
20	16.3514	15.5892	14.8775	14.2124	13.5903	13.0079	12.4622
21	17.0112	16.1845	15.4150	14.6980	14.0292	13.4047	12.8212
22	17.6580	16.7654	15.9369	15.1671	14.4511	13.7844	13.1630
23	18.2922	17.3321	16.4436	15.6204	14.8568	14.1478	13.4886
24	18.9139	17.8850	16.9355	16.0584	15.2470	14.4955	13.7986
25	19.5235	18.4244	17.4131	16.4815	15.6221	14.8282	14.0939
26	20.1210	18.9506	17.8768	16.8904	15.9828	15.1466	14.3752
27	20.7069	19.4640	18.3270	17.2854	16.3296	15.4513	14.6430
28	21.2813	19.9649	18.7641	17.6670	16.6631	15.7429	14.8981
29	21.8444	20.4535	19.1885	18.0358	16.9837	16.0219	15.1411
30	22.3965	20.9303	19.6004	18.3920	17.2920	16.2889	15.3725
31	22.9377	21.3954	20.0004	18.7363	17.5885	16.5444	15.5928
32	23.4683	21.8492	20.3888	19.0689	17.8736	16.7889	15.8027
33	23.9886	22.2919	20.7658	19.3902	18.1476	17.0229	16.0025
34	24.4986	22.7238	21.1318	19.7007	18.4112	17.2468	16.1929
35	24.9986	23.1452	21.4872	20.0007	18.6646	17.4610	16.3742
36	25.4888	23.5563	21.8323	20.2905	18.9083	17.6660	16.5469
37	25.9695	23.9573	22.1672	20.5705	19.1426	17.8622	16.7113
38	26.4406	24.3486	22.4925	20.8411	19.3679	18.0500	16.8679
39	26.9026	24.7303	22.8082	21.1025	19.5845	18.2297	17.0170
40	27.3555	25.1028	23.1148	21.3551	19.7928	18.4016	17.1591
41	27.7995	25.4661	23.4124	21.5991	19.9931	18.5661	17.2944
42	28.2348	25.8206	23.7014	21.4349	20.1856	18.7235	17.4232
43	28.6616	26.1664	23.9819	22.0627	20.3708	18.8742	17.5459
44	29.0800	26.5038	24.2543	22.2828	20.5488	19.0184	17.6628
45	29.4902	26.8330	24.5187	22.4955	20.7200	19.1563	17.7741
46	29.8923	27.1542	24.7754	22.7009	20.8847	19.2884	17.8801
47	30.2866	27.4675	25.0247	22.8994	21.0429	19.4147	17.9810
48	30.6731	27.7732	25.2667	23.0912	21.1951	19.5356	18.0772
49	31.0521	28.0714	25.5017	23.2766	21.3415	19.6513	18.1687
50	31.4236	28.3623	25.7298	23.4556	21.4822	19.7620	18.2559

सारणी IV

वार्षिकी का वर्तमान मूल्य

$$a_{\overline{n}|}\, r = \frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

आवर्तक	दर r					
n	.055 $\left(5\frac{1}{2}\%\right)$	.06 (6%)	.065 $\left(6\frac{1}{2}\%\right)$	.07 (7%)	.075 $\left(7\frac{1}{2}\%\right)$	.08 (8%)
1	0.9579	0.0434	0.9390	0.9346	0.9302	0.9259
2	1.8463	1.8334	1.8206	1.8080	1.7956	1.7833
3	2.6979	2.6730	2.6485	2.6243	2.6005	2.5771
4	3.5052	3.4651	3.4258	3.3872	3.3493	3.3121
5	4.2703	4.2124	4.1557	4.1002	4.0459	3.992
6	4.9955	4.9173	4.8410	4.7665	4.6938	4.6229
7	5.6830	5.5824	5.4845	5.3893	5.2966	5.2064
8	6.3346	6.2098	6.0888	5.9713	5.8573	5.7466
9	6.9522	6.8017	6.6561	6.5152	6.3789	6.2469
10	7.5376	7.3601	7.1888	7.0236	6.8641	6.7101
11	8.0925	7.8869	7.6890	7.4987	7.3154	7.1390
12	8.6185	8.3838	8.1587	7.9427	7.7353	7.5361
13	9.1171	8.8527	8.5997	8.3577	8.1258	7.9038
14	9.5896	9.2950	9.0138	8.7455	8.4892	8.2442
15	10.0376	9.7122	9.4027	9.1079	8.8271	8.5595
16	10.4622	10.1059	9.7678	9.4467	9.1415	8.8514
17	10.8646	10.4773	10.1106	9.7632	9.4340	9.1216
18	11.2461	10.8276	10.4325	10.0591	9.7060	9.3719
19	11.6077	11.1581	10.7347	10.3356	9.9591	9.6036
20	11.9504	11.4699	11.0185	10.5940	10.1945	9.8181
21	12.2752	11.7641	11.2850	10.8355	10.4135	10.0168
22	12.5832	12.0416	11.5352	11.0612	10.6172	10.2007
23	12.8750	12.3034	11.7701	11.2722	10.8067	10.3711
24	13.1517	12.5504	11.9907	11.4693	10.9830	10.5288
25	13.4139	12.7834	12.1979	11.6536	11.1469	10.6748
26	13.6625	13.0032	12.3924	11.8258	11.2995	10.8100
27	13.8981	13.2105	12.5750	11.9867	11.4414	10.9352
28	14.1214	13.4062	12.7465	12.1371	11.5734	11.0511
29	14.3331	13.5907	12.9075	12.2777	11.6962	11.1584
30	14.5337	13.7648	13.0587	12.4090	11.8104	11.2578
31	14.7239	13.9291	13.2006	12.5318	11.9166	11.3498
32	14.9042	14.0840	13.3339	12.6466	12.0155	11.4350
33	15.0751	14.2302	13.4591	12.7538	12.1074	11.5139
34	15.2370	14.3681	13.5766	12.8540	12.1929	11.5869
35	15.3906	14.4982	13.6870	12.9477	12.2725	11.6546
36	15.5361	14.6210	13.7906	13.0352	12.3465	11.7172
37	15.6740	14.7368	13.8892	13.1170	12.4154	11.7752
38	15.8047	14.8460	13.9792	13.1935	12.4794	11.8289
39	15.9287	14.9491	14.0650	13.2649	12.5390	11.8786
40	16.0461	15.0463	14.1455	13.3317	12.5944	11.9246
41	16.1575	15.1380	14.2212	13.3941	12.6460	11.9672
42	16.2630	15.2245	14.2922	13.4524	12.6939	12.0067
43	16.3630	15.3062	14.3588	13.5070	12.7385	12.0432
44	16.4579	15.3832	14.4214	13.5579	12.7800	12.0771
45	16.5477	15.4558	14.4802	13.6055	12.8186	12.1084
46	16.6329	15.5244	14.5354	13.6500	12.8545	12.1374
47	16.7137	15.5890	14.5873	13.6916	12.8879	12.1643
48	16.7902	15.6500	14.6359	13.7305	12.9190	12.1891
49	16.8628	15.7076	14.6816	13.7668	12.9479	12.2122
50	16.9315	15.7619	14.7245	13.8007	12.9748	12.2335

सारणी V
द्विपद प्रायिकताएँ

		p								
n	X	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
2	0	.8100	.6400	.4900	.3600	.2500	.1600	.0900	.0400	.0100
	1	.1800	.3200	.4200	.4800	.5000	.4800	.4200	.3200	.1800
	2	.0100	.0400	.0900	.1600	.2500	.3600	.4900	.6400	.8100
3	0	.7290	.5120	.3430	.2160	.1250	.0640	.0270	.0080	.0010
	1	.2430	.3840	.4410	.4320	.3750	.2880	.1890	.0960	.0270
	2	.0270	.0960	.1890	.2880	.3750	.4320	.4410	.3840	.2430
	3	.0010	.0080	.0270	.0640	.1250	.2160	.3430	.5120	.7290
4	0	.6561	.4096	.2401	.1296	.0625	.0256	.0081	.0016	.0001
	1	.2916	.4096	.4116	.3456	.2500	.1536	.0756	.0256	.0036
	2	.0486	.1536	.2646	.3456	.3750	.3456	.2646	.1536	.0486
	3	.0036	.0256	.0756	.1536	.2500	.3456	.4116	.4096	.2916
	4	.0001	.0016	.0081	.0256	.0625	.1296	.2401	.4096	.6561
5	0	.5905	.3277	.1681	.0778	.0313	.0102	.0024	.0003	
	1	.3281	.4096	.3602	.2592	.1562	.0768	.0284	.0064	.0004
	2	.0729	.2048	.3087	.3456	.3125	.2304	.1323	.0512	.0081
	3	.0081	.0512	.1323	.2304	.3125	.3456	.3087	.2048	.0729
	4	.0004	.0064	.0284	.0768	.1562	.2592	.3602	.4096	.3281
	5		.0003	.0024	.0102	.0313	.0778	.1681	.3277	.5905
6	0	.5314	.2621	.1176	.0467	.0156	.0041	.0007	.0001	
	1	.3543	.3932	.3025	.1866	.0938	.0369	.0102	.0015	.0001
	2	.0984	.2458	.3241	.3110	.2344	.1382	.0595	.0154	.0012
	3	.0146	.0819	.1852	.2765	.3125	.2765	.1852	.0819	.0146
	4	.0012	.0154	.0595	.1382	.2344	.3110	.3241	.2458	.0984
	5	.0001	.0015	.0102	.0369	.0938	.1866	.3025	.3932	.3543
	6		.0001	.0007	.0041	.0156	.0467	.1176	.2621	.5314
7	0	.4783	.2097	.0824	.0280	.0078	.0016	.0002		
	1	.3720	.3670	.2471	.1306	.0547	.0172	.0036	.0004	
	2	.1240	.2753	.3177	.2613	.1641	.0774	.0250	.0043	.0002
	3	.0230	.1147	.2269	.2903	.2734	.1935	.0972	.0287	.0026
	4	.0026	.0287	.0972	.1935	.2734	.2903	.2269	.1147	.0230
	5	.0002	.0043	.0250	.0774	.1641	.2613	.3177	.2753	.1240
	6		.0004	.0036	.0172	.0547	.1306	.2471	.3670	.3720
	7			.0002	.0016	.0078	.0280	.0824	.2097	.4783
8	0	.4305	.1678	.0576	.0168	.0039	.0007	.0001		
	1	.3826	.3355	.1976	.0896	.0312	.0079	.0012	.0001	
	2	.1488	.2936	.2965	.2090	.1094	.0413	.0100	.0011	
	3	.0331	.1468	.2541	.2787	.2188	.1239	.0467	.0092	.0004
	4	.0046	.0459	.1361	.2322	.2734	.2322	.1361	.0459	.0046
	5	.0004	.0092	.0467	.1239	.2188	.2787	.2541	.1468	.0331
	6		.0011	.0100	.0413	.1094	.2090	.2965	.2936	.1488
	7		.0001	.0012	.0079	.0312	.0896	.1976	.3355	.3826
	8			.0001	.0007	.0039	.0168	.0576	.1678	.4305

सारणी V
द्विपद प्रायिकताएँ

		p								
n	**X**	**.10**	**.20**	**.30**	**.40**	**.50**	**.60**	**.70**	**.80**	**.90**
9	0	.3874	.1342	.0404	.0101	.0020	.0003			
	1	.3874	.3020	.1556	.0605	.0176	.0035	.0004		
	2	.1722	.3020	.2668	.1612	.0703	.0212	.0039	.0003	
	3	.0446	.1762	.2668	.2508	.1641	.0743	.0210	.0028	.0001
	4	.0074	.0661	.1715	.2508	.2461	.1672	.0735	.0165	.0008
	5	.0008	.0165	.0735	.1672	.2461	.2508	.1715	.0661	.0074
	6	.0001	.0028	.0210	.0743	.1641	.2508	.2668	.1762	.0446
	7		.0003	.0039	.0212	.0703	.1612	.2668	.3020	.1722
	8			.0004	.0035	.0176	.0605	.1556	.3020	.3874
	9				.0003	.0020	.0101	.0404	.1342	.3874
10	0	.3487	.1074	.0282	.0060	.0010	.0001			
	1	.3874	.2684	.1211	.0403	.0098	.0016	.0001		
	2	.1937	.3020	.2335	.1209	.0439	.0106	.0014	.0001	
	3	.0574	.2013	.2668	.2150	.1172	.0425	.0090	.0008	
	4	.0112	.0881	.2001	.2508	.2051	.1115	.0368	.0055	.0001
	5	.0015	.0264	.1029	.2007	.2461	.2007	.1029	.0264	.0015
	6	.0001	.0055	.0368	.1115	.2051	.2508	.2001	.0881	.0112
	7		.0008	.0090	.0425	.1172	.2150	.2668	.2013	.0574
	8		.0001	.0014	.0106	.0439	.1209	.2335	.3020	.1937
	9			.0001	.0016	.0098	.0403	.1211	.2684	.3874
	10				.0001	.0010	.0060	.0282	.1074	.3487
11	0	.3138	.0859	.0198	.0036	.0005				
	1	.3835	.2362	.0932	.0266	.0054	.0007			
	2	.2131	.2953	.1998	.0887	.0269	.0052	.0005		
	3	.0710	.2215	.2568	.1774	.0806	.0234	.0037	.0002	
	4	.0158	.1107	.2201	.2365	.1611	.0701	.0173	.0017	
	5	.0025	.0388	.1321	.2207	.2256	.1471	.0566	.0097	.0003
	6	.0003	.0097	.0566	.1471	.2256	.2207	.1321	.0388	.0025
	7		.0017	.0173	.0701	.1611	.2365	.2201	.1107	.0158
	8	.0002	.0037	.0234	.0806	.1774	.2568	.2215	.0710	
	9			.0005	.0052	.0269	.0887	.1998	.2953	.2131
	10				.0007	.0054	.0266	.0932	.2362	.3835
	11					.0005	.0036	.0198	.0859	.3138
12	0	.2824	.0687	.0138	.0022	.0002				
	1	.3766	.2062	.0712	.0174	.0029	.0003			
	2	.2301	.2835	.1678	.0639	.0161	.0025	.0002		
	3	.0852	.2362	.2397	.1419	.0537	.0125	.0015	.0001	
	4	.0213	.1329	.2311	.2128	.1209	.0420	.0078	.0005	
	5	.0038	.0532	.1585	.2270	.1934	.1009	.0291	.0033	
	6	.0005	.0155	.0792	.1766	.2256	.1766	.0792	.0155	.0005
	7		.0033	.0291	.1009	.1934	.2270	.1585	.0532	.0038
	8		.0005	.0078	.0420	.1208	.2128	.2311	.1329	.0213
	9		.0001	.0015	.0125	.0537	.1419	.2397	.2362	.0852
	10			.0002	.0025	.0161	.0639	.1678	.2835	.2301
	11				.0003	.0029	.0174	.0712	.2062	.3766
	12					.0002	.0022	.0138	.0687	.2824

सारणी V

द्विपद प्रायिकताएँ

		p								
n	X	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.80	.90
13	0	.2542	.0550	.0097	.0013	.0001				
	1	.3672	.1787	.0540	.0113	.0016	.0001			
	2	.2448	.2680	.1388	.0453	.0095	.0012	.0001		
	3	.0997	.2457	.2181	.1107	.0349	.0065	.0006		
	4	.0277	.1535	.2337	.1845	.0873	.0243	.0034	.0002	
	5	.0055	.0691	.1803	.2214	.1571	.0656	.0142	.0011	
	6	.0008	.0230	.1030	.1968	.2095	.1312	.0442	.0058	.0001
	7	.0001	.0058	.0442	.1312	.2095	.1968	.1030	.0230	.0008
	8		.0011	.0142	.0656	.1571	.2214	.1803	.0691	.0055
	9		.0002	.0034	.0243	.8073	.1845	.2337	.1535	.0277
	10			.0006	.0065	.0349	.1107	.2181	.2457	.0997
	11			.0001	.0012	.0095	.0453	.1388	.2680	.2448
	12				.0001	.0016	.0113	.0540	.1787	.3672
	13					.0001	.0013	.0097	.0550	.2542
14	0	.2288	.0440	.0068	.0008	.0001				
	1	.3559	.1539	.0407	.0073	.0009	.0001			
	2	.2570	.2501	.1134	.0317	.0056	.0006			
	3	.1142	.2501	.1943	.0845	.0222	.0033	.0002		
	4	.0349	.1720	.2290	.1549	.0611	.0136	.0014		
	5	.0078	.0860	.1963	.2066	.1222	.0408	.0066	.0003	
	6	.0013	.0322	.1262	.2066	.1833	.0918	.0232	.0020	
	7	.0002	.0092	.0618	.1574	.2095	.1574	.0618	.0092	.0002
	8		.0020	.0232	.0918	.1833	.2066	.1262	.0322	.0013
	9		.0003	.0066	.0408	.1222	.2066	.1963	.0860	.0078
	10			.0014	.0136	.0611	.1549	.2290	.1720	.0349
	11			.0002	.0033	.0222	.0845	.1943	.2501	.1142
	12				.0006	.0056	.0317	.1134	.2501	.2570
	13				.0001	.0009	.0073	.0407	.1539	.3559
	14					.0001	.0008	.0068	.0440	.2288
15	0	.2059	.3052	.0047	.0005					
	1	.3432	.1319	.0305	.0047	.0005				
	2	.2669	.2309	.0916	.0219	.0032	.0003			
	3	.1285	.2501	.1700	.0634	.0139	.0016	.0001		
	4	.0428	.1876	.2186	.1268	.0417	.0074	.0006		
	5	.0105	.1032	.2061	.1859	.0916	.0245	.0030	.0001	
	6	.0019	.0430	.1472	.2066	.1527	.0612	.0116	.0007	
	7	.0003	.0138	.0811	.1771	.1964	.1181	.0348	.0035	
	8		.0035	.0348	.1181	.1964	.1771	.0811	.0138	.0003
	9		.0007	.0116	.0612	.1527	.2066	.1472	.0430	.0019
	10		.0001	.0030	.0245	.0916	.1859	.2061	.1032	.0105
	11			.0006	.0074	.0417	.1268	.2186	.1876	.0428
	12			.0001	.0016	.0139	.0634	.1700	.2501	.1285
	13				.0003	.0032	.0219	.0916	.2309	.2669
	14					.0005	.0047	.0305	.1319	.3432
	15						.0005	.0047	.0352	.2059

सारणी VI

e^{λ} और $e^{-\lambda}$ के मान

λ	e^{λ}	$e^{-\lambda}$	λ	e^{λ}	$e^{-\lambda}$
0.0	1.000	1.000	5.0	148.4	0.0067
0.1	0.105	0.905	5.1	164.0	0.0061
0.2	1.221	0.819	5.2	181.3	0.0055
0.3	1.350	0.741	5.3	200.3	0.0050
0.4	1.492	0.670	5.4	221.4	0.0045
0.5	1.649	0.607	5.5	244.7	0.0041
0.6	1.822	0.549	5.6	270.4	0.0037
0.7	2.014	0.497	5.7	298.9	0.0033
0.8	2.226	0.449	5.8	330.3	0.0030
0.9	2.460	0.407	5.9	365.0	0.0027
1.0	2.718	0.368	6.0	403.4	0.0025
1.1	3.004	0.333	6.1	445.9	0.0022
1.2	3.320	0.301	6.2	492.8	0.0020
1.3	3.669	0.273	6.3	544.6	0.0018
1.4	4.055	0.247	6.4	601.8	0.0017
1.5	4.482	0.223	6.5	665.1	0.0015
1.6	4.953	0.202	6.6	735.1	0.0014
1.7	5.474	0.183	6.7	812.4	0.0012
1.8	6.050	0.165	6.8	897.8	0.0011
1.9	6.686	0.150	6.9	992.3	0.0010
2.0	7.389	0.135	7.0	1,096.6	0.0009
2.1	8.166	0.122	7.1	1,212.0	0.0008
2.2	9.025	0.111	7.2	1,339.4	0.0007
2.3	9.974	0.100	7.3	1,480.3	0.0007
2.4	11.023	0.091	7.4	1,636.0	0.0006
2.5	12.18	0.082	7.5	1,808.0	0.00055
2.6	13.46	0.074	7.6	1,998.2	0.00050
2.7	14.88	0.067	7.7	2,208.3	0.00045
2.8	16.44	0.061	7.8	2,440.6	0.00041
2.9	18.17	0.055	7.9	2.697.3	0.00037
3.0	20.09	0.050	8.0	2,981.0	0.00034
3.1	22.20	0.045	8.1	3,294.5	0.00030
3.2	24.53	0.041	8.2	3,641.0	0.00027
3.3	27.11	0.037	8.3	4,023.9	0.00025
3.4	29.96	0.033	8.4	4,447.1	0.00022
3.5	33.12	0.030	8.5	4,914.8	0.00020
3.6	36.60	0.027	8.6	5,431.7	0.00018
3.7	40.45	0.025	8.7	6,002.9	0.00017
3.8	44.70	0.022	8.8	6,634.2	0.00015
3.9	49.40	0.020	8.9	7,322.0	0.00014
4.0	54.60	0.018	9.0	8,103.1	0.00012
4.1	60.34	0.017	9.1	8,955.3	0.00011
4.2	66.69	0.015	9.2	9,897.1	0.00010
4.3	73.70	0.014	9.3	10,938	0.00009
4.4	81.45	0.012	9.4	12,088	0.00008
4.5	90.02	0.011	9.5	13,360	0.00007
4.6	99.48	0.010	9.6	14,765	0.00007
4.7	109.95	0.009	9.7	16,318	0.00006
4.8	121.51	0.008	9.8	18,034	0.00006
4.9	134.29	0.007	9.9	19,930	0.00005

उत्तरमाला

प्रश्नावली 11.1

1. 10π सेमी^{2} / सेमी
2. 36π मी^{3} / मी
3. 60π सेमी^{2} / से
4. 3.6 सेमी^{2} / से
5. (a) -2 सेमी / से (b) 2 सेमी / से
6. $\frac{1}{\pi}$ सेमी / से
7. 400π सेमी^{3} / से
8. $\frac{8}{3}$ सेमी / से
9. $(4, 11)$ और $\left(-4, \frac{-31}{3}\right)$
10. 900 सेमी^{3} / से
11. 1.4π सेमी / से
12. 2π सेमी^{3} / से
13. $\frac{27}{8}\pi(2x+1)^2$
14. $\frac{1}{48\pi}$ सेमी / से

प्रश्नावली 11.2

1. 24
2. $\frac{-a}{2b}$
3. वक्र $y = \frac{1}{x-3}$ पर किसी भी स्पर्श रेखा की ढाल 2 नहीं है।
4. $y = 1$
5. (i) $(0, \pm 5)$ (ii) $(\pm 2, 0)$
6. (i) स्पर्श रेखा : $y + 10x - 5 = 0$ अभिलंब : $x - 10y + 50 = 0$

   (ii) स्पर्श रेखा : $y = 2x + 1$ अभिलंब : $x + 2y - 7 = 0$

   (iii) स्पर्श रेखा : $y = 3x - 2$ अभिलंब : $x + 3y - 4 = 0$

   (iv) स्पर्श रेखा : $y = 12x - 16$ अभिलंब : $x + 12y - 98 = 0$

   (v) स्पर्श रेखा : $y = 0$ अभिलंब : $x = 0$

   (vi) स्पर्श रेखा : $x + y - \sqrt{2} = 0$ अभिलंब : $y = x$

   (vii) स्पर्श रेखा : $8x + 3\sqrt{5}y - 36 = 0$ अभिलंब : $9\sqrt{5}x - 24y + 14\sqrt{5} = 0$

   (viii) स्पर्श रेखा : $2x + y - 2 = 0$ अभिलंब : $x - 2y - 6 = 0$

7. $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

9. $(0,0); (3,27)$

10. $(0,0), (1,2), (-1,-2)$

11. $(1, \pm 2)$

12. $2x + 3my - am^2(2 + 3m^2) = 0$

13. $\begin{cases} x + 14y - 254 = 0 \\ x + 14y + 86 = 0 \end{cases}$

14. $ty = x + at^2, y = -tx + 2at + at^3$

16. $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$, $\frac{y - y_0}{a^2 y_0} + \frac{x - x_0}{b^2 x_0} = 0$

17. $48x - 24y = 23$

प्रश्नावली 11.3

6. (a) ह्रासमान $x < -1$ के लिए और वर्धमान $x > -1$ के लिए

(b) ह्रासमान $x > -\frac{3}{2}$ के लिए और वर्धमान $x < -\frac{3}{2}$ के लिए

(c) ह्रासमान $x < -2, x > -1$ के लिए और वर्धमान $-2 < x < -1$ के लिए

(d) ह्रासमान $x > -\frac{9}{2}$ के लिए और वर्धमान $x < -\frac{9}{2}$ के लिए

(e) ह्रासमान $x < 1$ के लिए और वर्धमान $x > 1$ के लिए

8. $0 < x < 1$ और $x > 2$

13. (a), (b)

14. (b), (c), (d)

15. (a) $= -2$

प्रश्नावली 11.4

1. (i) निम्निष्ठ $= 3$ (ii) उच्चिष्ठ $= 10$ (iii) निम्निष्ठ $= -2$ (iv) उच्चिष्ठ नहीं या निम्निष्ठ नहीं (v) निम्निष्ठ $= 0$

(vi) उच्चिष्ठ $= 3$ (vii) निम्निष्ठ $= 4$, उच्चिष्ठ $= 6$ (viii) उच्चिष्ठ $= 4$, निम्निष्ठ $= 2$ (ix) उच्चिष्ठ $= \sin 1$, निम्निष्ठ $= -\sin 1$

(x) निम्निष्ठ $= 0$ (xi) निम्निष्ठ $= 0$ (xii) उच्चिष्ठ नहीं या निम्निष्ठ नहीं

2. (i) कोई नहीं (ii) $x = 0$ पर निम्निष्ठ, मान $= 0$ (iii) $x = 1$ पर निम्निष्ठ, मान $= -2$, $x = -1$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 2$

(iv) $0 < x < \pi$ अंतराल में कोई नहीं

(v) $x = \frac{\pi}{4}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 1$; $x = \frac{3\pi}{4}$ पर निम्निष्ठ, मान $= -1$

(vi) $x = \frac{\pi}{4}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \sqrt{2}$

(vii) $x = \frac{3\pi}{4}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \sqrt{2}$; $x = \frac{7\pi}{4}$ पर निम्निष्ठ, मान $= -\sqrt{2}$

(viii) $x = 1$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 19$; $x = 3$ पर निम्निष्ठ, मान $= 15$

(ix) $x = -2$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 0$; $x = 0$ पर निम्निष्ठ, मान $= -4$

(x) $x = 2$ पर निम्निष्ठ, मान $= 2$ (xi) $x = 0$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{1}{2}$

(xii) $x = \frac{2}{3}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{2\sqrt{3}}{9}$

(xiii) $x = \frac{\pi}{4}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{1}{2}$

(xiv) $x = -\frac{\pi}{6}$ पर निम्निष्ठ, मान $= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

(xv) $x = 3$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 0$

(xvi) $x = 1$ पर निम्निष्ठ, मान $= 0$, $x = \frac{3}{5}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{108}{3125}$

(xvii) $x = \frac{\pi}{4}$ पर निम्निष्ठ, मान $= -\frac{1}{512}$

(xviii) $x = -1$ पर निम्निष्ठ, मान $= 0$, $x = -\frac{1}{5}$ पर उच्चिष्ठ, मान $= \frac{3456}{3125}$

5. (i) निम्निष्ठ $= -8$ (ii) निम्निष्ठ $= 3$, उच्चिष्ठ $= 19$ (iii) निम्निष्ठ $= -1.75$, उच्चिष्ठ $= 19.625$
उच्चिष्ठ $= 8$ (iv) निम्निष्ठ $= -1$, उच्चिष्ठ $= \sqrt{2}$ (v) निम्निष्ठ $= -10$, उच्चिष्ठ $= 8$

6. अधिकतम लाभ $= 49$

7. $x = 2$ पर निम्निष्ठ, मान $= -39$, $x = 0$ पर उच्चिष्ठ, मान $= 25$

8. निम्निष्ठ $= -63$, उच्चिष्ठ $= 257$
9. $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 1\right)$
10. उच्चिष्ठ $= \sqrt{2}$
11. $x = 3$ पर उच्चिष्ठ $= 89$ $x = -2$ पर उच्चिष्ठ $= 139$
12. $a = 120$
13. उच्चिष्ठ $= 2\pi$, निम्निष्ठ $= 0$
14. 12, 12
15. 45, 15
16. 25, 10
17. 8, 8
18. 3 सेमी
19. $x = 5$
22. बेलन जिसका अर्धव्यास $\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी और ऊँचाई $2\left(\frac{50}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ सेमी
23. $\frac{112}{\pi + 4}, \frac{28\pi}{\pi + 4}$
28. $\sqrt{2r}, \frac{r}{\sqrt{2}}; r^2$ वर्ग इकाई
29. $(4, -4)$

प्रश्नावली 11.5

14. (a) $(0, 0)$ (b) $(\pi, -2)$

प्रश्नावली 11.6

1. $c = \frac{5}{2}$
2. $c = \frac{1}{3}$
3. $c = \cos^{-1}\left(\frac{1 \pm \sqrt{33}}{8}\right)$
4. $c = \log_2 e$
5. $c = \frac{1}{2}$
6. $c \in (a, b)$
7. $\frac{35}{27}$
8. $c = 1 - \frac{\sqrt{21}}{6}$
9. $c = \sqrt{3}$
10. c का अस्तित्व नहीं है।
11. $\left(\frac{-7}{2}, \frac{1}{4}\right)$
12. $\left(\frac{\sqrt{39}}{3}, \frac{13\sqrt{39}}{9}\right)$
13. $(2, -7)$
14. $\left(\frac{1}{2}, -27\right)$

प्रश्नावली 11.7

1. 0.208
2. 5.0199
3. 1.96875
4. 2.9629
5. 3.9961
6. 0.9999

7. 1.999

8. 3.009

9. 20.025

10. .060833

11. 0.19235

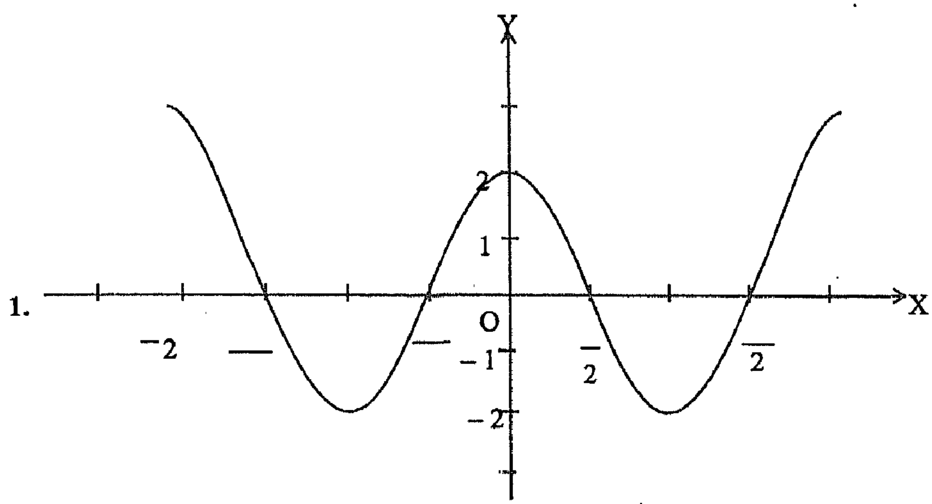
12. 6 से 5.68

13. $\left|\cos\frac{22}{14}\right|$ से $\left|\frac{22}{14}-\frac{\pi}{2}\right|$

14. 4π

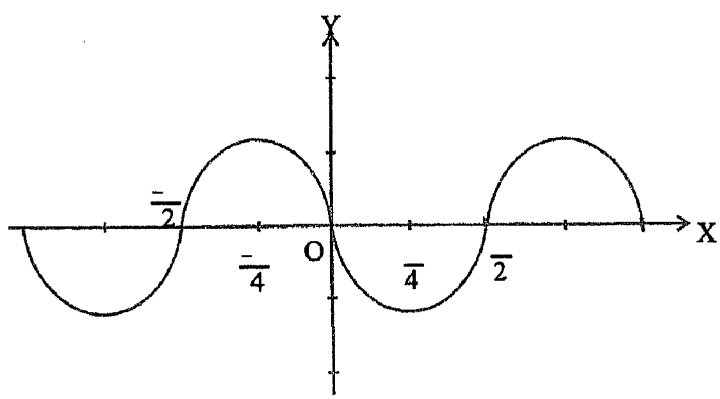
प्रश्नावली 11.8

1.



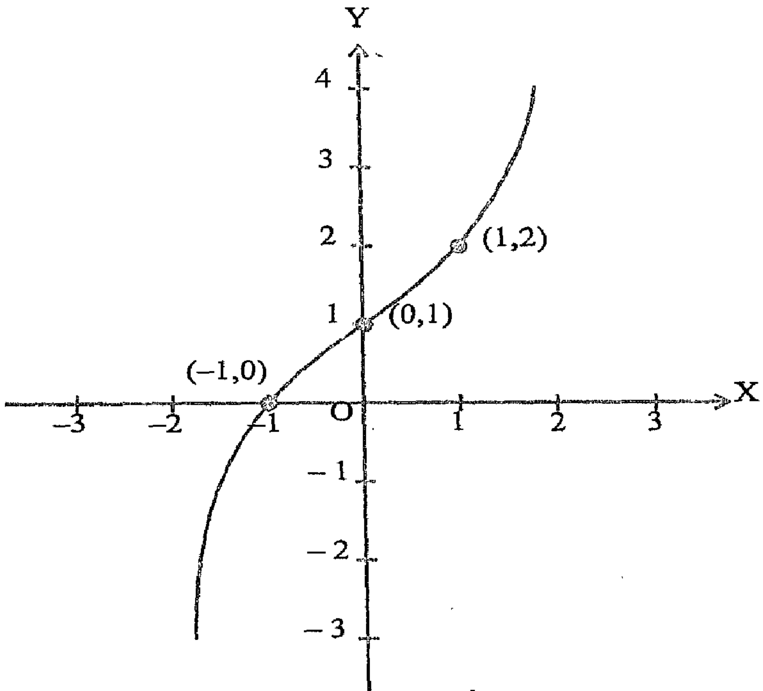
$y = 2\cos x$ का आलेख

2.



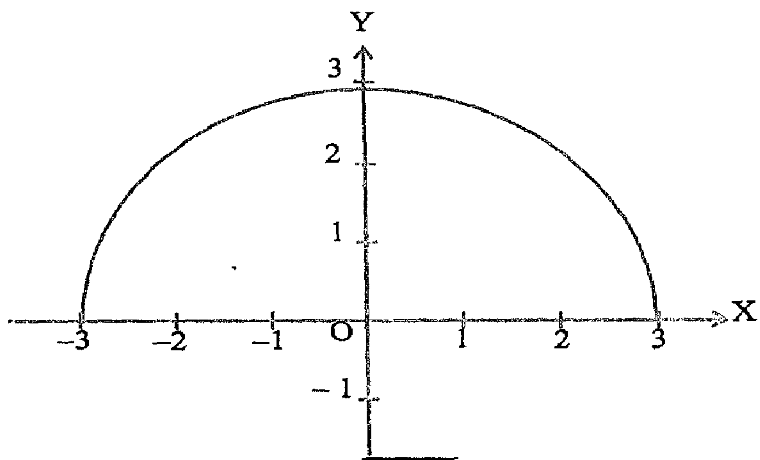
$y = -\sin 2x$ का आलेख

3.



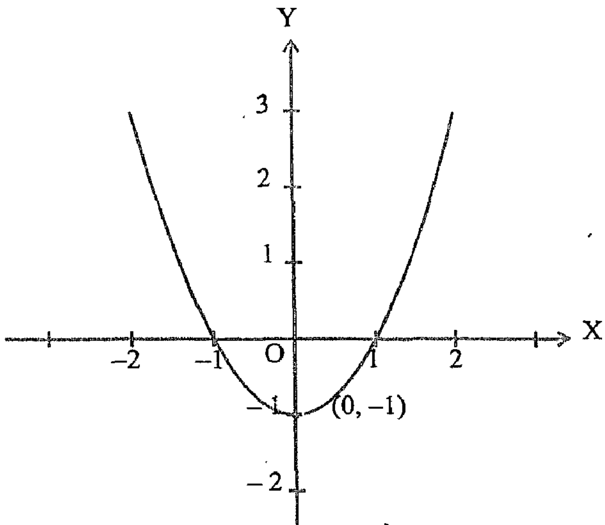
$y = x^3 + 1$ का आलेख

4.



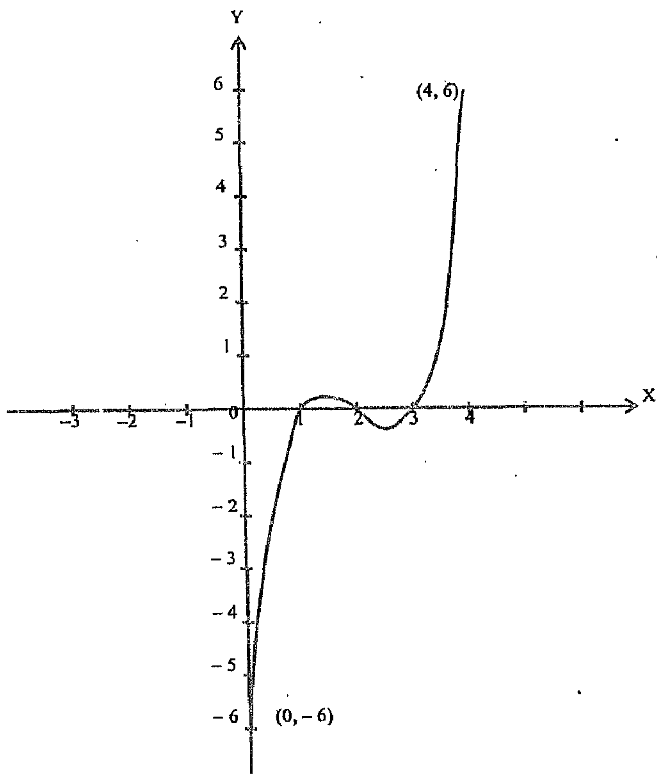
$y \quad \sqrt{9 \quad x^2}$ का आलेख

5.



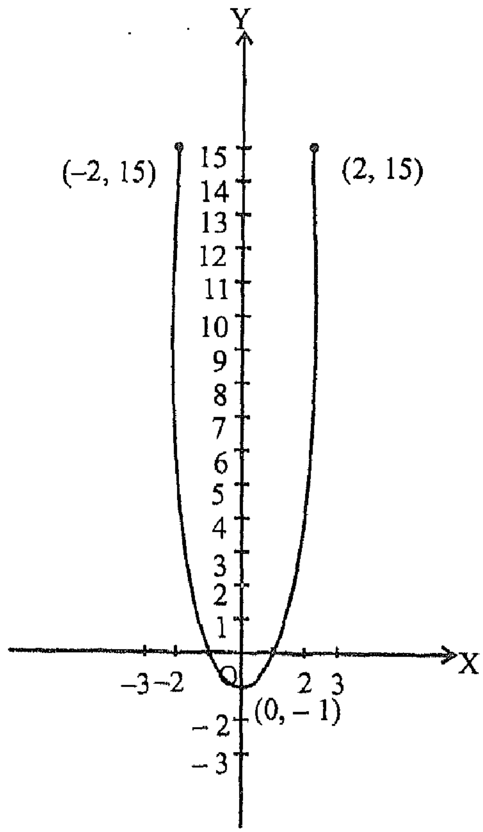
$y = x^2 - 1$ का आलेख

6.



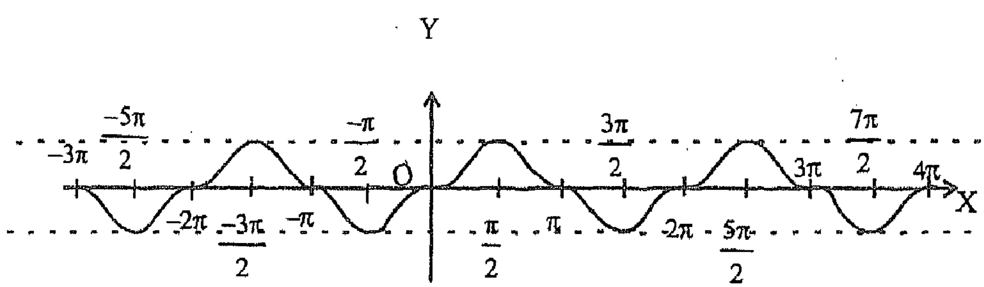
$y = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)$ का आलेख

7.



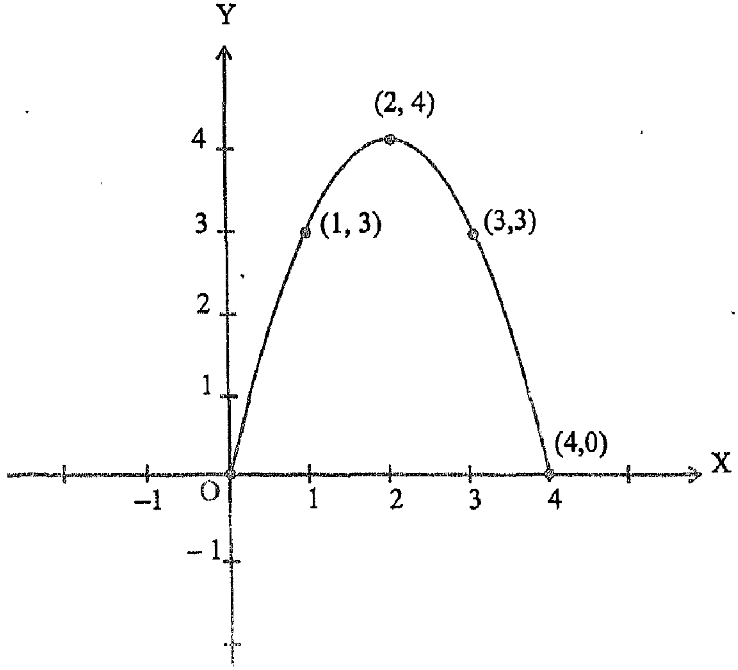
$y = x^4 - 1$ का आलेख

8.



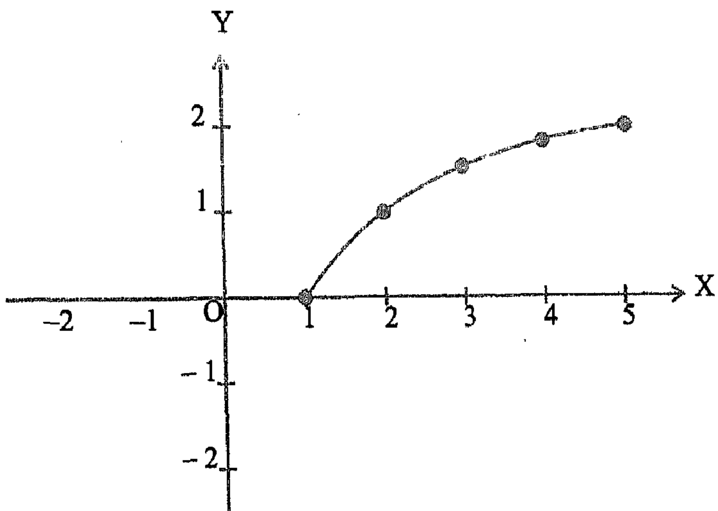
$y = \sin^3 x$ का आलेख

9.



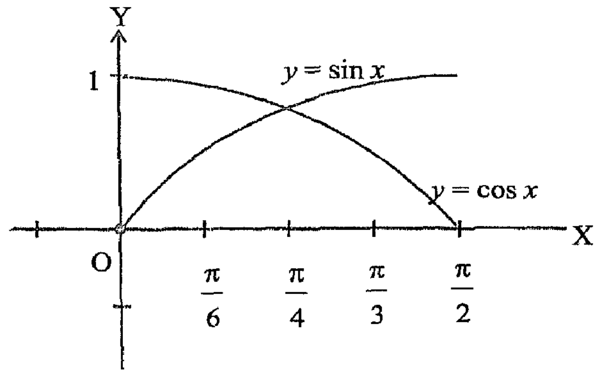
$y = 4 - (x-2)^2, 0 \leq x \leq 4$ का आलेख

10.



[1,5] में $y \sqrt{x-1}$

11.



$y = \sin x$ और $y = \cos x$ का आलेख जहाँ
x का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक परिवर्तित होता है।

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

1. $\sqrt{3b}$ सेमी^{2} / से

2. $y + x - 3 = 0$

4. (i) $0 < x < \frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ (ii) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

5. (i) $x < -1$ और $x > 1$ (ii) $-1 < x < 1$

6. $\frac{3\sqrt{3}}{4} ab$ वर्ग इकाई

7. लंबाई $= \frac{20}{\pi + 8}$, चौड़ाई $= \frac{20}{\pi + 8}$

9. (i) $x = 2$ पर स्थानीय उच्चिष्ठ, (ii) $x = \frac{2}{7}$ पर स्थानीय निम्निष्ठ, (iii) $x = -1$ नत परिवर्तन बिंदु है।

10. निरपेक्ष उच्चिष्ठ मान $= \frac{5}{4}$, निरपेक्ष निम्निष्ठ मान $= 1$

17. $\frac{4\pi R^3}{3\sqrt{3}}$ घन इकाई

प्रश्नावली 12.1

1. $\frac{1}{2}\sin 2x$

2. $\frac{1}{3}\sin 3x$

3. $\frac{1}{2}e^{2x}$

4. $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$

5. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{4}{3}e^{3x}$

6. $\frac{x^3}{3} - x + C$

7. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$

8. $\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx+C$

9. $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+x+C$

10. $\frac{x^2}{2}+5x+\frac{4}{x}+C$

11. $\frac{\sqrt{x}}{5}\left(2x^2+10x+40\right)+C$

12. $\frac{x^3}{3}+x+C$

13. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

14. $\frac{6}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^{\frac{3}{2}}+C$

15. $6\sqrt{x}+x^5+C$

16. $-\cos x+\sin x+C$

17. $-\cot x-\operatorname{cosec} x+C$

18. $\tan x-\sec x+C$

19. $\tan x-x+C$

20. $2\tan x-3\sec x+C$

प्रश्नावली 12.2

1. $-\cos\left(x^2+1\right)+C$

2. $\frac{1}{3}(\log|x|)^3+C$

3. $\log|1+\log x|+C$

4. $\cos(\cos x)+C$

5. $-\frac{1}{4a}\cos(2ax+2b)+C$

6. $\frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$

7. $\frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}+C$

8. $\frac{1}{6}\left(1+2x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$

9. $\frac{4}{3}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}}+C$

10. $2\log\left|\sqrt{x}-1\right|+C$

11. $\frac{2}{3}\sqrt{x+4}\,(x-8)+C$

12. $\frac{1}{7}\left(x^3-1\right)^{\frac{7}{3}}+\frac{1}{4}\left(x^3-1\right)^{\frac{4}{3}}+C$

13. $-\frac{1}{18\left(2+3x^3\right)^2}+C$

14. $\frac{(\log x)^{1-m}}{1-m}+C$

15. $\frac{1}{8}\log\frac{1}{\left|9-4x^2\right|}+C$

16. $\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

17. $-\frac{1}{2e^{x^2}}+C$

18. $e^{\tan^{-1}x}+C$

19. $\log\left(e^x+e^{-x}\right)+C$

20. $\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)+C$

21. $\frac{1}{2}\tan(2x-3)-x+C$

22. $-\frac{1}{4}\tan(7-4x)+C$

23. $\frac{2}{5}\tan^5\sqrt{x}+C$

24. $\frac{1}{2}\log|2\sin x+3\cos x|+C$

25. $\frac{1}{(1-\tan x)}+C$

26. $2\sin\sqrt{x}+C$

27. $\frac{1}{3}(\sin 2x)^{\frac{3}{2}}+C$

28. $2\sqrt{1+\sin x}+C$

29. $\frac{1}{2}(\log\sin x)^2+C$

30. $\log\frac{1}{|1+\cos x|}+C$

31. $\frac{1}{1+\cos x}+C$

32. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x+\sin x|+C$

33. $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\log|\cos x-\sin x|+C$

34 $2\sqrt{\tan x}+C$

35. $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

36. $\frac{1}{3}(x+\log x)^3+C$

37. $-\frac{1}{4}\cos\left(\tan^{-1}x^4\right)+C$

प्रश्नावली 12.3

1. $\frac{x}{2}-\frac{1}{8}\sin(4x+10)+C$

2. $-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{2}\cos x+C$

3. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{12}\sin 12x+x+\frac{1}{8}\sin 8x+\frac{1}{4}\sin 4x\right]+C$

4. $-\frac{1}{2}\cos(2x+1)+\frac{1}{6}\cos^3(2x+1)+C$

5. $\frac{1}{6}\cos^6 x-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

6. $\frac{1}{4}\left[\frac{1}{6}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$

7. $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}\sin 4x-\frac{1}{12}\sin 12x\right]+C$

8. $2\tan\frac{x}{2}-x+C$

9. $x-\tan\frac{x}{2}+C$

10. $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

11. $\frac{3x}{8}+\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{64}\sin 8x+C$

12. $x-\sin x+C$

13. $2(\sin x+x\cos\alpha)+C$

14. $-\frac{1}{\cos x+\sin x}+C$

15. $\frac{1}{6}\sec^3 2x - \frac{1}{2}\sec 2x + C$

16. $\frac{1}{3}\log|\sin 3x| - \frac{1}{5}\log|\sin 5x| + C$

17. $\frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$

18. $\sec x - \operatorname{cosec} x + C$

19. $\tan x + C$

20. $\log|\tan x| + \frac{1}{2}\tan^2 x + C$

21. $\sin x + \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2}{3}\sin^3 x + C$

22. $\log|\cos x + \sin x| + C$

23. $\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{2} + C$

24. $\frac{1}{\sin(a-b)} \log\left|\frac{\cos(x-a)}{\cos(x-b)}\right| + C$

25. $\log|\sin x| - 2\sin^2 x + \frac{3}{2}\sin^4 x - \frac{2}{3}\sin^6 x + \frac{\sin^8 x}{8} + C$

प्रश्नावली 12.4

1. $\log\left|x + \sqrt{x^2 + 4}\right| + C$

2. $\frac{1}{2}\log\left|2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right| + C$

3. $\log\left|\frac{1}{2 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 5}}\right| + C$

4. $\log\left|\frac{1}{2 - x + \sqrt{x^2 - 4x + 3}}\right| + C$

5. $\tan^{-1}(x+2) + C$

6. $\frac{1}{5}\sin^{-1}\frac{5x}{3} + C$

7. $\frac{3}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\sqrt{2}\, x^2 + C$

8. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{1 + x^3}{1 - x^3}\right| + C$

9. $\sqrt{x^2 - 1} - \log\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$

10. $\frac{1}{3}\log\left|x^3 + \sqrt{x^6 + a^6}\right| + C$

11. $\tan^{-1}(x+1) + C$

12. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{2}}\right) + C$

13. $\sin^{-1}\left(\frac{x+3}{4}\right)+C$

14. $\frac{1}{6}\tan^{-1}\left(\frac{3x+1}{2}\right)+C$

15. $\frac{1}{2\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+C$

16. $\frac{1}{17}\log\left|\frac{3x-2}{x+5}\right|+C$

17. $\log\left|x-\frac{3}{2}+\sqrt{x^2-3x+2}\right|+C$

18. $\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{41}}\right)+C$

19. $\log\left|x-\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x-a)\ (x-b)}\right|+C$

20. $\frac{1}{\sqrt{5}}\log\left|5x-1+\sqrt{25x^2-10x}\right|+C$

21. $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{6}\right)+C$

22. $2\sqrt{2x^2+x-3}+C$

23. $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$

24. $-\sqrt{5-4x-x^2}+\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$

25. $-\sqrt{4x-x^2}+4\sin^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$

26. $\frac{1}{4}\log\left|2x^2+6x+5\right|+\frac{1}{2}\tan^{-1}(2x+3)+C$

27. $\sqrt{x^2+2x+3}+\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+3}\right|+C$

28. $\frac{1}{2}\log\left|x^2-2x-5\right|+\frac{2}{\sqrt{6}}\log\left|\frac{x-1-\sqrt{6}}{x-1+\sqrt{6}}\right|+C$

29. $5\sqrt{x^2+4x+10}-7\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+10}\right|+C$

प्रश्नावली 12.5

1. $\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

2. $\frac{1}{6}\log\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$

3. $\log|x-1|-5\log|x-2|+4\log|x-3|+C$

4. $\frac{1}{2}\log|x-1|-2\log|x-2|+\frac{3}{2}\log|x-3|+C$

5. $4\log|x+2|-2\log|x+1|+C$

6. $\frac{x}{2}+\log|x|-\frac{3}{4}\log|1-2x|+C$

7. $\frac{3}{4}\log|x+2|+\frac{1}{4}\log|x|-\frac{1}{2x}+C$

8. $\frac{2}{9}\log\left|\frac{x-1}{x+2}\right|-\frac{1}{3(x-1)}+C$

9. $\frac{11}{4}\log\left|\frac{x+1}{x+3}\right|+\frac{5}{2(x+1)}+C$

10. $\frac{5}{2}\log|x+1|-\frac{1}{10}\log|x-1|-\frac{12}{5}\log|2x+3|+C$

11. $\frac{5}{3}\log|x+1|-\frac{5}{2}\log|x+2|+\frac{5}{6}\log|x-2|+C$

12. $\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x+1|+\frac{3}{2}\log|x-1|+C$

13. $2\log\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{2(x-1)^2}+C$

14. $-\log|1-x|+\frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)+\tan^{-1}x+C$

15. $\log|x-1|-\frac{3}{x-1}-\frac{3}{2(x-1)^2}+C$

16. $3\log|x-2|-\frac{5}{x-2}+C$

17. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

18. $\frac{1}{n}\log\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C$

19. $\log\left|\frac{2-\sin x}{1-\sin x}\right|+C$

20. $-\frac{1}{3}\tan^{-1}x+\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

21. $\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+1}{x^2+3}\right)+C$

22. $\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^4-1}{x^4}\right|+C$

23. $\log\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right)+C$

प्रश्नावली 12.6

1. $-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

2. $e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$

3. $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$

4. $\frac{x^2}{2}\log|2x|-\frac{x^2}{4}+C$

5. $\frac{x^3}{3}\log|x|-\frac{x^3}{9}+C$

6. $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$

7. $\frac{1}{4}\sin^{-1}x\left(2x^2-1\right)+\frac{x\sqrt{1-x^2}}{4}+C$

8. $\frac{x^3}{3}\sin^{-1}x+\frac{1}{9}\left(2+x^2\right)\sqrt{1-x^2}+C$

9. $\frac{\cos^{-1}x}{4}\left(2x^2-1\right)-\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}+C$

10. $\left(\sin^{-1}x\right)^2x+2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1}x-2x+C$

11. $e^{3x}\left(\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{9}+\frac{2}{27}\right)+C$

12. $x\log\left(x^2+1\right)-2x+2\tan^{-1}x+C$

13. $x-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+C$

14. $-\left[\cos^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x\right]+C$

15. $x \tan x + \log \cos x + C$

16. $x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log\left(1 + x^2\right) + C$

17. $\frac{x^2}{2}(\log x)^2 - \frac{x^2}{2} \log x + \frac{x^2}{4} + C$

18. $\left(\frac{x^3}{3} + x\right) \log x - \frac{x^3}{9} - x + C$

19. $e^x \sin x + C$

20. $e^x \tan^{-1} x + C$

21. $\frac{e^x}{x} + C$

22. $\frac{e^x}{(x-1)^2} + C$

23. $\frac{e^{2x}}{5}(2 \sin x - \cos x) + C$

24. $\frac{x-1}{x+1} e^x + C$

25. $2x \tan^{-1} x - \log\left(1 + x^2\right) + C$

प्रश्नावली 12.7

1. $\frac{1}{4} \sin^{-1} 2x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-4x^2} + C$

2. $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2+3x} - \frac{9}{8} \log\left|x + \frac{3}{2} + \sqrt{x^2+3x}\right| + C$

3. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+6} + \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+6}\right| + C$

4. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x+1} - \frac{3}{2} \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right| + C$

5. $\frac{5}{2} \sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right) + \frac{x+2}{2}\sqrt{1-4x-x^2} + C$

6. $\frac{(x+2)}{2}\sqrt{x^2+4x-5} - \frac{9}{2} \log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}\right| + C$

7. $\frac{(2x-3)}{4}\sqrt{1+3x+x^2}+\frac{13}{8}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{13}}\right)+C$

8. $2\sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)+\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{3-2x-x^2}+C$

9. $\frac{1}{3}\left(x^2+x\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}{8}+\frac{1}{16}\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x}\right|+C$

10. $\frac{1}{6}\left(2x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{x}{2}\sqrt{2x^2+3}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\log\left|x+\sqrt{x^2+\frac{3}{2}}\right|+C$

11. $-\frac{1}{3}\left(3-4x-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{7}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{7}}\right)+\frac{(x+2)\sqrt{3-4x-x^2}}{2}+C$

प्रश्नावली 12.8

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}-\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

2. $\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{\theta}{2}\right)+C$

3. $\frac{1}{3}\log\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$

4. $\frac{1}{\sqrt{3}}\log\left|\frac{\tan\frac{\theta}{2}-2-\sqrt{3}}{\tan\frac{\theta}{2}-2+\sqrt{3}}\right|+C$

5. $\frac{1}{\sqrt{15}}\log\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}\tan\frac{\theta}{2}}\right|+C$

6. $\frac{1}{12}\tan\frac{\theta}{2}+C$

7. $\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\tan^{-1}\left[\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right]+C$, यदि $a>b$

या $\dfrac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\log\left|\dfrac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right|+C$, यदि $a<b$

या $\dfrac{1}{a}(\tan x-\sec x)+C, a=b$

अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

1. $xe^{\tan^{-1}x}+C$

2. $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x^2}{(1-x^2)}\right|+C$

3. $\dfrac{2}{3(a-b)}\left[(x+a)^{\frac{3}{2}}-(x+b)^{\frac{3}{2}}\right]+C$

4. $\dfrac{-2}{\sqrt{\tan x}}+C$

5. $-\dfrac{2}{a}\sqrt{\dfrac{(a-x)}{x}}+C$

6. $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\sin x\right)+C$

7. $-\dfrac{1}{2}\log|x+1|+\dfrac{1}{4}\log\left(x^2+9\right)+\dfrac{3}{2}\tan^{-1}\dfrac{x}{3}+C$

8. $\sin\alpha\log|\sin(x-\alpha)|+x\cos\alpha+C$

9. $\dfrac{x^3}{3}+C$

10. $-\dfrac{1}{2}\sin 2x+C$

11. $\dfrac{1}{\sin(a-b)}\log\left|\dfrac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)}\right|+C$

12. $\dfrac{1}{4}\sin^{-1}\left(x^4\right)+C$

13. $\log\left(\dfrac{1+e^x}{2+e^x}\right)+C$

14. $\dfrac{x^2}{2}+x+\dfrac{1}{2}\log|x-1|-\dfrac{1}{4}\log\left(x^2+1\right)-\dfrac{1}{2}\tan^{-1}x+C$

15. $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$

16. $\frac{1}{2\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{x^2-1}{\sqrt{2}\,x}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log\left|\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}\right|+C$

17. $-\frac{1}{4}\log\left|\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right|+\frac{1}{2\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{3}\,x}\right)+C$

18. $\frac{1}{3}\tan^{-1}x-\frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{x}{2}+C$

19. $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

20. $\frac{1}{4}\log\left(x^4+1\right)+C$

21. $\frac{5^{5^{5^{x}}}}{(\log 5)^3}+C$

22. $\frac{[f(ax+b)]^{n+1}}{a(n+1)}+C$

23. $\frac{4}{15}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{5}{4}}+C$

24. $x\tan x+\log|\cos x|-x\sec x+\log|\sec x+\tan x|+C$

25. $\frac{-2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin x}}+C$

26. $x\log(\log x)-\frac{x}{\log x}+C$

27. $\frac{2(2x-1)}{\pi}\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}{\pi}-x+C$

28. $-2\sqrt{1-x}+\cos^{-1}\sqrt{x}+\sqrt{x}\sqrt{1-x}+C$

29. $\frac{1}{5}\log\left|\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C$

30. $e^x\tan x+C$

31. $\frac{1}{6}\log|1-\cos x|+\frac{1}{2}\log|1+\cos x|-\frac{2}{3}\log|1+2\cos x|+C$

32. $\frac{1}{10}\log|1-\cos x|-\frac{1}{2}\log|1+\cos x|+\frac{2}{5}\log|3+2\cos x|+C$

33. $-2\log|x+1|-\frac{1}{x+1}+3\log|x+2|+C$

34. $\sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\tan x-1}{\sqrt{2\tan x}}\right)+C$ 35. $\frac{1}{2}\left[x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}\right]+C$

प्रश्नावली 13.1

1. $\frac{1}{2}(b^2-a^2)$ 2. $\frac{35}{2}$ 3. $\frac{15}{2}$ 4. $\frac{27}{2}$

5. $e-\frac{1}{e}$ 6. $\cos a-\cos b$ 7. $\frac{23}{6}$ 8. $\frac{65}{4}$

9. $\frac{15+e^8}{2}$ 10. $\frac{1}{2}(b-a)+\frac{1}{2}(\sin a\cos a-\sin b\cos b)$

प्रश्नावली 13.2

1. $\frac{3}{2}$ 2. 2 3. $\log\frac{3}{2}$ 4. $\frac{64}{3}$

5. 96 6. $\frac{16}{3}$ 7. $\frac{104}{5}$ 8. 0

9. 0 10. 1 11. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 12. $\frac{\pi}{4}$

13. $\frac{1}{2}\log\frac{3}{2}$ 14. $\frac{1}{2}\log 2$ 15. $\frac{1}{5}\log 6+\frac{3}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\sqrt{5}$

16. $5-\frac{5}{2}\left(9\log\frac{5}{4}-\log\frac{3}{2}\right)$ 17. $e^4(e-1)$ 18. $1+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$

19. $\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi}$

20. $\log \frac{9}{8}$

21. $\frac{\pi^4}{1024} + \frac{\pi}{2} + 2$

22. 0

प्रश्नावली 13.3

1. 0
2. $\frac{1}{3}$
3. 0
4. $\frac{1}{8}$
5. $\frac{1}{2} \log 2$
6. $\frac{1}{5} \log 6 + \frac{3}{\sqrt{5}} \tan^{-1}\sqrt{5}$
7. $\frac{e-1}{2}$
8. $\frac{64}{231}$
9. $\frac{\pi}{4}$
10. $\frac{1}{\sqrt{5}} \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$
11. 0
12. $\frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{1}{3}$
13. $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \log \left|\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}+b}{a-\sqrt{a^2+b^2}+b}\right|$
14. $\frac{1}{6}$
15. $9\sqrt{3}-1$
16. $\frac{3}{4}$
17. $\frac{\pi}{3}$

प्रश्नावली 13.4

1. $\frac{\pi}{4}$
2. $\frac{\pi}{4}$
3. $\frac{\pi}{4}$
4. 9
5. $\frac{1}{(n+1)(n+2)}$
6. $\frac{\pi}{8} \log 2$
7. $\frac{\pi}{2} \log \frac{1}{2}$
8. $\frac{\pi}{2}$
9. 2
10. π
11. 0
12. $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \log(1+\sqrt{2})$
13. 0
14. $\frac{\pi}{4}$
15. $\frac{\pi}{12}$
17. $-\pi \log 2$
18. $\frac{\pi^2}{16}$
19. 5
20. $\frac{15}{2}$
21. $\frac{\pi^2}{2ab}$
22. 0
23. $\frac{a}{2}$

प्रश्नावली 13.5

1. $16-4\sqrt{2}$ 2. $\dfrac{16-4\sqrt{2}}{3}$ 3. $\dfrac{32-8\sqrt{2}}{3}$

4. $\dfrac{2}{3}(3\sqrt{3}-1)$ 5. 12π 6. 6π 7. $\dfrac{\pi}{3}$

8. $\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)$ 9. $\dfrac{8}{3}$ 10. $\dfrac{1}{6}$ 11. $\dfrac{1}{3}$

12. $\dfrac{8}{3}a^2$ 13. $\dfrac{9}{8}$ 14. πab 15. $\dfrac{3}{2}(\pi-2)$

16. $\dfrac{ab}{4}(\pi-2)$ 17. $\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 18. 7

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

1. $e^{\frac{\pi}{2}}$ 2. 0 3. $-\dfrac{3\sqrt{2}}{5}(e^{2\pi}+1)$

4. $\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}$ 5. $\dfrac{\pi}{6}$ 6. $2\sin^{-1}\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$

7. $\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{9}{4}\sin^{-1}\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ 8. $\dfrac{16}{3}$ 9. $\dfrac{16a}{3}$ 10. $\dfrac{9}{2}$

12. $\dfrac{\pi}{4}$ 13. $\dfrac{1}{40}\log 9$ 14. $\dfrac{\pi}{2}-1$ 15. $\dfrac{3\pi+1}{\pi^2}$

16. $a=2$ 17. $a=-1,\ b=1$ 25. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}+\dfrac{9\pi}{8}-\dfrac{9}{4}\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)$

26. $\dfrac{50}{3}$ 27. $\dfrac{64}{3}$ 28. $\dfrac{1}{3}\left(e^2-\dfrac{1}{e}\right)$

29. $\dfrac{12}{\log 2}$ 30. $\dfrac{\pi}{2}(\pi-2)$ 31. $\dfrac{19}{2}$

प्रश्नावली 14.1

1. 1
2. 1
3. 1
4. 1
5. 1
6. 2
7. 3
8. 2
9. 4
10. 5
11. घात 1, कोटि 1
12. घात 1, कोटि 1
13. घात 2, कोटि 1
14. घात 2, कोटि 1
15. घात परिभाषित नहीं, कोटि 1
16. घात 1, कोटि 2
17. घात 1, कोटि 2
18. घात 1, कोटि 3
19. घात 1, कोटि 4
20. घात परिभाषित नहीं, कोटि 5

प्रश्नावली 14.2

1. $x + yy' = 0$
2. $x - yy' = 0$
3. $y - 2xy' = 0$
4. $x^2(y'^2+1) = 0$
5. $y^2y'^2 - y^2 = 1$
6. $y'' = 0$
7. $x(yy''+y'^2) = yy'$
8. $x(yy''+y'^2) = yy'$
9. $yy'' + y'^2 = 0$
10. $2y''+y'^3 = 0$

प्रश्नावली 14.4

1. $y = \mathrm{C}\, e^{3x} \quad (x \in \mathbf{R})$
2. $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \mathrm{C}\ (x \in \mathbf{R})$
3. $r = \sin\theta + \mathrm{C}\ (\theta \in \mathbf{R})$
4. $\log\ /y+1| + \dfrac{x^2}{2} + x = \mathrm{C}\ (x \in \mathbf{R})$
5. $e^{-x} + e^{-y} = \mathrm{C}\ \ (x \in \mathbf{R})$
6. $y + \mathrm{C} = \log(e^x + e^{-x})\ (x \in \mathbf{R})$
7. $y + \mathrm{C} = \log \sin x + \cos x\ (x \in \mathbf{R})$
8. $\tan^{-1} y = x + \dfrac{1}{3}x^3 + \mathrm{C}\ \ (x \in \mathbf{R})$
9. $|\tan x \tan y| = \mathrm{C}\ (x \in \mathbf{R} \setminus \{\ \dfrac{\pi}{2}$ का विषम गुणक $\}$
10. $y = \mathrm{A}|x-1|^2\, e^{\left(\frac{2}{3}x^3+x^2+2x\right)}\ \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{1\})$
11. $y = \sec x\ (x \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}))$
12. $y = |x|^{5/2}\ \ (x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$
13. $y = -e^{-2x}$
14. $y = \sin^{-1}(e^x),\ (x \le 0)$

15. $y = \frac{1}{2x-1}$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\})$

16. $y = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}} \sec x)$ $(-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4})$

17. $y = \log \frac{2}{3-e^{2x}}$ $(x \le \frac{1}{2} \log 3)$

18. $y = \frac{1}{x} e^{x-1}$ $(x \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$

19. $y = x e^{1-\frac{1}{x}}$ $(x > 0)$

20. $y = -\log |x|$ $(x < 0)$

प्रश्नावली 14.5

1. $\log \left|x^2 + xy + y^2\right| = 2\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{x+2y}{x\sqrt{3}} + C$ $(x \in R \setminus \{0\})$

2. $C|2x - y|^{5/\theta} (4x^2 + y^2)^{3/16} = e^{\left[-\frac{3}{8}\tan^{-1}\frac{y}{2x}\right]}$ $(x \ne 0)$

3. $\log \left|\frac{y}{x^3}\right| + \frac{y}{x} = C$ $(xy \ne 0)$

4. $3x^2 y + 2y^3 = C$ $(xy \ne 0)$

5. $xy = e^{-x^2 y^2}$ $(xy \ne 0)$

6. $x \sin y/x = C(1 + \cos y/x)$ $(x \sin y/x \ne 0)$

7. $(x^2 + y^2)^{1/2} = C e^{2\tan^{-1}\frac{y}{x}}$ $(x \ne 0)$

8. $x^2 \sin^2 \frac{y}{x} = C$ $(x \sin y/x \ne 0)$

9. $2e^{x/y} + \log y = C$ $(y \ne 0)$

10 $Cy = \log \frac{y}{x} - 1$

11. $(x^2 - y^2)^2 = x^2$

12. $y = (x^2 - x^2 \log x^2)^{1/2}, 0 \le \log x^2 \le 1$

13. $\log |x| + e^{-\frac{y}{x}} = 1$ $(x \ne 0)$

14. $y = -x \log \log |x|$ $(x \ne 0)$

15. $\log |x| = \cos y/x - 1$ $(x \ne 0)$

16. $y = \frac{2x}{1 + \log|x|}$ $(x \ne 0, \pm \frac{1}{e})$

17. $y = \frac{x}{1 + \log|x|}$ $(x \ne 0, \pm e)$

18. $y = \frac{x}{1 - \log|x|}$ $(x \ne 0, \pm e)$

19. $.og |x| = \cos y/x$ $(x \ne 0)$

20. $e^{-y/x} (\sin y/x + \cos y/x) = 1 + \log x^2$ $(x \ne 0)$

प्रश्नावली 14.6

1. $y = \frac{1}{5}e^{3x} + Ce^{-2x}\ (x \in \mathbf{R})$

2. $y = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + Ce^{-x}\ (x \in \mathbf{R})$

3. $y = \frac{e^{mx}}{m+3} + Ce^{-3x}$, यदि $m + 3 \neq 0$, $y = (x + C)e^{-3x}$, यदि $m + 3 = 0$

4. $y = \frac{1}{5}(-\cos 2x + 2\sin 2x) + Ce^{x}\ (x \in \mathbf{R})$

5. $y = -e^{-x} + Cx\ (x \in \mathbf{R})$

6. $y = \frac{1}{5}x^4 + \frac{C}{x}\ (x \neq 0)$

7. $y = \frac{1}{2}x\log x - \frac{1}{4}x + \frac{C}{x}\ (x \neq 0)$

8. $y = \frac{1}{2}\log x + \frac{C}{\log x}\quad (x > 0)$

9. $y = (x^2+1)[(x + \tan^{-1}x) + C]\ (x \in \mathbf{R})$

10. $y = e\sin x + Ce^{-\sin x}\ (x \in \mathbf{R})$

11. $y = (x+1)e^{x}\ (x \in \mathbf{R})$

12. $y = \frac{1}{2}e^{x}\ (x \in \mathbf{R})$

13. $y = \frac{1}{2}x\log x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2x}(x \neq 0)$

14. $y = x - 1 - \log x\ (x > 0)$

15. $y = xe^{-1} - e^{-x}\ (x \in \mathbf{R})$

16. $y = \frac{\tan^{-1}x}{x^2+1}\ (x \in \mathbf{R})$

17. $y = x^2 + \cos x\ (x \in \mathbf{R})$

18. $y = \sin x\ (x \in \mathbf{R})$

19. $y = \sin^{-1}(2x)\ (-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2})$

20. $ye^{2x} = 1 - \cos x\ (x \in \mathrm{R})$

21. $(x - \tan^{-1}y + 1)\,e^{\tan^{-1}y} = 1$

22. $x\,e\tan^{-1}y = \tan^{-1}y$

23. $x = y^2(e^{-1} - e^{-y})$

24. $x + 1 - \sin^{-1}y = e^{-\sin^{-1}y}$

प्रश्नावली 14.7

1. $y=-\frac{1}{4}\sin 2x+Ax+B\ (x\in \mathbf{R})$

2. $y=\log|\sec x|+Ax+B,\ x\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

3. $y=-\log\sin x+A\ x+\ B, (x\in (0,\ \pi)$

4. $y=\frac{1}{2}ax^2+\frac{1}{6}bx^3+Ax+B\ \ (x\in \mathbf{R})$

5. $y=\frac{1}{380}x^{20}+Ax+B\ (x\in \mathbf{R})$

6. $y=Ax+B+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+...+\frac{x^{n+2}}{n+2}\ (x\in \mathbf{R})$

7. $y=-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{9}\cos 3x+Ax+B\ (x\in \mathbf{R})$

8. $y=Ax+B-\sin 2x-\sin 4x-\sin 6x\ (x\in \mathbf{R})$

9. $y=Ax+B-x\sin x-2\cos x\ (x\in \mathbf{R})$

10. $y=2\sin x-x\cos x+\frac{1}{6}x^3+Ax+B\ (x\in \mathbf{R})$

11. $y=2-\cos x\ (x\in \mathbf{R})$

12. $y=\log(2\sec x)\ (x\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$

13. $y=\log\sec x+\tan x\ (x\in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}))$

14. $y=\log|\text{cosec}\ x+\cot\ x|+2x-\pi, x\in \mathbf{R}\setminus\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$

15. $y=x+1-\cos x-\sin x\ (x\in \mathbf{R})$

16. $y=x^3+x+1\ (x\in\mathbf{R})$

17. $y = x^3 + x^4 + x \ (x \in \mathbf{R})$

18. $y = x^3 - \sin x - x + 1 \ (x \in \mathbf{R})$

19. $y = \frac{1}{6}x^3 + 3x + e^x \ (x \in \mathbf{R})$

20. $y = 2 + 4x + e^x - \sin x \ (x \in \mathbf{R})$

प्रश्नावली 14.8

1. $50 \log 3/\log 2$ दिन
2. अब से 58 वर्ष
3. $2 \log 5 / \log 2$ घंटे
4. $\frac{2 \log 2}{\log 11/10}$ घंटे
5. $(10 - \frac{p}{10})^2 \%$
6. 1567 वर्ष
7. (i) 6.9% (ii) 1648 रु
8. (i) 65.34°C (ii) 52 निम्निष्ठ लगभग
9. $(1 + y) = 2e^{\frac{x^2}{2}}$
10. $4x^2 + 9y = 0$
11. $y^2 = x^2 + a^2$
12. $x^2 - y^2 = cx$, जो आयतीय अतिवरवलय हैं।

अध्याय 14 पर विविध प्रश्नावली

1. (i) कोटि 2, घात 2 (ii) कोटि 1, घात 1
   (iii) कोटि 4, घात परिभाषित नहीं (iv) कोटि 3, घात 1
2. (i) $xy' = 3y$ (ii) $x^2 + 3y^2 = 2xyy'$ (iii) $xy' = y \log y$
4. (i) $e^{-x} - e^{-y} = e^x + A \ (x \in \mathbf{R})$ (ii) $\tan y = \frac{1}{2} \sin 2x + A \ (x \in \mathbf{R})$
   (iii) $y^2 + 2 = \frac{A}{x^2 + 2} \ (x \in \mathbf{R})$ (iv) $y = x + \log |x(1+y)| + A \ (x(y+1) \neq 0)$
   (v) $y^2 = A^2 e^{2y/x} \ (x \neq 0)$ (vi) $x^2y - xy^2 = A \ (x \neq 0)$
   (vii) $y^2 = A^2 \exp(2 \tan^{-1} y/x) \ (x \neq 0)$
   (viii) $x^2(1 + \cos y/x)^2 = A^2 \sin^2 y/x \ (x \neq 0)$
   (ix) $y = \tan x - 1 + A e^{-\tan x} \ (\cos x \neq 0)$
   (x) $y = \frac{A - x^2}{2(1 + \sin x)} \ (\sin x \neq -1)$ (xi) $x = e^{-y}(\tan y + A) \ (x \in \mathbf{R})$

(xii) $x = y(y^2 + c)\ (y \neq 0)$

5. (i) $y = 2 - \frac{3x}{2x+1}\ (x \neq -\frac{1}{2})$ (ii) $y = \log\left|2 \pm \frac{1}{x+1}\right|\ (x \neq -1)$

(iii) $y = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)(x \in \mathbf{R})$ (iv) $x + y + 1 = \tan y\,(x \in \mathbf{R})$

(v) $x = y + e^y + 1 + x\,(x \in \mathbf{R})$ (vi) $xy = 2\,|y-x|^{3/2}(x \in \mathbf{R})$

(vii) $(x^3 + y^3)^2 = 4x^2 y^2 (x \in \mathbf{R})$ (viii) $x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = 8\,(x \in \mathbf{R})$

(ix) $y = (x^2 + 1)\ \sin x\,(x \in \mathbf{R})$ (x) $\frac{x}{y^2} = e^{-1} - e^{-y}(x \in \mathbf{R})$

(xi) $y \sin x = 2x^2 - \frac{1}{2}\pi^2\ (\sin x \neq 0)$

(xii) $x^2 = y^2\ e^{\frac{2}{xy}} - 2\,(xy \neq 0)$

6. (i) $\frac{-1}{2}(\log x)^2 - \log|x| + Cx + D$ (ii) $8y = 2x^2 + \cos 2x + Ax + B$

7. $2xy = a^2\ (1 + x^2)\ (x \in \mathbf{R})$ 8. 9 गुना, $5\frac{\log 10}{\log 3}$ घंटे

9. 3, 12, 500 10. (a) $9^{10}/10^8\,\%$ (b) $133\frac{1}{3}$ ग्राम

11. 1822 रु, 12 वर्ष (लगभग) 12. 40^0F

13. $x + y = e^x - 1$ 14. $3y = x^3 + 4$

15. $x + y\ \log\ y = ^e y$

प्रश्नावली 15.1

1. $\sqrt{565}$ N का झुकाव बल 10N से कोण $\tan^{-1}\left(\frac{9}{22}\right)$

2. महत्तम परिणामी बल = 20 N; न्यूनतम परिणामी बल = 4 N

3. 13 N का झुकाव कोण $\tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right)$

प्रश्नावली 15.2

1. क्षैतिज वियोजित भाग = $5\sqrt{3}$ N; उर्ध्वाधर वियोजित भाग = 5 N

2. $50(\sqrt{3}-1)$ N, $25\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$

3. 15 N; $\cos^{-1}(4/5)$; $\sin^{-1}(4/5)$ 4. $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ 5. 45°

6. $10\sqrt{5}$ N; उर्ध्व से $\tan^{-1}(1/2)$

प्रश्नावली 15.3

2. $588(\sqrt{3}-1)$ N और $294\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)$ N

3. $\frac{19.6\ W}{\sqrt{7}}$ N और $\frac{14.7\ W}{\sqrt{7}}$ N 5. तनाव $= 2W\sin(\theta/2)$, प्रतिक्रिया = W

8. 392 N; 294 N

प्रश्नावली 15.4

1. 160 N ; 60 N 2. 44 किग्रा के बालक से लगभग 0.885 मीटर की दूरी पर

5. 7.8 N; 33.8 N

प्रश्नावली 15.5

1. 10 आघूर्ण की इकाई 2. B से 5 सेमी

3. 80 आघूर्ण की इकाई 4. 6 N 5. 6 N

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

1. $\sqrt{\frac{68-15(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}}$ N कोण $\tan^{-1}\left(\frac{3(1+\sqrt{3})}{10\sqrt{2}+3(1-\sqrt{3})}\right)$ बनाते हुए

2. $\sqrt{3}:1:2$

3. $\sqrt{169 - 60\sqrt{3}}$ N परिणामी से झुकाव कोण $\tan^{-1}\left[\frac{5(24+5\sqrt{3})}{501}\right]$

4. $\tan(\theta_1 \sim \theta_2) = \dfrac{(PQ' \sim P'Q)\sin\alpha}{PP' + QQ' + (PQ' + P'Q)\cos\alpha}$

9. 245 N और 588 N

10. 1225 N और 1715 N

प्रश्नावली 16.1

1. 2.8 किमी / घं

2. 1.5 से ; –8.5 मी /से

3. $10\sqrt{10}$ मी/से कार की दिशा से झुकाव कोण $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

4. 60°

7. $\sqrt{16+9\sqrt{3}}$; $\tan^{-1}\left\{\frac{3+\sqrt{3}}{5+3\sqrt{3}}\right\}$

8. नीचे की ओर उर्ध्वाधर से 30°

9. 19.2 मिनट, 9.6 किमी

10. $\frac{1}{40}$ घं

प्रश्नावली 16.2

1. 400मी

2. 10 मी/से; 8 मी /से^{2}

3. $\frac{1}{3}$ सेमी / से^{2}

4. $5\sqrt{10}$ किमी/घं

6. (ii) $-\frac{b}{2a}$

9. 10 मी

प्रश्नावली 16.3

1. (i) 46 मी (लगभग) (ii) 3 से (लगभग) (iii) 10.4 मी/से (iv) 30 मी/से

2. $\frac{35\sqrt{10}}{3}$ मी/से

3. 25.875 मी

4. 78.4 मी

5. 20723.625 सेमी ; 6.5 से

प्रश्नावली 16.4

1. $\frac{10\sqrt{6}}{7}$ से ; 15 मी

2. 17.5 मी/से ; 10.5 मी/से

3. महत्तम पराश = $\frac{245\sqrt{3}}{2}$; 30° ; 5 से

अध्याय 16 पर विविध प्रश्नावली

1. $3\sqrt{17}$ किमी/घं ; $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$

2. (i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$ दिल्ली से चंडीगढ़ की दिशा के साथ। (ii) $\frac{5}{3\sqrt{7}}$ घं

4. (a) जब $u < v$; $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)$

   (b) नदी के बहाव से समकोण पर

7. $\frac{5}{54}$ मी/से^{2} ; 375 मी

11. 45°

18. $80\sqrt{6}$ मी; 2.85 से (लगभग)

प्रश्नावली 17.1

1. (a) 5750 रु (b) 30200.95 रु (c) 174240 रु

2. 8966.15 रु

3. 26973.40 रु

4. 1165.80 रु

5. 10768.12 रु

6. 1748.25 रु

7. 46925 रु

8. 6824.16 रु

9. 3955.50 रु

10. 12475.50 रु

11. 1128.26 रु

12. 111766.53 रु

13. 313700 रु

14. 51066.67 रु

प्रश्नावली 17.2

1. 35710 रु

2. 52500 रु

3. 38932.80 रु

4. 290.48 रु

5. 362.76 रु

6. 483.87 रु

7. 229395 रु	8. 253200 रु	9. 23832 रु
10. 1016.81 रु	11. 53211.70 रु	12. 12782.81 रु

प्रश्नावली 17.3

1. 877083.33 रु	2. 80936 रु	3. 138574.72 रु
4. 7020.15 रु	5. 121004 रु	6. 5526.40 रु
7. 10869.33 रु	8. 343972 रु	9. 1860.79 रु
10. 3924.64 रु	11. 2401.19 रु	12. 5959.85 रु
13. 2809.77 रु	14. 1610.82 रु	

अध्याय 17 पर विविध प्रश्नावली

1. 373300 रु	2. 159400 रु	3. 35097.90 रु
4. 7752.09 रु	5. 12577.80 रु	6. 11 वर्ष
7. 120483.40 रु	8. 13694.97 रु	9. 66092.50 रु
10. 2730 रु	11. 33 वर्ष	12. 15644 रु
13. 6420.20 रु	14. 3471.52 रु	15. 34500 रु
16. 390.48 रु	17. 3681 रु	18. 19169.32 रु
19. (i) 15303 रु (ii) 113806.80 रु	20. 75698.50 रु	

प्रश्नावली 18 .1

1. 12, 25
2. (i) $4500+10x$ (ii) $25x$ (iii) 300
3. 40, 5
4. 2300
5. $6x$, $20,000+\frac{21}{10}x$, $\frac{39}{10}x - 20,000$, जहाँ x उत्पादित एवं बेची गई सामग्री की इकाई है।
6. $7000x-400x^2-25,000$, 5, 12.5

7. 800, $x \geq 800$ 8. $67x - 40{,}200$, 600

9. (i) $6x$ (ii) $4500 + \frac{3x}{2}$ (iii) $\frac{9}{2}x - 4500$ (iv) 1000 (v) 750

10. 1250, 8

प्रश्नावली 18.2

1. (i) $x + 30 + \frac{1500}{x}$, (ii) 70 2. (i) $0.0006x^2 - 0.1x + 7$, (ii) 3

3. (i) $x^2 + 6x - 7$ (ii) $\frac{x^2}{3} + 3x - 7 + \frac{16}{x}$

5. $x^2 + 5x + 36$, $2x + 5$, 25 8. 5

9. $4x - 3.5$, (0,1) (1,0) $(\frac{1}{6}, 0)$ 10. $\frac{3x^2}{200} - \frac{x}{25} - 30$

प्रश्नावली 18.3

1. (i) $\frac{200}{x} + \frac{x}{5}$ (ii) $\frac{2x}{5}$ (iii) 10

2. (i) $300 - 10x$ (ii) 150 3. 1220,

4. (i) $300x + 2x^2 - 5x^3$ (ii) $300 + 4x - 15x^2$ (iii) 177

5. $\frac{1}{3}(10 - 2x)$, $\frac{4}{3}$ 6. (i) $20 - 0.5x$ (ii) $20 - x$ (iii) 10 (iv) 5.5

7. (i) $8000 + 20x - x^2$ (ii) $8000 + 40x - 3x^2$ (iii) 2500, 6500

8. $2300t - 100t^2$, $2300 - 100t$, $2300 - 200t$, 1150 रु

9. $7xe^{2-\frac{x}{300}}$, $7e^{2-\frac{x}{300}}$, $7e^{2-\frac{x}{300}}\left(1 - \frac{x}{300}\right)$ और $7e$

10. $p = \frac{55}{3} - \frac{x}{6}$, $\frac{55x}{3} - \frac{x^2}{6}$, $\frac{55}{3} - \frac{x}{6}$, $\frac{55 - x}{3}$

11. MR का ढाल = 2 AR का ढाल 12. 40

प्रश्नावली 18.4

1. 90, 2025
2. (i) 2000 (ii) 60,00,000 रु
3. 15 रु (लगभग)
4. 4
5. 87
6. 35
7. 100, 7 रु
8. 7500
9. $\frac{250}{7}$
10. $\frac{19}{8}$ अभी भी कम इकाईयों की संख्या अर्थात् $\frac{19-t}{8}$ पर महत्तम लाभ प्राप्त किया जा सकता है।
11. 1, 6 रु
12. 1500, 4500 रु
13. 50

प्रश्नावली 18.5

1. $x^3 - 5x^2 + 3x + 8, x^2 - 5x + 3 + \frac{8}{x}$
2. $10e^{0.3x} + 5x + 6990, 10e^{1.5} + 7015$
3. $33x(\log x - 1) + 44$
4. $20x - 0.02x^2 + 0.001x^3 + 7000,\ 20 - 0.02x + 0.001x^2 + \frac{7000}{x}$
5. 30,000 रु, 10,000 रु
6. $2x^2 + 1000,\ 2x + \frac{1000}{x}$
7. $\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{1,16,888}{15}$
8. $C(x) = x^3$
9. $-\frac{3}{2e^2} + \frac{185}{6}$
10. $2\left(\sqrt{px+q} - \sqrt{q}\right)$

प्रश्नावली 18.6

1. $5x - \frac{6}{x+2} + 3$; 22 रु
2. $-\frac{1}{x+1} + 2x + 1$, 8.80 रु
3. $9 - x + \frac{4}{3}x^2$
4. $\log|x+1| - 3x, \frac{1}{x}\log|x+1| - 3$
5. $\frac{-x(6x+5)}{3(2x+3)}, -\frac{6x+5}{3(2x+3)}$
6. $\frac{ax^2 + abx + x}{x+b}, \frac{ax + ab + 1}{x+b}$

7. $100x - 3x^3$, $100 - 3x^2$

8. $\frac{ax}{x+b} - cx, \frac{a}{x+b} - c$

9. $20x\,e^{-\frac{x}{10}}, 20\,e^{-\frac{x}{10}}$

10. $(x+1)\log(x+1) - x, \frac{(x+1)\log(x+1)}{x} - 1$

अध्याय 18 पर विविध प्रश्नावली

1. $4x-5$, MAC के लिए वर्धमान है।

2. $x > 6$ के लिए वर्धमान, $0 \le x < 6$ के लिए ह्रासमान

3. 4.52 टन

5. 50 किमी/घं

6. 6

7. $P(x) = (60-x)(390 + 15x)$, 17

9. $\frac{9x^3}{2} + 23x^2 - 64x$; 2

10. 9 , 0

11. $x(3x - x^2 - 2)$; 0

प्रश्नावली 19.1

1. 0.64

2. (i) 0.32 (ii) 0.64 (iii) 0.98

3. 0

4. $\frac{11}{26}$

5. (i) $\frac{4}{11}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) $\frac{2}{3}$

6. $\frac{5}{9}$

7. $\frac{1}{3}$

8. $\frac{3}{11}$

9. (i) $\frac{2}{15}$ (ii) $\frac{2}{15}$

10. $\frac{1}{6}$

11. $\frac{1}{6}$

12. $\frac{13}{204}$

13. $\frac{1}{3}$

14. $\frac{2}{9}$

15. $\frac{1}{3}$

16. $\frac{1}{2}$

17. $\frac{2}{87}$

18. $\frac{5}{8}$

19. 0.12, 0.6

20. $\frac{38}{63}$

प्रश्नावली 19.2

1. $\frac{1}{40}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{2}{5}$

4. $\frac{1}{52}$ 5. $\frac{110}{221}$ 6. $\frac{3}{4}$

7. $\frac{24}{29}$ 8. $\frac{2}{9}$ 9. $\frac{41}{69}$

10. $\frac{55}{118}, \frac{15}{59}$ 11. $\frac{8}{11}$ 12. $\frac{1}{15}, \frac{2}{5}, \frac{8}{15}$

13. $\frac{5}{34}$ 14. $\frac{5}{11}$ 15. $\frac{3}{11}$

प्रश्नावली 19.3

1. माध्य = 2, प्रसरण = 1, विचलन = 1
2. माध्य = 1.6, प्रसरण = 2.24, विचलन = 1.497
3. माध्य = 0, प्रसरण = 1.2, विचलन = 1.095
4. माध्य = – 0.2, प्रसरण = 1.56, विचलन = 1.249
5. $\frac{3}{4}$ 6. $\frac{1}{2}$
7. माध्य = 1.5, प्रसरण = 0.75, विचलन = 0.866
8. माध्य = 6, प्रसरण = 3 9. माध्य = $\frac{2}{13}$, विचलन = 0.377
10. $\frac{2}{3}$ 11. $\frac{400}{2873}$ 12. $\frac{4}{9}$
13. माध्य = $\frac{7}{6}$, प्रसरण = $\frac{17}{36}$ 14. $\frac{1}{2}$
15. प्रति पैसे की उछाल पर व्यक्ति औसतन 1 रु की हानि में होगा।

प्रश्नावली 19.4

1. $\frac{10}{32}$

2. (i) $\frac{8}{81}$ (ii) $\frac{1}{81}$ (iii) $\frac{8}{9}$

3. $\frac{25}{216}$

4. (i) $\left(\frac{5}{6}\right)^7$ (ii) $35\times\left(\frac{1}{6}\right)^7$ (iii) $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ (iv) $1-\left(\frac{1}{6}\right)^7$

5. (i) $\left(\frac{19}{20}\right)^5$ (ii) $\frac{6}{5}\times\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iii) $1-\frac{6}{5}\times\left(\frac{19}{20}\right)^4$ (iv) $1-\left(\frac{19}{20}\right)^5$

6. $\left(\frac{9}{20}\right)^4$

7. (i) $\frac{15}{64}$ (ii) $\frac{22}{64}$

8. (i) $\frac{80}{243}$ (ii) $\frac{105}{512}$

9. $P(1)=\frac{3125}{7776}$, $P(2)=\frac{1250}{7776}$, $P(3)=\frac{250}{7776}$, $P(4)=\frac{25}{7776}$, $P(5)=\frac{1}{7776}$

10. 2

11. माध्य $=\frac{20}{3}$, प्रसरण $=\frac{40}{9}$

12. माध्य = 16, प्रसरण $=2\sqrt{3}$

13. 25

14. (i) $\left(\frac{3}{4}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{1}{4}\right)^4$ (iii) $54\left(\frac{1}{4}\right)^4$

15. $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

16. (i) 0.0486 (ii) 0.6561

17. 0.0128

18. (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (ii) $7\times\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (iii) $20\times\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^3$ (iv) $1-\left(\frac{2}{5}\right)^6$, माध्य $=2.4$

19. $\frac{5}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^9$

20. $\frac{625}{23328}$

21. (i) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (ii) $90\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$ (iii) $\left(\frac{3}{4}\right)^5$

22. $n=27,\ p=\frac{1}{3}, q=\frac{2}{3}$

23. $n=5,\quad p=\frac{1}{5},\ q=\frac{4}{5}$

24. 0.124

25. $\frac{496}{729}$

प्रश्नावली 19.5

1. (i) 0.12 (ii) 0.18 (iii) 0.0988
2. 0.08
3. 0.574
4. (i) 0.1378 (ii) 0.2166
5. (i) 0.0536 (ii) 0.062
6. 0.093 (लगभग)
7. 0.986 (लगभग)
8. 0.0625
9. 0.27 (लगभग)
10. 0.0067, 0.0335, 0.0837, 0.1396, 0.1745
11. 0.2635
12. 0.259
13. (i) 0.082 (ii) 0.2562
14. माध्य = 22.22, प्रसरण = 22.22
15. 0.997
16. P(1) = 0.27, P(2) = 0.27, P(3) = 0.18, P(4) = 0.09, P(5) = 0.036
17. 0.405
18. 0.497
19. $e^{-\frac{4}{3}}$
20. 0.223 ; 0.932

प्रश्नावली 19.6

1. $\frac{60}{119}$
2. 0.099
3. 0.15
4. 0.2
5. P(3) = 0.0256
6. (i) 0.0879 (ii) 0.3672
7. (i) 0.0778 (ii) 0.087
8. 0.0071
9. (i) 0.2167 (ii) 0.3378
10. 0.383
11. $e^{-10}\left[11+\frac{(10)^2}{2!}+\frac{(10)^3}{3!}+\frac{(10)^4}{4!}+\frac{(10)^5}{5!}\right]$
12. 0.0181 (लगभग)
13. d_1
14. 0.92
15. 0.2

भारत संविधान

भाग 4क

नागरिकों के मूल कर्तव्य

अनुच्छेद 51 क

मूल कर्तव्य – भारत के प्रत्येक नागरिक का यह कर्तव्य होगा कि वह –

(क) संविधान का पालन करे और उसके आदर्शों, संस्थाओं, राष्ट्रध्वज और राष्ट्रगान का आदर करे,

(ख) स्वतंत्रता के लिए हमारे राष्ट्रीय आंदोलन को प्रेरित करने वाले उच्च आदर्शों को हृदय में संजोए रखे और उनका पालन करे,

(ग) भारत की संप्रभुता, एकता और अखंडता की रक्षा करे और उसे अक्षुण्ण बनाए रखे,

(घ) देश की रक्षा करे और आह्वान किए जाने पर राष्ट्र की सेवा करे,

(ङ) भारत के सभी लोगों में समरसता और समान भ्रातृत्व की भावना का निर्माण करे जो धर्म, भाषा और प्रदेश या वर्ग पर आधारित सभी भेदभावों से परे हो, ऐसी प्रथाओं का त्याग करे जो महिलाओं के सम्मान के विरुद्ध हों,

(च) हमारी सामासिक संस्कृति की गौरवशाली परंपरा का महत्त्व समझे और उसका परिरक्षण करे,

(छ) प्राकृतिक पर्यावरण की, जिसके अंतर्गत वन, झील, नदी और वन्य जीव हैं, रक्षा करे और उसका संवर्धन करे तथा प्राणिमात्र के प्रति दयाभाव रखे,

(ज) वैज्ञानिक दृष्टिकोण, मानववाद और ज्ञानार्जन तथा सुधार की भावना का विकास करे,

(झ) सार्वजनिक संपत्ति को सुरक्षित रखे और हिंसा से दूर रहे, और

(ञ) व्यक्तिगत और सामूहिक गतिविधियों के सभी क्षेत्रों में उत्कर्ष की ओर बढ़ने का सतत् प्रयास करे, जिससे राष्ट्र निरंतर बढ़ते हुए प्रयत्न और उपलब्धि की नई ऊंचाइयों को छू सके।